GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIII

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1937

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică.
2. Membrii decedaţi.
3. Suprafaţă de revoluţie aplicabilă pe alta asemenea ei. *A. Myller.*
4. Consideraţiuni practice la alcătuirea şi rezolvarea problemelor de matematică (urmare) . . . . *I. Ionescu.*
5. Concursul „Gazetei Matematice" din 1938.
6. Premii, donaţii şi alte dispoziţii ale fondurilor Societăţii „Gazeta Matematică".
7. Note Matematice: 1 — 3.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 269.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 1778, 2408, 3985, 4355, 4551, 4619, 4677, 4751, 4757, 4776, 4796, 4813.
12. Exerciţii: 1 — 4.
13. Probleme propuse: 4855 — 4866.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1937

Acest număr conţine şi un supliment de patru pagini.

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **D. Stan**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 270, 71, 97, 99, 310, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 64, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 577, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3069, 81, 127, 61, 208, 55, 98, 304, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 89, 522, 23, 33, 42, 45, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 99, 700, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 96, 909, 13, 16, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 111, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 203, 06, 10, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 89, 90, 03, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 42, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 05, 12, 16, 20, 26, 45, 49, 52, 61, 64, 68, 73, 74, 79, 80, 81, 86, 87, 89, 90, 92, 511, 13, 15, 16, 22, 33, 34, 47, 50, 58, 59, 61, 92, 96, 98, 601, 02, 15, 30, 41, 47, 57, 70, 72, 75, 80, 83, 85, 86, 87, 88, 90, 93, 98, 706, 10, 24, 26, 34, 42, 49, 70, 72, 83, 94, 98, 801, 04, 05, 06, 07, 12, 21, 29, 31, 35, 37, 38, 39, 40, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

A apărut

CULEGERE DE PROBLEME DE ARITMETICĂ

PARTEA I Aritmetica raționată

DE

ION IONESCU

EDIȚIA II-a REVĂZUTĂ ȘI ADĂOGITĂ

Prețul: 190 lei

DE VÂNZARE LA LIBRĂRII. SE POATE COMANDA ȘI LA GAZETA MATEMATICĂ, BUC. CALEA GRIVIȚEI Nr. 158, TRIMIȚÂNDU-SE COSTUL DE 190 LEI PLUS 15 LEI PENTRU TRANSPORT SAU CONTRA RAMBURS

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLIII. No. 1 *SUPLIMENT* SEPTEMVRIE 1937

RECREAŢIUNI

1. **Jumătatea, în zicătorile populare.**
E un om şi jumătate.
Când spui minciuni, să le crezi pe jumătate.
Lauda în faţă e jumătate ocară.
Treaba începută || E pe jumătate făcută.
Ce e omul? Jumătate fiară, jumătate înger.

I. I.

*

2. **O proporţie.** In tratatul de Ştiinţe oculte al Doctorului DUPOUY, se găseşte enunţată proporţia:

Omul / Animal = Plantă / Mineral.

I. I.

*

3. **Fisiologie cu geometrie.** In ziarul *La Depêche* din 28/1/1928 e scris: „Le présent coupe ton passé dans le point géométrique de sa physiologie".

V. C. POPESCU.

*

4. **Un matematician păcălit.** Un seminarist mi-a povestit următorul dialog dintre un preot şi un matematician ateu:

Matematicianul. — Eu nu pot admite ca *Tatăl, Fiul* şi *Sfântul Duh*, 3 persoane diferite, să facă un singur *Dumnezeu!*

Uite, la noi în matematică $1 + 1 + 1 \neq 1$.

Preotul. — Noi primim dogmele religiunii ca D-Voastră axiomele, al căror adevăr nu-l discutăm, de oarece, pentru noi conţin un adevăr absolut. Dă-mi D-ta, în materia D-tale, un exemplu de o cantitate absolută.

Matematicianul, cum era firesc, a răspuns repede: *zero.*

Preotul: Apoi atunci ce mai vrei? Nu aveţi egalitatea:

$$0 + 0 + 0 = 0!$$

N. M.

*

5. **Litere greceşti.** Un eminent profesor de matematici din Oltenia era prin 1900 student la Facultatea de ştiinţe din Bucureşti şi nu cunoştea bine literele greceşti pentru că învăţase la un Liceu real, după moda acelei vremi.

Scos odată la o Conferinţă de Geometrie Analitică, studentul care era de altfel foarte harnic şi priceput, e invitat de D-l Conferenţiar să noteze pe scurt o funcţiune de x, y, z cu Φ. Neştiind să scrie această literă, sărmanul student scrie φ. D-l Conferenţiar îl roagă să scrie un „*fi mare*". Studentul face atunci pe tablă un φ mai mare ca primul. D-l Conferenţiar insistă pentru Φ.

Studentul face atunci un φ şi mai mare ca precedentul. D-l Conferenţiar plictisit îi strigă: „Fă Domnule un *„fi mare"* ! Studentul desperat, îi zice atunci: „Dar cât de mare vreţi să vi-l fac ?! ".

(Absolut autentic).

GH. B.

*

6. **Utilizarea matematicilor** de D-l OCTAVIAN GOGA.

Probleme înguste: „Viaţa publică a Românilor de peste munţi era săracă în personalităţi... Cei mai mulţi îşi frângeau aripile la Şcoala ungurească... Puţini, care eşau biruitori din această luptă inegală, erau înfrânţi în viaţă. Aruncaţi într'o cancelarie de advocat provincial, ori la catedra vreunui Liceu, îşi munceau inteligenţa cu rezolvirea unor *probleme înguste*, simţind zi de zi, cum orizontul coboară în jurul lor..."

— *Linie dreaptă.* Nepot al lui BARNUŢIU, având în sânge îndemnul perpetuu al unei înalte conştiinţe de neam, el era predestinat pentru *o linie dreaptă* în manifestările lui politice...

(Acestea sunt extrase din ziarul *România Nouă*, Cluj, 20 Martie 1937. Reproducerea unui articol scris în 1915, cu ocazia plecării pe front, în armata maghiară, a D-lui IULIU MANIU.

— *Linie dreaptă.* Desfăcuţi de orice interes individual, robiţi numai de magia ideii *pe linia dreaptă a Binelui Public,* au alergat din toate colţurile oameni plini de recunoştinţă să se închine unui bărbat pentru credinţa lui.

— *O nouă Geometrie.* „ ...Tânărul fiu de boier nu s'a încadrat în această *Geometrie a vremii*, a depăşit-o, şi-a deschis drum singur cu alte obiective mult mai adecuate trebuinţelor noastre. A primit principii liberatoare din apus, dar era prea autohton ca să nu respingă nota lor *internaţională"*...

(Aceste două sunt luate din ziarul *„Universul"* No. 103 din 1937, din cuvântarea ţinută la sărbătorirea de 80 ani a D-lui *A. C. Cuza*).

(Adunate de G. V. NICULESCU).

*

7. **Politica şi Matematica.** In ziarul *Politica* din 6/XI/1926 se poate citi „Planul trebuia să-şi aibă volumul său în spaţiu ; volumul să-şi aibă spaţiul şi el".

Ce vrea să spună autorul prin aceste rânduri ?

CORNELIU N. POPESCU.

*

8. **Linia dreaptă e mai lungă de cât cea strâmbă !** Acest adevăr îl găsim prin scrieri economice, teologice, etc. lată aici două exemple :

a) Privitor la schimbul indirect prin intermediul monedei, un tratat de economie politică scrie :

„Deşi cu modul acesta se fac două operaţii de schimb în loc de una singură, în realitate, cele mai adesea prin mijlocul acesta ajung mai repede la rezultat decât cu schimbul direct. Dovadă că şi în materie economică e exact că nu totdeauna linia dreaptă e drumul care te duce cel mai repede dela un punct la altul".

P. I. DIDICESCU.

b) In o „Apologetică" găsim:

„O! dacă teoremele geometrice, al căror adevăr intangibil îl proclamăm acum cu emfază, ar avea vreodată prin ipoteză, strania inspirație de a se amesteca în interesele inimii noastre, în viața noastră morală, să vedeți cât de repede s'ar înmulți tăgăduitorii geometrii, și cât de mult ar susține că drumul cel mai scurt între două puncte nu este linia dreaptă, ci, poate, cea strâmbă...

V. CRIVĂȚ, M. I. GROSU.

*

9. **Telegramă desperată.** Profesorul atrage atențiunea elevului că *traectoria* proiectilului este o curbă continuă cu asimptota verticală, iar nu o curbă întreruptă cum a desemnat-o elevul. Și adaogă profesorul glumeț:

— „Ce crezi că s'ar întâmpla cu proectilul, dacă traectoria s'ar rupe așa cum ai desemnat-o D-ta?"

Elevul tace, dar în recreație amintindu-și că a epuizat motivele de cereri de bani de acasă, telegrafiază tatălui său:

„Tată, trimite-mi urgent 1000 lei că am rupt trajectoria".

GH. B.

*

10. **De ce matematicianii mari nu publică cărți elementare de matematici elementare?** Iată ce spune D'ALEMBERT în această privință:

„Maeștrilor, care prin un studiu lung și sârguitor au învins greutățile și au cunoscut finețele, nu le mai place să se întoarcă pe urmele lor pentru ca să înlesnească și altora drumul pe care și l'au deschis ei înșiși cu multă osteneală; sau poate că speriați încă de mulțimea și de natura piedicilor pe care le-au înlăturat în drumul lor, găsesc respingătoare munca care ar fi necesară ca să-l aplaneze, muncă pe care lumea ar aprecia-o prea mică pentru ca să ție seama de ea. Preocupați numai ca să creeze progrese noi în știință, pentru a se ridica, de le este posibil, deasupra predecesorilor și contimporanilor lor, și mai geloși de admirație decât de recunoștința publică, ei nu se gândesc decât să descopere și să se bucure de descoperirea lor, preferând gloria de a mări clădirea, față de grija de a-i lumina intrarea".

Cum fac însă alții cărțile? Tot el ne spune:

„Censori și plagiatori, ca și mulțimea acelora care l'au precedat, copiază, transformă, extind, răstoarnă, scurtează, întunecă, iau ideile informe și confuze drept idei clare și invidia de a fi autori drept dorință de a fi folositori; aceștia sunt oameni, care după ce au parcurs, prin încercări, un labirint, cred că pot să-i dreseze planul".

I. I.

*

11. **Persoana. Personalitatea!** In Universul literar din 26/IX/1926 găsim:

„Orice persoană care este alcătuită din mai multe persoane este o persoană la puterea doua sau un geniu".

Iar în „Fenomenul originar" de D-l L. BLAGA la 78 găsim următoarele:

„Personalitatea este rasa la puterea a doua".

CORNELIU N. POPESCU.

*

12. **Trigonometrie rapidă!** Pentru *Suplimentul cu Exerciţii* al *Gazetei Matematice*, ca soluţii la exerciţiul 213, doi elevi, unul din Bucureşti şi altul din provincie, au trimis cele ce urmează. Era de verificat identitatea trigonometrică:

$$(\cos 5a + \sin 3a - \cos a) / (\sin 5a - \cos 3a - \sin a) + \operatorname{tg} 3a = 0.$$

Soluţia:

$$(\cos 5a + \sin 3a - \cos a) / (\sin 5a - \cos 3a - \sin a) + (\sin 3a / \cos 3a) = 0$$

$$\therefore \cos 3a\,(\cos 5a + \sin 3a - \cos a) + \sin 3a\,(\sin 5a - \cos 3a - \sin a) = 0$$

$$\therefore \cos^2 15a + \cos 3a \sin 3a - \cos^2 3a + \sin^2 15a - \sin 3a \cos 3a - \sin^2 3a = 0$$

$$\therefore (\cos^2 15a + \sin^2 15a) - (\cos^2 3a + \sin^2 3a) = 0,$$

$$1 - 1 = 0.$$

Autentic! Soluţiile le păstrez!

G. D. S.

*

13. **O teoremă Balzac.** „Neîndoios ideile se proiectează în raport direct cu forţa unde creerul le mână, cu o lege matematică asemenea aceleia care dirijează obuzele din mortiere".

Citat de I. BOTEZ în articolul său din *Curentul* No. 1647 din 31 August 1931.

Ar fi de adăogat ca un comentariu că atunci când o proporţie matematică începe cu *neîndoios* sau *evident*, atunci lucrul trebue să fie clar evident... Altfel se va întâmpla ca legea împrăştierii punctelor de cădere ale obuzelor aruncate din mortiere să nu fie în nicio legătură cu legea, sau lipsa de lege, în care se proiectează ideile. Dar în literatură totul se poate.

GH. B.

*

14. **Stradă astronomică.** In *Magazinul istoric pentru Dacia*, vol. II, pag 100, Craiova e singura cetate în principatul nostru a căreia uliţă principală e croită astronomic pe meridian.

I. I.

*

15. **Sistem geometric. Funcţie Algebrică.** In *«Cetatea Literară»* din Mai 1926 s'a căutat să se dea o formă matematică definiţiei unei legi:

„O lege nu este numai un sistem geometric; o lege de administraţie este o funcţiune algebrică".

CORNELIU N. POPESCU.

*

16. **Geometria Analitică şi Croitoria.** Fără să cunoască coordonatele carteziane croitorii scriu detalii pentru tăerea tiparelor de rochi în modul următor:

Figura I. Desemnează un dreptunghiu de 45 cm înălţime şi 48 cm lărgime. Dela A către C la 3 cm aşează pe E; dela B către A la 6 cm aşează pe F şi uneşte E cu F printr'o dreaptă; dela D către C la 23 cm aşează un punct , ridică acest punct cu 4 cm şi pune pe I; uneşte pe I cu F printr'o *linie convexă* tangentă la CD şi BD, etc...

GH. B.

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XLIII

15 SEPTEMVRIE 1937 — 15 AUGUST 1938

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1937

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ”

DELEGAȚIUNEA PENTRU ANUL 1937 *)

GH. ILIESCU, D. STAN şi AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII „GAZETA MATEMATICĂ”

I. IONESCU. Membru delegat pentru: cereri, diverse şi suplimente.

G. ȚIȚEICA şi N. CIORĂNESCU. Raportori.

LT. C. IONESCU-ȚIU şi LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru: schimburi de reviste şi primirea lor, recreaţiuni, reclamaţiuni privitoare la tipărire, primirea şi repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare.

U. FLORESCU, GH. ILIESCU, HAR. P. IONESCU şi LT. C. IONESCU-ȚIU. Membri delegaţi pentru corecturi şi imprimarea revistei.

GENERAL GH. BUICLIU, O. ȚINO şi LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru aritmetică elementară.

D. BARBILIAN, N. BOTEA, U. FLORESCU, ADR. GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR, LT.-COMANDOR GH. NICULESCU şi G. D. SIMIONESCU. Membri delegaţi pentru geometrie elementară.

GH. TH. GHEORGHIU, COL. GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, O. ȚINO şi GH. VASILIU. Membri delegaţi pentru trigonometrie.

TH. ANGHELUȚĂ, GH. TH. GHEORGHIU, HAR. P. IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, A. A. ROŞU şi M. SARIAN. Membri delegaţi pentru algebră elementară.

I. CHIȚULESCU şi C. ORĂŞANU. Membri delegaţi pentru geometrie descriptivă.

U. FLORESCU, CR. MATEESCU, R. WOINAROSKI şi LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru mecanică elementară.

GENERAL GH. BUICLIU, CĂP. M. FOCŞENEANU şi O. ȚINO. Membri delegaţi pentru geometrie analitică.

C. ORĂŞANU şi A. PÂRVU. Membri delegaţi pentru cosmografie.

TH. ANGHELUȚĂ, N. CIORĂNESCU şi M. GHERMĂNESCU. Membri delegaţi pentru probleme şi note de matematici superioare.

TH. ANGHELUȚĂ, GH. TH. GHEORGHIU, D. V. IONESCU şi P. SERGESCU. Membri delegaţi pentru probleme propuse de matematici superioare.

O. ȚINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.

H. P. IONESCU şi C. IONESCU-BUJOR. Membri delegaţi pentru exerciţii.

N. ABRAMESCU, V. ALACI, N. BOTEA, MIRON NICULESCU, M. SARIAN şi LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru chestiuni de examen.

GENERAL GH. BUICLIU şi C. IONESCU-BUJOR. Membri delegaţi pentru alcătuirea tablei de materii.

U. FLORESCU, CĂP. FOCŞENEANU şi G. D. SIMIONESCU. Membri delegaţi pentru cercetarea prealabilă a soluţiilor primite dela corespondenţi.

GH. TH. GHEORGHIU. Membru delegat pentru evidenţa problemelor publicate.

LT. C. IONESCU-ȚIU. Bibliotecar.

I. S. ANTONIU, N. BOTEA, GENERAL GH. BUICLIU, N. CIORĂNESCU, GH. I. DUMITRESCU, U. FLORESCU, CĂP. M. FOCŞENEANU, ADR. GHEORGHIU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, HAR. P. IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ȚIU, MAIOR I. LINTEŞ, COLONEL GH. LITEANU N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, LT.-COMANDOR GH. NICULESCU, O. ORĂNESCU, AL. PANTAZI, A. PÂRVU, AL. ROŞU, M. SARIAN, GH. D. SIMIONESCU, O. ȚINO, GH. VASILIU, R. WOINAROSKY şi LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru cercetarea şi redactarea problemelor rezolvate.

*) Societatea este administrată şi reprezentată de o delegaţie alcătuită din doi membri şi un cassier. (Art. 14 din Statute).

PERSONALUL REDACŢIUNII „SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII"

O. N. ŢINO. Membru delegat pentru clasarea exerciţiilor propuse.

C. IONESCU-BUJOR. Membru delegat pentru concentrarea soluţiunilor de publicat şi imprimarea „Suplimentului".

HAR. P. IONESCU. Membru delegat pentru corecturi.

LT. C. IONESCU-ŢIU. Membru delegat pentru totalizarea şi formarea tabelei de rezolvitori.

A. A. ROŞU. Membru delegat pentru alcătuirea dosarelor de soluţiuni primite.

G-L GH. BUICLIU, N. BOTEA, U. FLORESCU, ADR. GHEORGHIU, HAR. P. IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ŢIU, MAIOR I. LINTEŞ, N. N. MIHĂILEANU, AL. AL. ROŞU, GH. D. SIMIONESCU, O. N. ŢINO şi LT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru exerciţii propuse.

MEMBRII

1	1922, Mart. 1*	ABASON ERNEST. Inginer-Şef. — Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Doctor în Matematici.—Profesor şi Subdirector de studii la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Matei Voevod, 25. Bucureşti 4.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU N. Doctor în matematici.—Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. V. Alecsandri, 3. Cluj.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Traian Lalescu, 1. Timişoara.
4	1937, Aug. 27	ALDEA N. N. Licenţiat în Matematici. — Str. Matei Voevod, 65. Bucureşti 4.
5	1919, Sept. 12	ANGELESCU A. Doctor în Matematici. — Profesor Universitar. — Str. Frumoasă, 12. Bucureşti 2.
6	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici.—Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
7	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer-Şef — Şef de serviciu tehnic. Direcţiunea Generală a Drumurilor M. L. P.—Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. C. Disescu, 17. Bucureşti 2.
8	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer Electrician, Diplomat al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi de Electricitate din Bucureşti.—Căsuţa Poştală Nr. 272.
9	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Licenţiat în Matematici. — Profesor Gimnaziul Comercial Regele Ferdinand I. Bucureşti.
10	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Astronom la Observatorul Astronomic Cluj. Profesor la Liceul Gh. Barițiu Cluj.— Cluj, Universitate.
11	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Şeful Serviciului judeţean de Drumuri Teleorman. — T. Măgurele.

*) Data admiterii.

12	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Director tehnic al Societăţii Comunale a Tramvaelor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — B-dul Gh. Buzdugan, 38. Bucureşti 2.
13	1936, Febr. 27	BĂDESCU RADU. Doctor în Matematici şi Docent al Universităţii din Geneva.—Asistent al Seminarului de Matematici dela Universitatea din Cluj. Profesor Suplinitor la Academia de Agricultură din Cluj. — Cluj.
14	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Abayo 560. Republica Argentina.
15	1911, Febr. 20	BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Directorul General al Casei de Depuneri şi Consemnaţiuni. — Str. Lucaci, 95. Bucureşti 3.
16	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Str. Carol Davila, 8. Bucureşti 6.
17	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Academia de Arhitectură. Directorul Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 45. Bucureşti 2.
18	1932, Apr. 20	BOTEA NICULAE. Licenţiat în Matematici. — Calea Floreasca, 46. Bucureşti 3.
19	1935, Aug. 22	BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Director la Liceul Comercial din Piatra-Neamţ. — Str. I. Gh. Duca, 15. Piatra-Neamţ.
20	1920, Aug. 15	BRATU GH. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Profesor de Astronomie şi de Calcul diferenţial şi integral la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. Directorul Observatorului Astronomic din Cluj.—Str. Observatorului, 4. Cluj.
21	1926, Iunie 28	BRENER M. AVRAM. Inginer.—Str. Viitorului, 22. Bucureşti 3.
22	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Director Superior C. F. R.—Str. Ing. Pandele Ţărăşanu, 7. Bucureşti 2.
23	1935, Noem. 7	BUCURESCU I. Lt. Licenţiat în Matematici. — Absolvent al Secţii de Radio-Comunicaţii dela Şcoala Politehnică Bucureşti. — Str. Tache Ionescu, 2. Cluj.
24	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer dela Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Bucureşti, Şcoala Superioară de Electricitate din Paris. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Washington, 32. Parcul Bonaparte. Bucureşti 3.
25	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General din Artilerie. — Secretar general al Ministerului Apărării Naţionale. Însărcinat cu conferinţe la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6. Telefon 3-9957.
26	1928, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer Inspector General.—Inspector conducător la C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
27	1924, Ian. 30	BUNESCU D. AL. Inginer S. N. P. S. — Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6. (Telefon 3-6033).

28	1930, Aug. 31	BUNGESCU ION. Maior de Artilerie. Absolvent al Şcoalei de Artilerie antiaeriană din Metz (Franţa). Brevetat de Stat Major al Şcoalei Superioare de Războiu din Paris. Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe. Profesor la Şcoala Superioară de Războiu. — Aleea Suter, 21. Bucureşti 2.
29	1920, Ian. 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer-Şef. — Şef de serviciu în Direcţia Mişcării. Regia Aut. C. F. R.—Str. Lăzureanu, 48. Bucureşti 6.
30	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer. — Inginer în Direcţiunea Întreţinerii şi Lucrărilor Noui C. F. R.—Str. Vaselor, 40 B. Bucureşti 4.
31	1910, Oct. 25	BUŞILĂ D. C. Inginer. Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Aleea Modrogan, 1. Bucureşti 3. (Telefon 2-4661).
32	1921, Mai 4	BUŞILĂ I. Inginer Inspector General.—Inginer în Ministerul Lucrărilor Publice.—Str. Dr. Lueger, 6 bis, Bucureşti 2.
33	1926, Iulie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer.—Inginer la Casa Autonomă a Drumurilor de Stat. — Str. Virgiliu, 15. Bucureşti 2.
34	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. Inginer Inspector General.—Subdirector General al Casei Muncii C. F. R.—Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
35	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-Delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3.
36	1936, Noem. 7	CARAFOLI ELIE. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat şi Doctor în Ştiinţe dela Sorbona.— Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Str. Popa Savu, 42. Bucureşti 2.
37	1920, Mart. 1	CARAMAN E. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „V. Alecsandri" din Galaţi.—Str. Lascar Catargi, 40. Galaţi.
38	1936. Febr. 27	CARTIANU GH. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". Antreprenor. — Str. Popa Tatu, 81. Bucureşti 2.
39	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. Lt.-Colonel din Artilerie. — Ajutor de comandant la Reg. 41 Artilerie Braşov.—Str. Regina Maria, 13. Braşov.
40	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer-Şef.— Inspector de Mişcare C. F. R.—Str. Sf. Ilie, 2 bis. Galaţi.
41	1935 Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti — Inginer în Regia Autonomă C. F. R. — Str. Italiană, 30. Bucureşti 1.
42	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A Inginer Inspector General.— Administraţia Comercială a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă. — Str. Oţetari, 8. Bucureşti 1.
43	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer-Şef.— Str. I. Căpitanu, 44. Bucureşti 4.
44	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer — Administrator Industrial. Antreprenor de lucrări publice şi particulare. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.
45	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Pomul Verde, 12. Bucureşti 2.

46	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GH. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer la Societatea A. E. G. — Str. B. Musolini, 22/II. Bucureşti 3.
47	1895, Sep. 15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General.—Senator. Fost Ministru.—Aleea Vulpache, 7. (Parcul Filipescu) Bucureşti 3.
48	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer, Diplomat dela Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Inginer ordinar cl. II. Conducătorul Imprimeriei C. F. R. Asistent suplinitor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II".—Imprimeria C. F. R. Bucureşti-Sud.
49	1936, Febr. 27	COŞEREANU ION. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara.—Inginer în Biroul de studii Avioane al Uzinei I. A. R. din Braşov.—Fabrica de avioane I. A. R. Braşov.
50	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer.—Director General al Fabricei de Hârtie „Letea".—Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
51	1936, Aug 25	DĂSCĂLESCU HR. Licenţiat în Matematici.—Profesor suplinitor.— Str. Dogărie, 38. Focşani.
52	1936, Febr. 27	DROSESCU GH. ION. Inginer mecanic. Director al uzinelor Astra şi Unio. —Str. Belgrad, 2. Bucureşti 3.
53	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef. — Inspector tehnic C. F. R.— Str. Principele Nicolae, 32. Craiova.
54	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti.—Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti 6.
55	1936, Febr. 27	DUMITRESCU C. I. Inginer Electromecanic dela S. P. B.—Asistent la „Rezistenţa Materialelor" la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer la Direcţiunea Economatului C.F.R.—Str. Temişana 42/II. Bucureşti 2.
56	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Str. G. D. Palade, 72. Bucureşti 3.
57	1909, Iulie 1	FILIPESCU EM. GH. Inginer.—Director General al Soc. Comunale a Tramvaelor Bucureşti. Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. Vasile Lascăr, 216. Bucureşti 3.
58	1935, Apr. 10	FLORESCU M. ULPIU. Inginer, Diplomat al Şcolii Politehnice din Bucureşti.— Sub-şef de secţie în Direcţia de Poduri C. F. R.— Calea 13 Septemvrie, 22. Bucureşti 6.
59	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Căpitan de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Ofiţer stagiar în M. St. Major — Str. Th. Aman, 8. Bucureşti 2.
60	1928, Mai 9	FUNDĂŢEANU C. ION. Inginer, Diplomat E. P. Z. — Director General al Oficiului Central de Licitaţii din Ministerul Finanţelor. — Aleea N. Ionescu, 3 (Parcul Delavrancea). Bucureşti 2.
61	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. - Str. Dionisie, 19. Bucureşti 1.
62	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer. Fost Secretar General al Ministerului de Lucrări Publice şi Comunicaţii. Fost Preşedintele Regiei P. C. A.— Profesor la Şcoala Superioară de Războiu. — Str. Wilson, 13. etaj II, apart. 7. Bucureşti 1.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

63	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer inspector General. Directorul General al Serviciului de Indiguiri şi Desecări. — Str. G. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
64	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. N. Inginer.—B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
65	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului superior de Statistică din Paris.— Secretar al Institutului de Statistică Generală a Statului. Profesor la Şcoala de Statistică.—Str. Pescari, 1 bis. Bucureşti 4.
66	1934, Dec. 19	GEORGESCU-VAL. N. ION. Căpitan de Artilerie. Inginer Electro-Mecanic, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara.— Membru în Comisia de recepţie la Uzinele „Schneider". — Rue de Fécamp, 18. Le Havre. France.
67	1936, Febr. 27	GHEORGHIU C. ADR. Licenţiat în Matematici. — Str. G-ral Magheru, 32. Bucureşti 2.
68	1932, Apr. 20	GHEORGHIU TH. GH. Doctor în Matematici.—Profesor la Şcoala de ofiţeri de Geniu. — Parcul Ianculuí. Şos. Vatra Luminoasă, 3. Bucureşti 4.
69	1914, Ian. 8	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor la Şcola Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.
70	1913, Aug. 30	GHEORGHIU A. MIRCEA. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Subdirectorul Navigaţiei Fluviale Române. — Str. Vasile Lascăr, 111. Bucureşti 3.
71	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Ştiinţele Matematice. Diplomat la Institutului de Statistică al Universităţii din Paris. — Director în Ministerul de Finanţe. — Str. Robert de Flers, 3. Bucureşti 3.
72	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Timişoara. Profesor la Şcoala de ofiţeri de Artilerie. — Str. Olimp, 13. Timişoara.
73	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. A. Maior. Inginer Radio-electrician. E. S. E. — Şeful Serviciului Radio M. St. M.—Str. Chişinău, 12. Bucureşti 2.
74	1936, Aug. 25	GHIŞOIU I. PETRE. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice „Regele Carol II" din Bucureşti. Inginer în Direcţiunea Comercială a Soc. U. D. R.—Str. Răspântiilor, 17. Bucureşti 3.
75	1931, Mart. 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor definitiv la Liceul „Dr. Ioan Meşotă" din Braşov. — Str. Carmen Sylva, 7. Braşov.
76	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Inginer.— Antreprenor de lucrări publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
77	1936, Febr. 27	GUŢU AL. Inginer.—Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". Referent la Ministerul de Industrie. — Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.
78	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer. — Parcul Filipescu. Str. Andrei Mureşanu, 23. Bucureşti 3.
79	1927, Ian. 28	HANGANU D. M. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti şi al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris.— Inginer la C. A. M. Asistent la Şc. Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti 6.

80	1924, Ian. 30	IANCULESCU ROMULUS. Inginer-Şef. — Licenţiat în Matematici. — Şeful serviciului M. II Mărfuri din Direcţia Mişcării C. F. R. Str. Petre Poni, 7. Bucureşti 2.
81	1922, Maiu 10	ILIESCU GH. Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret.—Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
82	1895, Sept. 15 (fondator)	IOACHIMESCU GH. ANDREI. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici.— Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.
83	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer.—Directorul Fabricei de Timbre.— Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6.
84	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer.—Antreprenor.—Str. Paris, 28. Bucureşti 3.
85	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris.—Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cluj.—Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
86	1936. Febr. 27	IONESCU P. HARALAMBIE. Licenţiat în Matematici. — Str. Popa Nan, 12. Bucureşti 4.
87	1895, Sept. 15 (fondator)	IONESCU I. Inginer Inspector General.—Membru corespondent al Academiei Române. Membru în Consiliul tehnic Superior. Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Căluşei, 23. Bucureşti 4.
88	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR C. Licenţiat în Matematici.—Profesor.—Str. Maior Popescu Gh., 26 (Parcul Ianculuí). Bucureşti 4.
89	1936, Febr. 27	IONESCU-ŢIU C. Lt. din Geniu. Licenţiat în Matematici. — Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.
90	1932, Apr. 20	IONESCU-ZANE D. GH. Inginer.—Şeful Serv. Aprovizionărilor din Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Str. Popovici, 38. Parcul Delavrancea. Bucureşti 3.
91	1936, Febr. 27	ISTRATI CONSTANTIN. Lt.-Comandor-Inginer, Diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică din Paris. — Preşedintele Comisiei Militare M. Aerului şi Marinei în Uzinele I.A.R. din Braşov. — Str. Dr. Baiculescu, 15. Braşov.
92	1912, Iunie 2	JIJIE ADAM. Căpitan-Comandor în rezerva Marinei. Licenţiat în Ştiinţe. Inginer electrician. — Concesionarul luminatului electric şi al alimentării cu apă din Sulina. — Sulina.
93	1924, Ian. 30	KAUFMAN N. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele.—Şef de Serviciu în Direcţiunea Generală C. F. R.—Str. G-ral Manu, 26. Bucureşti 2.
94	1936, Febr. 27	LAMOTH PETRU. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Profesor la Liceul „Banaţia".—Piaţa Tebec, 2. Timişoara.
95	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti.— Inginer-Şef.—Directorul Monetăriei Naţionale. Asistent la Şcoala Politehnică.—Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6.
96	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara.—Str. Salcâmilor, 9. Bucureşti 3.
97	1919, Sept. 12	LINTEŞ ION. Maior de Artilerie. Inginer aeronautic. Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe. Şeful Secţiei de Armament din U. D. R. Reşiţa. — Str. Epicol, 49. Bucureşti 6.

98	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. Colonel de Artilerie. — Marele Stat Major al Armatei. - Str. I. L. Caragiale, 30 A. Bucureşti 1.
99	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE. Licenţiat în Matematici.—Profesor secundar.— Liceul Militar „D. A. Sturdza". Craiova.
100	1934, Dec 19	MALAXA ELENA. Profesoară de Matematici. —Str. Aurel Vlaicu, 36. Bucureşti 3.
101	1934, Dec. 19	MALAXA N. Inginer. — Industriaş. — Aleea Alexandru, 38. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
102	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
103	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer, Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. —Inginer la Uzinele Reşiţa.—U. D. R. Reşiţa.
104	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Mare industriaş. — Str. Mussolini, 27. Bucureşti 3.
105	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Naţionale. — Str. Lânăriei, 80. Vila 26. Bucureşti 6.
106	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef.— Direcţia Generală a Drumurilor. — B-dul Bonaparte, 20 (Alee). Bucureşti 3.
107	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Subdirector la Soc. „Electrica" Bucureşti.—Calea Dorobanţilor, 1. Vila B. Bucureşti 3.
108	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Subdirector Direcţiunea de Întreţinere C. F. R. — Str. Dan Vodă, 3. Bucureşti 2.
109	1935, Noem. 5	MIHĂILEANU N. N. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Moise Nicoară".—Arad.
110	1929, Ian. 31	MIHĂILESCU P. TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Comercială din Ploeşti. — Str. Dionisie Eclesiarhul, 15. Bucureşti 2.
111	1921, Febr. 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. — Subdirector General al Administraţiei Comerciale a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă.—Splaiul Independenţei, 63. Bucureşti 6.
112	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer.— Inginer-Şef la Societatea „Concordia".— Gura Ocniţei, Jud. Dâmboviţa.
113	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „N. Bălcescu" din Brăila. — Str. Galaţi, 71. Brăila.
114	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Serviciului Exploatării Fabricelor la Casa Autonomă a Monopolurilor.—Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
115	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Director de Serviciu în Adm. Centrală a Casei Autonome a Monopolurilor. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Piaţa Lahovari, 1 A. Bucureşti. 3.
116	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de lucrări publice. — Str. Ciprian Porumbescu, 11. Bucureşti.

117	1932, Febr. 21	NEAMȚU PETRE. Inginer.—Director S.T.B. Asistent la Școala Politehnică „Regele Carol II" din București.—Str. Roma, 59. București 3.
118	1928, Aug. 29	NEGURĂ ST. Licențiat în Matematici dela Universitatea din București. — Profesor cu titlu definitiv la Liceul „Codreanu" din Bârlad.—Str. Lascăr Catargiu, 63. Bârlad.
119	1936, Aug. 25	NESTOR D-TRU. Inginer. — Str. V. Stroescu, 10. București.
120	1910, Mai 21	NICHIFOR A. G. Doctor în Științele Matematice. — Profesor la Facultatea de Științe din București și la Școala de Arhitectură București. — Str. Magheru, 62. București 2.
121	1934, Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer. — Profesor. — Școala Politehnică Timișoara.
122	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-industrial, Diplomat al Școalei Politehnice din București 1923. — Directorul tehnic al Societății „Letea". — Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
123	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Direcțiunii Tehnice din Ministerul Lucrărilor Publice și al Comunicațiilor. Profesor la Școala de Conductori de Lucrări Publice din București. — Str. Ecoului, 85. București 6.
124	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licențiat în Matematici.—Profesor la Liceul „Mihail Eminescu" din București.— Str. Sabinelor, 119. București 6.
125	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Șef.—Președintele Comisiei de control C. F. R. — Str. Londra, 35. București 3.
126	1923, Iulie 4	NICULESCU V. GHEORGHE. Diplomat al Școalei Politehnice Timișoara și al Școalei Superioare de Aeronautică din Paris. — Locot.-comandor inginer.—Str. Izvor, 98. București 6.
127	1929, Ian. 31	NICULESCU MIRON. Fost elev al Școalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Științele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Științe din Cernăuți. — Seminarul Matematic Cernăuți și Str. Paris, 14. București 3.
128	1934, Dec. 19	NICULESCU IOAN RADU. Comandor de Marină (în rezervă). — Profesor (particular) de Matematici, Fizică și Chimie. — Str. Puțul de Piatră, 8. București 3.
129	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Științe din București. Director al Institutului Superior de Educație Fizică. Director al Școalei de Statistică. — Str. Rozelor, 9. București 6.
130	1927, Ian. 28	ORĂNESCU O. Inginer-Șef cl. I. Diplomat al Școalei Politehnice din București, Secția Electro-Mecanică. — Șef de Serviciu la Navigațiunea Fluvială Română, Galați. — Str. Bolintineanu, 2. Galați.
131	1913, Oct. 7	ORĂȘANU D. CEZAR. Inginer, Diplomat al Școalei Naționale de Poduri și Șosele. Inginer Cadastral Școala Politehnică. Inginer Hotarnic și Operator Topometru. Licențiat în Matematici.— Conferențiar titular la Școala Politehnică „Regele Carol II" din București la cursul de Construcții Generale. Profesor suplinitor la cursul de Topografie și Geodezie. — Str. Sfinții-Voievozi, 9 București 2.

132	1910, Mai 21	ORĂŞANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Gh. Lazăr" din Bucureşti. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4.
133	1914, Dec. 20	PANAITESCU SC. General de Divizie în retragere. — Conferenţiar Universitar. Membru corespondent al Academiei Române.—Str. Călăraşi, 9. Iaşi.
134	1929, Ian. 31	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar-Expert. Redactor Statistic.—Profesor la Şcoala de Statistică. Asistent Universitar. Inspector actuar la Ministerul de Industrie şi Comerţ.— Str. Al. Lahovary, 9. Bucureşti 3, (Telefon 3-4305).
135	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat în Matematici. — Inginer C. F. R. — Str. Edgar Quinet, 5. Bucureşti 1. (Telefon 4-6329).
136	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D. — Str. Radu-Vodă, 25. Bucureşti 5.
137	1936, Febr. 27	POPESCU N. CORNELIU. Licenţiat în Matematici. — Profesor Titular de Matematici la Liceul Comercial din Giurgiu. Ziarist. — Locuinţele Fabricei de Zahăr, 1. Giurgiu.
138	1935, Apr. 10	POPESCU VICTOR. Inginer Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent Şcoala Politehnică „Regele Carol II".—Str. Argentina, 44. Bucureşti 3.
139	1934, Dec. 19	POPESCU-BOTOŞANI G. Inginer la Subsecretariatul de Stat al Aerului Uzinele I.A.R. Braşov. — Str. General Berthelot, 65. Bucureşti 1.
140	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Seminarul de Matematici. Cernăuţi.
141	1931, Mart. 11	POPP N. Lt.-Comandor. Inginer. Subsecretariatul de Stat al Aerului. — Str. Alecu Russo, 7. Bucureşti.
142	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Seminarul Pedagogic Universitar şi la Colegiul Naţional „Sf. Sava". — Parcul Delavrancea. Aleea D, 2. Bucureşti 2.
143	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAIL. Inginer-Antreprenor.—B-dul Basarab (Alee), 9. Bucureşti 2.
144	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. Colonel. Ataşat militar pe lângă legaţia română din Paris. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
145	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici.—Director general al Casei generale de pensiuni.—Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2.
146	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. Colonel de Artilerie. — Str. Ana Davila, 25. Bucureşti 6.
147	1927, Mai 11	RACLIŞ RODOLPHE. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Licenţiat în Ştiinţele Fizice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Inginer Diplomat al Şcolii Superioare de Electricitate din Paris. — Directorul Institutului Matematic Român. Profesor Bucureşti. — Aleea Vulpache, 21 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3. (Telefon 2-2444).
148	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Şef în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Gr. Cantacuzino, 59. Bucureşti 2.

149	1933, Febr. 22	ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici. Licenţiat în Drept.—Controlor financiar.—Str. Inginer B. Giulini, 9. Bucureşti 6.
150	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti 1.
151	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Director tehnic în Direcţiunea Generală a Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului—Şos. Viilor, 7. Bucureşti 6.
152	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic, Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor.— B-dul Elisabeta, 27. Bucureşti 2.
153	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer de Poduri şi Şosele.—Director General al Societăţii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5. (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.
154	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer. — Direcţia de Studii C. F. R. Griviţa. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Columb, 7. Bucureşti 3.
155	1935, Aug. 22	SCHILERU-DILI C. ION. Inginer-Mecanic-Electrician. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Directorul Şcoalelor P. T. T. — Palatul P. T. T. — Timişoara.
156	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer. — Inginer la Consiliul tehnic Superior. — Str. Paleologu, 3. Bucureşti 4.
157	1928, Aug. 29	SERGESCU BARBU. Inginer dela Şcoala de Mine din Paris. Licenţiat în Matematici al Universităţii din Bucureşti. Licenţiat în Drept al Universităţii din Iaşi.—Director tehnic la Societatea „Steaua Română". — Steaua Română-Câmpina.
158	1919, Sept. 12	SERGESCU PETRE. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie.— Profesor la Universitatea din Cluj. Membru al Academiei Internaţionale de Istoria Ştiinţei (Paris), al Academiei Masaryk (Praga). Corespondent al Societăţii de Ştiinţe din Varşovia şi al Societăţii Regale de Ştiinţe din Liège. Laureat al Academiei de Ştiinţe din Paris şi al Academiei Române. – Str. Verde, 3. Cluj.
159	1921, Febr. 5	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Tehnic la Municipiul Bucureşti.—Str. Barbu Delavrancea, 43. Bucureşti 2.
160	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici.—Profesor secundar.— Liceul Spiru-Haret. Bucureşti.
161	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Inspector General în Corpul Tehnic. Subdirector General la Direcţia Generală a Drumurilor. — Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
162	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef.—Subdirector Direcţia de Studii C. F. R. — Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3.
163	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Mateiu Basarab şi Seminaru Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3.
164	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer.—Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Inginer la Soc. Anonimă Română de Telefoane.— Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.

165	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti.—Directorul Societăţii de locuinţe ieftine Bucureşti. — Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti 2.
166	1936, Aug. 25	STOICESCU T. T. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul din Dorohoi. — Dorohoi.
167	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. General de rezervă. — Str. Gr. Cantacuzino, 54. Bucureşti 2.
168	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Inginer. Licenţiat în Matematici.—Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". —Calea Victoriei, 168-170. Bucureşti.
169	1900, Noem. 1	TEODOREANU V. Pensionar. — Str. Zlataust, 7. Iaşi.
170	1934, Mai 2	TEODORESCU C. C. Inginer-Şef. — Profesor şi Rector al Şcoalei Politehnice din Timişoara.
171	1911, Mai 18	TEODORESCU V. N. Inginer Inspector General.—Fost Ministru.— Str. Paris, 53. Bucureşti 1.
172	1937, Ian. 28	TEODORU H. Inginer.—Str. Donici, 27. Bucureşti.
173	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici.—Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin". — Str. Scaune, 33. Bucureşti 1.
174	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4.
175	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer.—Asistentă la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti.—Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
176	1895, Noem. 1	ŢIŢEICA GH. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Secretar General al Academiei Române. Profesor la Facultatea de Ştiinţe şi la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Profesor agreat la Sorbona.—Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
177	1936, Febr. 27	TOMESCU ST. IOAN. Inginer.—Intrarea Geneva, 4. Bucureşti.
178	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Directorul Uzinelor I. A. R. — Str. M. Eminescu, 4. Braşov.
179	1935, Noem. 5	VÂLCOVICI V. Doctor în Ştiinţele Matematice şi Mecanice. Membru corespondent al Academiei Române. — Profesor la Universitatea din Bucureşti. — Str. Londra, 44. Bucureşti 3.
180	1914, Dec. 20	VARDALA I. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. — Director General al Administraţiei Comerciale a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Str. Wilson, 13 etaj 4. Bucureşti 1.
181	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer-Şef. — Profesor şi Subdirector al Şcoalei Superioare de Arte şi Meserii din Bucureşti. — Str. Polizu, 11. Bucureşti 2.
182	1923, Mart. 26	VASILESCU GR. Inginer-Şef. Doctor al Academiei de Inalte Studii Comerciale şi Industriale din Bucureşti. — Subdirector la Serv. Maritim Român. Asistent şi Profesor suplinitor la Catedra de Navigaţie interioară şi maritimă dela Şcoala Politehnică din Bucureşti.—Str. Lt. Aviator Drossu, 4. (Parcul Domeniilor), Bucureşti 2.
183	1920, Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Şef.—Str. Aviator Ştefan Protopopescu, 36. Bucureşti 2.

184	1932, Apr. 20	VASILIU GH. DAN. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti.—Inginer la Monitorul Oficial.—B-dul Schitu Măgureanu, 47. Bucureşti 1. (Telefon 3-6332).
185	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Inginer de mine şi geodez. — Antreprenor autorizat de Direcţia Cadastrului pentru Geodezie, Cadastru şi Comasare. Asistent supl. la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Cartierul Grant C. F. R. Str. D, 51. Bucureşti 2.
186	1925, Aug. 26	VASILIU M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 4.
187	1936, Febr. 27	VICIU A. A. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Militar din Tg.-Mureş. — Str. Aug. Tr. Laurian, 7. Tg.-Mureş.
188	1933, Febr. 22	WOINAROSKY R. Licenţiat în Matematici.—Str. Manu Cavafu, 16. Bucureşti 5.
189	1924, Ian. 30	ZAMFIRESCU C. GRIGORE. Inginer, Diplomat S. N. P. S. Bucureşti 1920 şi E. S. A. Paris 1921.—Proprietarul fabricei de avioane „SET". — Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — B-dul Ferdinand, 168. Bucureşti 4. (Telefon 2-3666 domiciliu, 2-5074 birou).
190	1920, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie dela Universitatea din Berlin. — Conferenţiar la Facultatea de Litere şi Filosofie din Bucureşti Str. Maior Ene, 12. (A. N. E. F.) Bucureşti 6.
191	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. Lt.-Comandor Aviator. Inginer diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică şi Construcţii Mecanice din Paris.— Comandant-secund al Şcolii de Ofiţeri de Aviaţie „Regele Carol II". — Str. Sf. Elefterie, 18. Bucureşti.
192	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich.— Antreprenor. — B-dul Elisabeta, 57. Bucureşti 2.

†

MEMBRII DECEDAŢI*)

	Data admiterii	Data morţii
1. MIREA N. ŞT.	1909 Iunie 1	1932 Ian. 15
2. PATRICIU G. TITUS	1911 Decemvrie 17	1937 Ian. 5
3. POPESCU I.	1922 August 31	1936 Sept. 20
4. ROCO M.	1895 Sept. 15 (fondator)	1931 Ian. 5

*) Aci sunt trecuţi în ordinea alfabetică numai redactorii şi membrii decedaţi în ultimii 7 ani şi cari au stat la „*Gazeta Matematică*" până la sfârşitul vieţii lor.

SUPRAFAȚĂ DE REVOLUȚIE APLICABILĂ PE ALTA ASEMENEA EI.

La courbe, dont l'équation sémi-intrinsèque est $y = as^m$, *donne naissance, par rotation autour de ox, à une surface applicable sur une autre semblable à elle.*

Sunt cunoscute [1]) proprietățile curbei date în coordonate semi-intrinsece prin relația

(1) $$y = as^m$$

între ordonată și arcul corespunzător al curbei. Observăm numai că, variind parametrul a, obținem curbe homotetice. Prin ecuația (1) sunt reprezentate multe curbe remarcabile, spre exemplu cicloida ($m = 2$), parabola semi cubică ($m = 2/3$), astroida ($m = 3/2$).

In cele ce urmează, arătăm că suprafața de revoluție, născută prin învârtirea curbei (1) în jurul lui ox, este aplicabilă pe suprafața de revoluție asemenea acesteia, născută prin învârtirea curbei

(2) $$y = a_1 s^m .$$

Se știe că, dacă două suprafețe de revoluție sunt aplicabile una pe alta, paralelele lor se corespund. Aceasta din pricină că paralelele sunt curbe de curbură totală constantă care, comform teoremului lui GAUSS, rămâne invariabilă la încovoiere.

Elementul de arc de meridian fiind ds, iar cel de paralel $yd\omega$, elementul $d\sigma$ de arc pe suprafața născută de (1) va fi dat de

(3) $$d\sigma^2 = ds^2 + a^2 s^{2m} d\omega^2 .$$

Să luăm paralela $s = 0$, pe suprafața născută de (2), corespunzând paralelei $s = 0$ pe suprafața dată de (1). Atunci elementul $d\sigma_1$ de arc pe această suprafață e dat de

(4) $$d\sigma_1^2 = ds^2 + a_1^2 s^{2m} d\omega_1^2 .$$

Punând $$\omega_1 = \frac{a}{a_1}\omega,$$

cele două elemente de arc date de (3) și (4) devin identice și deci suprafețele sânt aplicabile.

---

1) Vezi: GINO LORIA. Spezielle ebene Kurven. Bd. II. 2-Le Auflage, 1911. Abschnitt VII. Kap. 1. No. 246.

Prin urmare, dacă tăiem din (adăogăm la) suprafaţa de revoluţie o porţiune cuprinsă între două meridiane şi lipim apoi noile margini, obţinem o suprafaţă asemenea primei.

Se poate vedea încă, că suprafaţa dată de (1) este singura cu această proprietate.

A. MYLLER.

CONSIDERAŢIUNI PRACTICE LA ALCĂTUIREA ŞI REZOLVAREA PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ.

(Urmare *).

IV. *Adaptarea formulelor pentru calcule.* Formulele, care se dau sau se stabilesc în tratatele de matematici pure şi aplicate, se lasă deseori sub forma care iese din teorii sau din demonstraţiuni, fără a se avea în vedere aplicarea lor la calcule practice. Adaptarea lor în acest scop o face calculatorul, inginerul, ofiţerul, etc. care are de aplicat deseori unele formule; ele, astfel transformate, au pătruns în călăuze alcătuite pentru uzul diferitelor specialităţi. Cum însă de multe ori geometria, mecanica, etc. se învaţă şi pentru plicaţiunile lor practice, ar trebui ca în tratatele de matematici pentru profesionişti, cel puţin, să se dea şi forma sub care e bine să se utilizeze formulele în practică.

La adaptarea formulelor pentru calculele practice, trebuesc avute în vedere mai multe consideraţiuni.

1. *Formula să conţină elementele date direct de practică.* Astfel pentru calculul ariei unui cerc se dă deseori direct în practică diametrul lui, iar nu raza, ca de exemplu la vergelele de fier. Dacă deci S este aria cercului, r raza lui, d diametrul, cum $r = \frac{1}{2} d$, vom avea:

1) $$S = \pi r^2 = \tfrac{1}{4} \pi d^2 .$$

Tot aşa de exemplu, dacă unei sfere îi cunoaştem diametrul d, volumul ei V va fi dat de formula

2) $$V = \pi d^3 / 6.$$

*) A se vedea *Gazeta Matematică*, Anul XXXVIII, pag. 44.

2. *Să se reducă coeficienţii şi mărimile constante din formulă.*

Dacă în formulele (1) şi (2) înlocuim pe π, — şi anume se presupune că pentru nevoile noastre ar fi de ajuns a lua $\pi = 3{,}1416$, — atunci formulele precedente devin:

1') $S = 0{,}7854\, d^2$, 2') $V = 0{,}5236\, d^3$.

Se reduce cu modul acesta efectuarea unei înmulţiri la calculul practic.

Acelaşi lucru îl facem dacă în formulă intră mărimi constante. Astfel greutatea unei vergele de oţel de lungime l, de diametru d, de densitatea 7,85, este dată de:

3) $G = \frac{1}{4}\pi d^2 l \times 7{,}85 = 6{,}16534\, d^2 l$.

In asemenea cazuri, însă formula pierde omogenitatea ei fizică şi atunci nu trebuesc uitate unităţile în care trebuesc exprimate mărimile din formulă. In cazul de faţă, exprimând l şi d în cm., găsim G în grame; exprimându-i în m, găsim G în tone.

Este evident că putem lua constantele cu oricâte zecimale voim, căci calculul noilor coeficienţi se face odată pentru totdeauna. Aşa de exemplu, dacă în formula pendulului luăm $\pi = 3{,}141592\ldots$, $g = 9{,}81$, găsim:

4) $t = \pi \sqrt{l/g} = (\pi/\sqrt{g}) \cdot \sqrt{l} = 1{,}0030033\, \sqrt{l}$,

cu care se poate calcula uşor t când se dă l. Cum pe g l'am pus în cm/sec^2 reiese că trebue să înlocuim pe l în cm. şi găsim t în secunde. Cum se vede aci, după găsirea lui $\sqrt{l}$, totul se reduce la o înmulţire a lui cu 3 şi o adunare, restul fiind repetări de numere.

3. *Să se înlocuiască împărţirile dificile prin înmulţiri.*

Să presupunem că cunoaştem lungimea unui cerc şi ni se cere diametrul lui, caz care se iveşte la calcularea diametrelor copacilor. Fie c lungimea cercului şi d diametrul. Avem:

5) $c = \pi d$, $\therefore\ d = c/\pi = (1/\pi) \times c = 0{,}31831 c$.

Tot aşa, dacă ni s'ar cere diametrul unui cerc de o anumită suprafaţă, din (1) scoatem:

6) $d = 2\sqrt{S}/\sqrt{\pi} = 1{,}1284\, \sqrt{S}$.

4. *Să se pună coeficienţii sub forme uşor de calculat.* Fie γ numărul de grade al unui arc de ρ radiani. Avem relaţia:

7) $\gamma = (180/\pi)\rho = 57{,}2957795\, \rho$.

Coeficientul este complicat, mai ales dacă nu se cere mare aproximaţiune. Ca să uşurăm calculele, observăm că $57{,}2957795 \times 7 = 401{,}0704565$. Cu modul acesta, putem înlocui coeficientul lui ρ, la o primă aproximaţiune cu $401/7$, care cere numai o înmulţire cu 4 şi o împărţire cu 7 în loc de înmulţiri cu cifre diferite 5, 7, 2, 9; iar dacă e nevoie de o aproximaţiune mai mare, mai adunăm la rezultat $0{,}01\sqrt{S}$ care se obţine prin o deplasare de virgulă. Cum se pot descoperi asemenea factori de simplificare ca 7 în cazul de faţă? Se transformă fracţia în fracţie continuă şi se vede dacă nu e una din redusele dela început, care să dea aproximaţia dorită.

5. *Să se reducă numărul operaţiunilor aritmetice.* In inginerie se întâlnesc formule de forma:

$$a = \alpha b^2 c^2 / d^2,$$

în care α e o constantă; b, c, d variabile. In acest caz ar trebui să facem trei ridicări la patrat, aplicând direct formula de mai sus, apoi două înmulţiri şi o împărţire. Dacă scriem însă formula astfel:

$$a = \alpha (bc/d)^2,$$

atunci avem o singură ridicare la patrat şi o înmulţire şi împărţire, de regulă cu numere mai mici. De multe ori e mai avantajos de a calcula pe $\sqrt{\alpha}$ şi a scrie formula astfel:

$$a = (\sqrt{\alpha}\, bc/d)^2.$$

6. *Să se adapteze formulele pentru utilizarea tabelelor numerice.*

Ca să aplicăm formula (2') am putea căuta pe d^3 în tabela de cuburi şi apoi să-l înmulţim cu 0,5236. E mai practic însă să scriem formula astfel:

$$2'') \qquad V = (\sqrt[3]{0{,}5236}\, d)^3 = (0{,}806\, d)^3,$$

căci înmulţirea cu 0,806 e mai uşoară şi se face cu un număr mai mic, iar produsului i se caută cubul în tabele de cuburi.

Să presupunem că ni s'ar cere greutatea unor tabele patrate de latura a, de grosimea c şi de densitatea oţelului 7850 kg/m^3.

Formula ar fi:

$$G = 7850\, a^2 c.$$

Observăm că dacă avem tabele de ariile cercului, calculate cu $\pi = 3{,}14$, atunci $\pi/4 = 0{,}7850$ şi prin urmare formula se poate scrie:

$$G = 10000\,(\pi d^2/4)\,.\,c$$

aşa că paranteza se poate lua din tabele ce dau aria cercului. De regulă tabelele se calculează cu valori mai exacte ale lui π. Se pot şi atunci utiliza tabelele pentru calcule aproximative, mai ales că în practică grosimile nu sunt perfect aceleaşi, nici lungimile *a* perfect date, în plus că densitatea 7850 este o valoare medie.

7. *Formulele să se adapteze mijloacelor de calcul.*

Arătarăm mai sus cum se pot adapta formulele pentru utilizarea tablelor numerice. Tot aşa e necesar să se dea formulelor astfel de forme încât să fie uşor calculabile cu logaritmi, cu maşini de calcul, cu rigle de calcul. In Trigonometrie se dau exemple de cum se pot transforma formulele pentru ca să se poată face calcule logaritmice. Aci voiu spune câteva cuvinte despre adaptarea formulelor pentru calcule cu rigla de calcul, instrument de care se servesc şi lucrătorii în unele fabrici.

Tipurile de formule care se pot calcula cu rigla de calcul, prin o singură mişcare a liniuţei, sunt:

$$(\alpha) \qquad A/a = B/b, \qquad\qquad (\alpha') \qquad A\,.\,a = B\,.\,b$$

$$(\beta) \qquad A/a^2 = B/b^2, \qquad\qquad (\beta') \qquad Aa^2 = Bb^2\,.$$

Formulele din rândul întâiu se calculează cu *scara simplă*, celelalte cu *scara patratelor*. Formulele din coloana întâia se calculează cu *liniuţa directă*, celelalte cu *liniuţa inversă*. Cantităţile despărţite prin linia de fracţie se corespund pe linie şi liniuţă.

O formulă dată se va pune sub una, sau mai multe din formele de mai sus, spre a fi calculată prin rigla de calcul. Astfel formula (1), pentru aria cercului, se poate pune sub forma (β'):

$$S\,.\,2^2 = \pi\,.\,d^2,$$

aşa că punând pe *d* de pe scara patratelor în dreptul lui π (care are pe multe rigle un semn) de pe scara simplă, în dreptul lui 2 de pe scara patratelor citim pe S, liniuţa fiind inversată. Sau, dacă se cere *d* cunoscând S, aducem pe 2 de pe scara patratelor în dreptul lui S de pe scara simplă, şi în dreptul lui π de pe scara simplă citim pe *d* pe scara patratelor. Formula (1') se poate scrie:

$$S\,.\,1^2 = 0{,}7854\,.\,d^2,$$

adică sub forma (β'). O putem pune şi sub forma (α), dacă observăm că inversul lui 0,7854 este $4/\pi = 1{,}2732$:

$$S/d = d/1{,}2732.$$

Formula se aplică imediat dacă se cere S; altfel prin încercări se aşează linia faţă de liniuţă aşa ca lui S de pe linie şi lui 1,2732 de pe liniuţă să corespundă acelaşi număr, care este *d*. Formula (2') se adaptează pentru riglă, observând că $\sqrt{1/0{,}5236} = \sqrt{6/\pi} = 1{,}382$ şi deci avem:

$$V \,.\, 1{,}382^2 = d \,.\, d^2,$$

care este forma (β'). Prin aceasta V se găseşte direct iar *d*, când se dă V, prin încercări.

Formula care dă lungimea cercului, când se cunoaşte diametrul, se poate pune sub formele:

$$c/\pi = d/1, \quad \text{sau} \quad d/0{,}3183 = c/1,$$

care sunt de forma (α).

Aria S a cercului în funcţiune de lungimea lui *c* se poate scrie astfel:

$$S/c^2 = 1/3{,}545^2,$$

care este forma (β).

Aria elipsei S când se cunosc axele *a* şi *b*, se poate găsi cu rigla prin formula:

$$S/a = b/1{,}273,$$

care e de forma (α).

Formula pendulului se poate pune sub forma:

$$g \,.\, t^2 = l \,.\, \pi^2 \quad \text{sau} \quad g/\pi^2 = 1/t^2,$$

adică sub formele (β') şi (β).

Pentru unele rigle speciale, ca rigla BÉGHIN, care dă dintr'odată produsul a trei numere, se pot adapta calculului lor formule şi mai complicate.

Din cele arătate până aci se vede că există o mare varietate de mijloace de a adapta formulele pentru calculele practice şi că nu se pot da reguli precise în această privinţă. Depinde de perspicacitatea calculatorului şi de cunoştinţele lui matematice ca să facă adaptări cât mai proprii pentru a uşura calculele şi a le mări preciziunea.

I. IONESCU.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1938

Adunarea generală a Societăţii *Gazeta Matematică* a hotărît, în şedinţa dela 27 August a. c. ţinerea unui concurs de matematici în cursul anului 1938 între elevii liceelor, civile şi militare, din ţară şi între elevii anului preparator al Şcoalei Politehnice „Regele Carol II“.

Concursul va avea loc după Paşti înainte de reînceperea cursurilor, în Bucureşti, unde se va da examen înscris şi oral, dacă Societatea va dispune de mijloace de a aduce candidaţii; dacă vor lipsi aceste mijloace, concursul se va ţine într'o duminică din luna Mai, în diferite centre din ţară, dându-se numai teze.

Deciziunea în această privinţă se va publica în numărul din Februarie 1938.

Fiecare candidat este obligat să se înscrie *la două din materiile clasei sale,* urmând a da, la fiecare, teză, iar în cazul ţinerii concursului în Bucureşti, şi oral.

Pentru unitatea pregătirii, se va publica în numărul din Octomvrie al *Gazetei Matematice* un program, conţinând materia pe care candidatul unei anume clase va trebui să o pregătească pentru obiectul la care e înscris.

Sub niciun motiv candidatul nu va fi scuzat de nepregătirea unor capitole trecute în programul clasei sale, pentru obiectul ales.

Cererile de înscriere se vor trimite direct de candidaţi Societăţii Gazeta Matematică, Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2, în plicuri recomandate până cel mai târziu la 31 Decemvrie 1937.

Nu se primesc cereri trimise de părinţi, corespondenţi, profesori sau şcoli.

Cererile vor arăta neapărat, numerotate şi în ordinea arătată aci, următoarele date:

1. Numele şi pronumele, scrise clar.

2. Clasa sau anul pregătitor în care urmează candidatul. Pentru cei pregătiţi în particular se va arăta şcoala la care a urmat anul precedent sau în care a depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă.

3. Adresa în timpul şcoalei şi în timpul vacanţei Paştilor pentru a se putea face comunicările şi înştiinţările necesare.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni în Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi întreţinut aci în timpul concursului, sau dacă unul din aceste mijloace ar urma să fie procurat de Societatea *Gazeta Matematică.*

Dacă are nevoie de bani pentru drum va indica şi gara de unde va lua trenul pentru a veni în Bucureşti şi gara la care se întoarce după concurs.

5. Cele două materii la care se înscrie.

6. Activitatea sa la *Gazeta Matematică, Suplimentul cu exerciţii al Gazetei Matematice,* sau la alte reviste din ţară şi străinătate.

Candidaţii înscrişi la concurs, dacă din diferite motive nu se mai pot prezenta, sunt obligaţi să anunţe din timp.

Părăsirea sălilor de concurs înscris este interzisă înainte de predarea tezelor.

Se atrage atenţiunea că toate condiţiunile, pentru înscriere şi ţinerea concursului, trebuesc respectate cu toată exactitatea inerentă ştiinţelor matematice.

In numărul 6 din Februarie 1938 al *Gazetei Matematice* se va publica modul de ţinere al concursului, localitatea, orele de prezentare şi numele candidaţilor admişi la concurs.

Numărul celor admişi va depinde de sacrificiile materiale ce se vor cere Societăţii *Gazeta Matematică,* pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor şi de pregătirea pe care aceştia vor arăta-o în cererile ce vor face.

Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi ulterior diplome, recompense, premii sau menţiuni. Primul care va reuşi la concurs, dintre elevii anului preparator de pe lângă Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti, va primi premiul «ANGHEL SALIGNY» (de 1000 lei) oferit de un membru al Societăţii noastre, iar primul reuşit dintre toţi candidaţii va primi premiul «LT.-COL. G. TĂNĂSESCU» în cărţi, în conformitate cu înştiinţarea făcută în acest număr la articolul: *Premii, donaţiuni şi alte dispoziţiuni ale fondurilor Gazetei Matematice.*

Comisiunea examinatoare se va compune din membrii Societăţii *Gazeta Matematică,* cari nu vor avea rude printre candidaţii admişi la concurs.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

PREMII, DONAŢII ŞI ALTE DISPOZIŢII ALE FONDURILOR SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ"

1. Premiul „INGINER H. CAPRIEL", pentru lucrări de matematici superioare, pure sau aplicate, care se acordă din doi în doi ani, a fost anunţat pentru anul 1937—1938, în No. 11 din Iulie 1937 al *Gazetei Matematice.* Lucrările concurenţilor se vor trimite Societăţii până la 1 Iulie 1938.

2. Premiul anual „VASILE CONTA" pentru lucrări originale de filosofia matematicilor, se acordă pentru lucrări aduse la cunoştiinţa Societăţii până la 1 Iulie. Autorii trebue să fie români şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului, se publică în numărul din Noemvrie al *Gazetei Matematice.*

Pentru anul 1936—1937, premiul nu s'a acordat, neprimindu-se nicio lucrare care să îndeplinească condiţiile pentru a fi premiată, după cum se arată în raportul publicat în No. 3 din Noemvrie 1936 al *Gazetei Matematice.*

3. Premiul anual „General SCARLAT PANAITESCU" se acordă pentru cea mai bună lucrare de matematică aplicată la ştiinţele militare, publicată sau trimisă în manuscris Societăţii în cursul anului expirat. Autorii trebue să fie români, sau să-şi fi făcut cultura matematică în ţară. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului, se publică în numărul din Octombrie al *Gazetei Matematice.*

Pentru anul 1935—1936, premiul a fost acordat *Revistei Geniului,* după cum se arată în raportul publicat în No. 2 din Octomvrie 1936 al *Gazetei Matematice.*

4. Premiul anual „VASILE CRISTESCU" se acordă pentru cel mai bun articol, referitor la geometria triunghiului sau la trigonometrie, dintre cele publicate în *Gazeta Matematică* în ultimul volum apărut. Autorul trebue să fie elev de liceu, de şcoală militară, de şcoală politehnică sau student de facultate.

Premiul a fost acordat, pentru anul 1935—1936, elevului ILIE ION ŢIŢEICA din clasa VII-a a Liceului militar Mânăstirea Dealu, după cum se arată în raportul publicat în No. 10 din Iunie 1937 al *Gazetei Matematice.*

5. Din venitul fondului „ANGHEL SALIGNY“ şi alte sume se publică cărţi tehnice în Biblioteca Tehnică a *Gazetei Matematice.* Manuscrisele se adresează delegaţiei Societăţii. Nu se iau în considerare decât lucrările complete de matematici aplicate sau cu cuprins tehnic în legătură cu aceste ştiinţe.

Regulamentul acestui fond determină şi drepturile autorului.

6. Din venitul fondului „SPIRU HARET“ se cumpără cărţi de matematici pure şi aplicate, aparate sau modele necesare învăţământului matematic, care se donează bibliotecilor şcolare de la şcolile secundare sau corespondenţilor meritoşi, elevi ai acestor şcoli şi se distribue între începutul anului şcolar şi vacanţa Crăciunului.

Pentru anul 1935—1936, potrivit hotărîrii Adunării Generale de la 25 August 1936, s'a donat *Liceului de fete din Târgovişte* următoarele publicaţii ale *Gazetei Matematice:* un volum jubiliar; un volum, colecţia anului XLI; un volum, *Culegerea de probleme de Geometrie* de GH. ŢIŢEICA.

7. Din venitul fondului „LT.-COLONEL GH. A. TĂNĂSESCU“ în anul 1936—1937, s'au cumpărat cărţi, care s'au donat elevului ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE, din clasa VII-a a Liceului militar Mânăstirea Dealu, clasificat întâiul la concursul din acest an al *Gazetei Matematice.*

8. In *„Biblioteca Gazetei Matematice“*, s'au tipărit în acest an, cu ajutorul *„Fondului Publicaţiilor“ : Lecţiuni de Algebră Superioară,* ediţia VI-a, revăzută şi adăogită conform noilor programe, pentru clasa VIII-a Ştiinţifică de N. ABRAMESCU şi *Culegere de probleme de aritmetică,* Vol. I. ediţia II-a de I. IONESCU.

De asemenea se găsesc sub tipar:

Culegere de probleme de Algebră, Vol. I şi II, ediţia IV-a, de A. G. IOACHIMESCU, revăzută şi adăogită.

Culegere de Probleme de Trigonometrie, partea II-a, de V. CRISTESCU, revăzută şi adăogită de către GH. TH. GHEORGHIU.

COMISIUNEA PENTRU CONTROLUL FONDURILOR
SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

Ing. D. STOICA şi Ing. D. STAN.

NOTE MATEMATICE

1. *Aritmetica lui* AMPÈRE. Printre manuscrisele rămase dela AMPÈRE, este şi unul intitulat „*Précis élémentaire d'arithmétique*". In „*Bulletin de la Société des amis d'*ANDRÉ-MARIE AMPÈRE", No. 8 Iunie 1937, D-l MARCEL MATHIEU face o dare de seamă a preocupărilor de ordin aritmetic ale lui AMPÈRE. Iată aci un rezumat al acestui articol.

In 1801 GAUSS tipărise monumentala lui operă „*Disquisitiones arithmethicae*" pe care AMPÈRE şi-o procurase. Printre chestiunile tratate acolo era şi cea a înscrierii poligoanelor regulate numai cu rigla şi cu compasul. El arăta, pentru prima dată, că în afară de soluţiunile vechi rămase dela EUCLIDE, se mai pot înscrie şi poligoanele de n laturi egale dacă n este un număr prim de forma $\left(2^{2^m}+1\right)$. Pentru $m=2$ se obţine $n=17$. AMPÈRE dă pentru poligonul regulat de 17 laturi o construcţiune geometrică pe care a prezentat-o Academiei de Ştiinţe la 14 Septemvrie 1835. Aceasta este una dintre ultimele lui lucrări.

Intre manuscrisele rămase mai sunt şi unele foi din care se vede că AMPÈRE a încercat şi soluţia grafică a poligonului de 257 laturi ($m=3$), precum şi o soluţiune pentru cazul general. Cu chestiunile acestea s'au ocupat mai târziu alţi matematicieni.

MATHIEU observă că AMPÈRE a debutat prin o comunicare asupra cercului la Academia din Lyon, anume rectificarea unui arc de cerc mai mic ca un semicerc, şi a terminat cu aceea de care vorbirăm la Academia din Paris. Se poate dar spune că după o activitate imensă în domeniul ştiinţific, AMPÈRE a închis ciclul preocupărilor sale !

I. IONESCU.

2. *Asupra problemelor 1284 şi 3605.*

Enunţul problemei 3605, soluţionată la pag. 149, 150. G. M. XXXV, se poate deduce din enunţul problemei 1284 propusă de D-l I. IONESCU şi soluţionată la pag. 149, 150 G. M. XIV.

Intr'adevăr, nu avem decât, ca în figura de la pag. 150, vol. XXXV să considerăm punctele A şi B, ca cele 2 puncte mobile

din problema 1284, pentru ca punctele M şi M' al căror loc se cere în problema 3605, să fie proiecţiile fiecărui punct mobil pe diametrul ce trece prin celălalt, proecţii al căror loc se cere în problema 1284.

COL. G. I. LITEANU.

3. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). Pentru $p = 3$ şi N_p începând cu 1, am găsit următoarele 274 soluţiuni ale ecuaţiei

$$p \times N_p = N.$$

N_3	N	N_3	N
104 759 862	0 314 279 586	107 254 986	0 321 764 958
104 765 289	0 314 295 867	107 264 895	0 321 794 685
104 876 529	0 314 629 587	107 285 649	0 321 856 947
104 892 765	0 314 678 295	107 286 549	0 321 859 647
104 897 526	0 314 692 578	108 496 572	0 325 489 716
104 897 625	0 314 692 875	108 497 256	0 325 491 763
104 928 765	0 314 786 295	108 549 726	0 325 649 178
104 975 862	0 314 927 586	108 562 497	0 325 687 491
104 985 762	0 314 957 286	108 564 729	0 325 694 187
104 987 526	0 314 962 578	108 564 927	0 325 694 721
104 987 625	0 314 962 875	108 596 472	0 325 789 416
105 248 976	0 315 746 928	108 625 497	0 325 876 491
105 276 489	0 315 829 467	108 649 572	0 325 948 716
105 749 862	0 317 249 586	108 654 729	0 325 964 187
105 974 862	0 317 924 586	108 654 927	0 325 964 781
105 984 762	0 317 954 286	108 659 472	0 325 978 416
106 249 875	0 318 749 625	108 724 965	0 326 174 895
106 475 289	0 319 425 867	108 947 265	0 326 841 795
106 487 529	0 319 462 587	108 952 647	0 326 857 941
106 489 275	0 319 467 825	108 964 725	0 326 894 175
106 492 875	0 319 478 625	108 965 247	0 326 895 741
106 527 489	0 319 582 467	109 285 647	0 327 856 941
107 248 965	0 321 746 895	109 286 547	0 327 859 641
107 249 856	0 321 749 568	109 486 572	0 328 459 716

1) Urmare la nota cu acelaşi titlu dela pag. 633 Vol. XLII.

N_3	N	N_3	N
109 487 265	0 328 461 795	124 987 506	0 374 962 518
109 526 487	0 328 579 461	124 987 605	0 374 962 815
109 586 472	0 328 759 416	125 048 976	0 375 146 928
109 648 572	0 328 945 716	125 089 647	0 375 268 941
109 648 725	0 328 946 175	125 096 487	0 375 289 461
109 652 487	0 328 957 461	125 470 986	0 376 412 958
109 658 472	0 328 975 416	125 486 097	0 376 458 291
109 724 856	0 329 174 568	125 497 086	0 376 491 258
109 847 256	0 329 541 768	125 608 497	0 376 825 491
109 854 726	0 329 564 178	126 085 497	0 378 256 491
109 856 247	0 329 568 741	126 098 547	0 378 295 641
109 862 547	0 329 587 641	126 470 895	0 379 412 685
120 485 976	0 361 457 928	126 487 095	0 379 461 285
120 497 586	0 361 492 758	126 489 507	0 379 468 521
120 498 576	0 361 495 728	126 495 087	0 379 485 261
120 574 986	0 361 724 958	126 508 947	0 379 526 841
120 584 976	0 361 754 928	127 085 649	0 381 256 947
120 597 486	0 361 792 458	127 086 549	0 381 259 647
120 598 476	0 361 795 428	127 489 065	0 382 467 195
120 849 657	0 362 548 971	127 506 489	0 382 519 467
120 864 957	0 362 594 871	127 648 905	0 382 946 715
120 865 947	0 362 597 841	127 650 489	0 382 951 467
120 948 657	0 362 845 971	128 564 709	0 385 694 127
120 958 647	0 362 875 941	128 564 907	0 385 694 721
120 964 857	0 362 894 571	128 654 709	0 385 964 127
120 965 847	0 362 897 541	128 654 907	0 385 964 721
124 708 965	0 374 126 895	128 750 649	0 386 251 947
124 856 097	0 374 568 291	128 764 905	0 386 294 715
124 870 965	0 374 612 895	128 765 049	0 386 295 147
124 896 507	0 374 689 521	128 904 765	0 386 714 295
124 897 506	0 374 692 518	128 906 475	0 386 719 425
124 897 605	0 374 692 815	129 064 875	0 387 194 625
124 965 087	0 374 895 261	129 085 647	0 387 256 941
124 970 856	0 374 912 568	129 086 547	0 387 259 641
124 985 607	0 374 956 821	140 579 862	0 421 739 586

N_3	N	N_3	N
140 597 862	0 421 793 586	152 879 064	0 458 637 192
140 652 789	0 421 958 367	157 098 462	0 471 295 386
140 652 879	0 421 958 637	157 209 846	0 471 629 538
142 057 986	0 426 173 958	157 984 062	0 473 952 186
142 059 786	0 426 179 358	158 460 972	0 475 382 916
142 789 065	0 428 367 195	158 462 097	0 475 386 291
145 089 726	0 435 269 178	159 708 462	0 479 125 386
145 098 726	0 435 296 178	159 720 846	0 479 162 538
145 260 897	0 435 782 691	159 784 062	0 479 352 186
145 260 987	0 435 782 961	159 786 042	0 479 358 126
145 720 986	0 437 162 958	159 846 072	0 479 538 216
145 860 972	0 437 582 916	159 846 207	0 479 538 621
145 862 097	0 437 586 291	160 579 842	0 481 739 526
145 972 086	0 437 916 258	160 845 972	0 482 537 916
145 986 072	0 437 958 216	160 984 572	0 482 953 716
145 986 207	0 437 958 621	160 987 245	0 482 961 735
146 085 972	0 438 257 916	162 059 784	0 486 179 352
146 098 572	0 438 295 716	162 084 597	0 486 253 791
146 098 725	0 438 296 175	162 098 457	0 486 295 371
146 209 857	0 438 629 571	162 450 897	0 487 352 691
146 250 897	0 438 752 691	162 450 987	0 487 352 961
146 250 987	0 438 752 961	164 052 789	0 492 158 367
146 507 289	0 439 521 867	164 052 879	0 492 158 637
146 508 729	0 439 526 187	164 278 905	0 492 836 715
146 508 927	0 439 526 781	164 507 289	0 493 521 867
146 509 287	0 439 527 861	164 508 729	0 493 526 187
146 527 089	0 439 581 267	164 508 927	0 493 526 781
146 528 709	0 439 586 127	164 509 287	0 493 527 861
150 642 789	0 451 928 367	164 527 089	0 493 581 267
150 642 879	0 451 928 637	164 528 709	0 493 586 127
150 897 246	0 452 691 738	165 042 879	0 495 128 637
150 987 246	0 452 961 738	170 946 582	0 512 839 746
152 460 897	0 457 382 691	170 964 582	0 512 893 746
152 460 987	0 457 382 961	170 982 456	0 512 947 368
152 789 064	0 458 367 192	172 094 658	0 516 283 974

N_3	N	N_3	N
172 096 458	0 516 289 374	180 964 572	0 542 893 716
172 456 098	0 517 368 294	180 972 456	0 542 917 368
172 546 098	0 517 638 294	182 045 976	0 546 137 938
174 598 206	0 523 794 618	182 057 964	0 546 173 892
174 605 982	0 523 817 946	182 059 746	0 546 179 238
175 980 462	0 527 941 386	182 094 657	0 546 283 971
175 982 046	0 527 946 138	182 096 457	0 546 289 371
176 204 598	0 528 613 794	182 456 097	0 547 368 291
178 056 429	0 534 169 287	182 546 097	0 547 638 291
178 059 642	0 534 178 926	182 790 564	0 548 371 692
178 065 429	0 534 196 287	182 790 654	0 548 371 962
178 065 942	0 534 197 826	190 564 278	0 571 692 834
178 205 964	0 534 617 892	190 654 278	0 571 972 834
178 290 564	0 534 871 692	192 780 564	0 578 341 692
178 290 654	0 534 871 962	192 780 654	0 578 341 962
179 056 428	0 537 169 284	194 206 578	0 582 619 734
179 065 428	0 537 196 284	194 657 082	0 583 971 246
179 280 564	0 537 841 962	194 657 208	0 583 971 624
179 280 654	0 537 841 962	194 658 072	0 583 974 216
179 406 582	0 538 219 746	195 780 642	0 587 341 926
179 420 658	0 538 261 974	195 782 064	0 587 346 192
179 580 642	0 538 741 926	196 405 782	0 589 215 346
179 640 582	0 538 921 746	196 420 578	0 589 261 734
179 642 058	0 538 926 174	196 457 082	0 589 371 246
179 804 256	0 539 412 768	196 457 208	0 589 371 624
179 805 426	0 539 416 278	196 458 072	0 589 374 216
179 805 624	0 539 416 872	196 578 042	0 589 734 126
179 824 056	0 539 472 168	197 082 456	0 591 247 368
179 825 406	0 539 476 218	197 245 608	0 591 736 824
179 825 604	0 539 476 812	197 254 608	0 591 763 824
179 826 054	0 539 478 162	197 458 206	0 592 374 618
180 564 279	0 541 692 837	197 460 582	0 592 381 746
180 597 462	0 541 792 386	197 462 058	0 592 386 174
180 657 942	0 541 973 826	197 580 462	0 592 741 386
180 946 572	0 542 839 716	197 582 046	0 592 746 138

N_3	N	N_3	N
197 604 582	0 592 813 746	197 826 054	0 593 478 162
197 620 458	0 592 861 374	198 045 762	0 594 137 286
197 804 256	0 593 412 768	198 057 462	0 594 172 386
197 805 426	0 593 416 278	198 072 456	0 594 217 368
197 805 624	0 593 416 872	198 204 576	0 594 613 728
197 824 056	0 593 472 168	198 205 746	0 594 617 238
197 825 406	0 593 476 318	198 245 607	0 594 736 821
197 825 604	0 593 476 812	198 254 607	0 594 763 821

Se vede că la toate aceste soluţiuni N este numai formal număr de 10 cifre. Soluţiunile din acest tabel convin problemei prin care *se cere un număr de 9 cifre diferite între ele şi diferite de 3, care înmulţit cu 3 să dea ca produs un număr format din cele 9 cifre semnificative întrebuinţate o singură dată fiecare.*

(Va urma) G-L GH. BUICLIU.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXIV. Fascicola I. Iulie 1937. Buenos-Aires. Conturi şi selecţie economică de M. DURRIEU. Relaţii de caracter ordinal între forme fundamentale de prima speţă de E. A. de CESARE.

Buletinul „I. R. E.“. Institutul român de energie. An. V. No. 2. Iunie 1937. Contribuţiuni la calculul teoretic al încălzirii conductorilor la scurt circuit de Ing. A. AVRAMESCU.

Mathesis. Tom. LI. No. 5—6. Mai-Iunie 1937. Bruxelles. Asupra elipselor şi hiperbolelor înscrise unui triunghiu de R. DEAUX. Exagoane speciale înscrise unei circonferinţe de V. THÉBAULT. Asupra câtorva cubice analagmatice ale triunghiului de R. GOORMAGHTIGH. Asupra geometriei triunghiului de P. DELENS. Câteva triunghiulare remarcabile de G. FISTIÉ. Poligoane convexe şi echiunghiuri înscrise unei circonferinţe de V. THÉBAULT. Asupra geometriei tetraedrului de N. ALTSHILLER-COURT.

Revista Matematică din Timişoara. An. XVII. No. 6. 15 August 1937. Două teoreme relative la teoria diferenţelor de E. VIŞA.

Asupra sferelor lui ROBERTS, de V. THÉBAULT (supliment la Mathesis).

Asupra figurei de echilibru a unei mase fluide eterogene în rotaţie de A. GARDEDIEU.

Société mathématiques de France. *Comptes rendus des séances.* An. 1936. Paris.

Sur l'intégrale de M. DENJOY de TH. ANGHELUTZA, (extras din Mathematica).

Sur une propriété qui caractérise la transformation conforme de TH. ANGHELUTZA (extras din comptes rendus des séances de l'Académie des sciences).

Nouvelle Méthode pour construire et dénombrer certains carrés magiques d'ordre 4 m avec application aux Parcours magiques de E. STERN. Bruxelles.

Despre Pompe de Lt. A. ŞTEFĂNESCU (extras din „Revista Geniului").

ION IONESCU. *Culegere de probleme de aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată.* Ediţia II. Bucureşti. Tipografia Curţii Regale F. Göbl Fii S. A. Bucureşti 1937. Preţul 190 lei.

CERERI

269. Care sunt Societăţile care au existat, precum şi cele ce fiinţează acum, care poartă numele unor matematicieni şi profesori de matematică din ţara noastră? Astfel, la pag. 184 Anul VI al *Gazetei Matematice* se vorbeşte de *„Societatea „GHEORGHE ASACHI" a elevilor Liceului Naţional din Iaşi"*. Mai există acea Societate? Dacă nu, care a fost viaţa ei?

Asemenea cunoştinţe fiind necesare pentru istoricul matematicilor la noi în ţară, vom publica cu plăcere note sau articole ce ni s'ar trimite în această privinţă. I. I.

DIVERSE

Intre 9 şi 12 Iulie a avut loc la Paris o reuniune matematică internaţională, cu care ocaziune s'au ţinut 12 conferinţe, printre care şi una a colegului nostru, D-l P. SERGESCU, asupra matematicilor la Paris în Evul Mediu.

Intre 15 şi 19 Iulie s'a ţinut, — tot la Paris, — al doilea Congres internaţional al *Recreaţiunilor Matematice*, organizat de Revista *Sphinx* din Bruxelles. Cu această ocaziune D-l P. SERGESCU a fost ales în Comitetul de Redacţie al acelei Reviste.

D-l I. POPA, care, după cum cunosc cititorii *Gazetei Matematice*, se ocupă cu chestiuni de istoricul matematicilor în ţara noastră, a reuşit să găsească originalul italian după care s'a inspirat AMPHILOCHIE din Hotin, când a scris aritmetica sa la finele secolului XVIII.

I. I.

Sporirea bibliotecii.

Buletinul «I. R. E.». Anul IV. No. 4. Decemvrie 1936.
Donat de Institutul Român de Energie.

La centrale hydro-électrique de Crivești et les améliorations foncières de la région de VIRGILE STARK.
Donat de I. R. E. No. 59.

Butanul. Un nou combustibil românesc. de PAUL STAEHELIN și EUGEN IONICĂ.
Donat de I. R. E. No. 78.

The social and economic consequences of the British grid scheme de D. N. DUNLOP.
Donat de I. R. E. No. 80.

Barajul dela Bicaz de G. MACOVEI.
Donat de I. R. E. No. 79.

Izvoarele de energie naturală din Banat de ȘT. I. MATEESCU și A. LUPAN.
Donat de I. R. E. No. 81.

Curente noui în domeniul valorificării cărbunilor prin înnobilarea calității de G. DAMASCHIN.
Donat de I. R. E. No. 82.

Epurarea mecanică a cărbunilor de GR. SCHILERU.
Donat de I. R. E. No. 83.

Aglomerarea cărbunilor de A. MOȚET-GRIGORAȘ.
Donat de I. R. E. No. 84.

Radiotecnia e radioindustria in Italia de G. VALLAURI.
Donat de I. R. E. No. 85.

La régulation de la fréquence dans les réseaux d'interconnexion. Difficultés et remèdes de D. IVTCHER.
Donat de I. R. E. No. 86.

Gazeificarea cărbunelui de P. STAEHELIN.
Donat de I. R. E. No. 87.

Aspecte actuale ale problemei cărbunilor de V. FRIGURĂ.
Donat de I. R. E. No. 88.

Contribution à l'étude du phénomène de rupture de l'arc électrique alternatif de G. M. BLANC.
Donat de I. R. E. No. 89.

Incălzirea cu cărbune pulverizat de A. LUPAN.
Donat de I. R. E. No. 90.

AL. MANICATIDE şi C. S. POPESCU. *Curs complet de matematici pentru Şcoalele secundare. Algebra elementară pentru clasa V clasică şi modernă.* Bucureşti 1909.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

AL. MANICATIDE şi C. S. POPESCU. *Curs de Algebră pentru clasa V-a reală.* Bucureşti 1909.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

AL. MANICATIDE şi C. S. POPESCU. *Consideraţiuni asupra întocmirii Manualelor de Matematice.* Ploeşti 1909.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1778. *Să se calculeze numai prin adunări şi scăderi valoarea determinantului:*

$$\begin{vmatrix} 13{,}4 & 16{,}7 & 16{,}0 & 16{,}9 \\ 11{,}0 & 12{,}7 & 9{,}8 & 12{,}8 \\ 10{,}0 & 15{,}0 & 15{,}9 & 13{,}4 \\ 7{,}8 & 10{,}2 & 11{,}1 & 10{,}4 \end{vmatrix}.$$

I. IONESCU.

Să transformăm acest determinant în altele cu elemente mai mici. Să scădem din ultima coloană pe a doua şi din aceasta şi a treia prima coloană. Determinantul devine:

$$\begin{vmatrix} 13{,}4 & 3{,}3 & 2{,}6 & 0{,}2 \\ 11{,}0 & 1{,}7 & -1{,}2 & 0{,}1 \\ 10{,}0 & 5{,}0 & 5{,}9 & -1{,}6 \\ 7{,}8 & 2{,}4 & 3{,}3 & 0{,}2 \end{vmatrix}.$$

Scădem de două ori coloana a doua din prima:

$$\begin{vmatrix} 6{,}8 & 3{,}3 & 2{,}6 & 0{,}2 \\ 7{,}6 & 1{,}7 & -1{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 5{,}0 & 5{,}9 & -1{,}6 \\ 3{,}0 & 2{,}4 & 3{,}3 & 0{,}2 \end{vmatrix}.$$

Scădem linia a patra din prima:

$$\begin{vmatrix} 3{,}8 & 0{,}9 & -0{,}7 & 0 \\ 7{,}6 & 1{,}7 & -1{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 5{,}0 & 5{,}9 & -1{,}6 \\ 3{,}0 & 2{,}4 & 3{,}3 & 0{,}2 \end{vmatrix} .$$

Scădem de două ori linia întâia din a doua:

$$\begin{vmatrix} 3{,}8 & 0{,}9 & -0{,}7 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 5{,}0 & 5{,}9 & -1{,}6 \\ 3{,}0 & 2{,}4 & 3{,}3 & 0{,}2 \end{vmatrix} .$$

Adunăm coloana a doua de două ori la a treia şi odată la a patra:

$$\begin{vmatrix} 3{,}8 & 0{,}9 & 1{,}1 & 0{,}9 \\ 0, & -0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}0 & 15{,}9 & 3{,}4 \\ 3 & 2{,}4 & 8{,}1 & 2{,}6 \end{vmatrix} .$$

Desvoltăm determinantul după linia a doua şi găsim:

$$(-0{,}1) \times \begin{vmatrix} 3{,}8 & 1{,}1 & 0{,}9 \\ 0 & 15{,}9 & 3{,}4 \\ 3 & 8{,}1 & 2{,}6 \end{vmatrix} .$$

Adunăm linia a treia la a doua şi luăm a zecea parte a sumelor pentru a introduce în determinant factorul 0,1 din afara lui:

$$- \begin{vmatrix} 3{,}8 & 1{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 2{,}4 & 0{,}6 \\ 3 & 8{,}1 & 2{,}6 \end{vmatrix} .$$

Scădem pe patru ori coloana a treia din a doua şi de două ori prima din a treia şi găsim:

$$- \begin{vmatrix} 3{,}8 & -2{,}5 & -6{,}7 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 3 & -2{,}3 & -3{,}4 \end{vmatrix} .$$

Schimbăm semnele la coloana a doua şi a treia, ceeace nu schimbă valoarea determinantului şi îl desvoltăm după linia a doua:

$$0{,}3 \times \begin{vmatrix} 2{,}5 & 6{,}7 \\ 2{,}3 & 3{,}4 \end{vmatrix}.$$

Scădem ultima linie din prima

$$0{,}3 \times \begin{vmatrix} 0{,}2 & 3{,}3 \\ 2{,}3 & 3{,}4 \end{vmatrix}.$$

Scădem prima linie din ultima:

$$0{,}3 \times \begin{vmatrix} 0{,}2 & 3{,}3 \\ 2{,}1 & 0{,}1 \end{vmatrix}.$$

Scădem ultima coloană din prima:

$$0{,}3 \times \begin{vmatrix} -3{,}1 & 3{,}3 \\ 2 & 0{,}1 \end{vmatrix}.$$

Desvoltăm determinantul şi avem:

$$0{,}3 \times (-3{,}1 \times 0{,}1 - 2 \times 3{,}3) = 0{,}3 \times (-1)\,(0{,}31 + 3{,}3 + 3{,}3) =$$

$$0{,}3 \times (-1) \times 6{,}91, = 3 \times (-0{,}691) = -0{,}691 - 0{,}691 - 0{,}691 = -2{,}073.$$

Toate soluţiile primite au avut şi înmulţiri efective.

I. I.

PROBLEMA 2408. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$x^2 \sqrt[3]{x}\,[ax^3 - (2a+1)\sqrt[3]{x}] + (a-1)x\sqrt[3]{x}\,[(a+1)x^2\sqrt[3]{x^2} - 1] + 1 = 0.$$

Să se determine numărul întreg a, *astfel ca cel puţin una din rădăcinile ecuaţiei să fie un număr întreg.*

A. BRENER.

Dacă notăm:

$$\sqrt[3]{x} = y, \tag{1}$$

ecuaţia dată, dezvoltată, devine:

$$ay^{16} + (a^2 - 1)\,y^{12} - (2a+1)\,y^8 - (a-1)\,y^4 + 1 = 0,$$

care descompusă în factori se mai poate scrie:

$$(ay^8 - y^4 - 1)\,(y^8 + ay^4 - 1) = 0.$$

De aci rezultă ecuaţiile:

$$ay^8 - y^4 - 1 = 0 \quad \text{şi} \quad y^8 + ay^4 - 1 = 0,$$

respectiv cu rădăcinile în y^4:

$$y^4 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2a} = \begin{cases} A_1 \\ A_2 \end{cases}, \qquad y^4 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2} = \begin{cases} A_3 \\ A_4 \end{cases}.$$

Aceste ecuaţii se descompun în factori şi avem:

$$(y^2 - \sqrt{A_k})(y^2 + \sqrt{A_k}) = 0, \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Rezolvând aceste ecuaţii, obţinem:

$$y = \pm \sqrt[4]{A_k}, \quad y = \pm i \sqrt[4]{A_k}, \quad (i = \sqrt{-1}, \ k = 1, 2, 3, 4).$$

Ţinând seamă de substituţia (1), deducem:

$$x = y^3,$$

şi deci rădăcinile ecuaţiei date sunt:

$$(2) \quad x = \pm A_k^{\frac{3}{4}}, \quad x = \pm i A_k^{\frac{3}{4}}, \quad (i = \sqrt{-1}, \ k = 1, 2, 3, 4).$$

Să trecem acum la a 2-a parte a problemei, adică să determinăm un întreg a astfel ca cel puţin una din rădăcinile reale din (2) să fie număr întreg. Pentru aceasta se observă din (2) că A_k trebue să fie un bipatrat, trebue deci să avem:

$$A_k = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2a} = n_k^4, \qquad (k = 1, 2)$$

sau:

$$A_k = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2} = n_k^4, \qquad (k = 3, 4),$$

n_k întreg. De aci deducem respectiv:

$$1 + 4a = (2a\, n_k^4 - 1)^2 = 4a^2 n_k^8 - 4a\, n_k^4 + 1$$

$$a^2 + 4 = (2\, n_k^4 + a)^2 = 4\, n_k^8 + 4a\, n_k^4 + a^2.$$

Simplicând aceste ecuaţii, deducem, lăsând $a = 0$ la o parte

$$(3) \quad a = \frac{1 + n_k^4}{n_k^8}, \quad (4) \quad a = \frac{1 - n_k^8}{n_k^4}.$$

Se observă că numai ecuaţia (3), admite rădăcini întregi pentru a şi n_k, anume, pentru $n_k = 1$, avem $a = 2$.

Rezultă că singura rădăcină întreagă, pentru $a = 2$, este:

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a} = \frac{1 + 3}{4} = 1.$$

Soluţie dată de D-l VASILIU C. ION (Şc. Politehnică, Bucureşti).

In enunţul iniţial de la pag. 359, Vol. XXI, primul termen din prima paranteză a fost imprimat din eroare ax^2 în loc de ax^3. D-l I. C. VASILIU este singurul care a făcut rectificarea şi a rezolvat complet problema.

V. A.

PROBLEMA 3985. *In planul unui patrulater complet există o direcţie şi una singură, ale cărei isogonale faţă de unghiurile patrulaterului sunt concurente.*

ADRIAN C. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii: CEZAR COŞNIŢĂ (Bârlad), MARIUS MARGULIUS (Bucureşti), N. N. MIHĂILEANU (Constanţa), C. I. NAFORNIŢĂ (Lic. mil. Tg. Mureş), GEORGE ŞT. ROŞCA.

Isogonalele unei direcţii, în raport cu unghiurile unui triunghiu sunt concurente în M pe cercul circumscris. Rezultă pentru un patrulater complet că M trebue să fie aşezat simultan pe cele patru cercuri circumscrise triunghiurilor pe care le formează, adică în punctul MIQUEL al patrulaterului. Isogonalele — paralele între ele — ale cevienelor ce unesc punctul M cu fiecare vârf şi în raport cu acelaşi vârf, determină direcţia cerută, evident unică.

M este focarul parabolei înscrisă patrulaterului; direcţia aflată este axa parabolei, perpendiculară pe dreapta SIMSON a punctului M în raport cu patrulaterul.

PROBLEMA 4355. M *şi* N *fiind două puncte inverse în planul unui triunghiu,* M′ *şi* N′ *simetricele lor în raport cu centrul cercului circumscris, triunghiurile podare ale punctelor* M *şi* N *sunt omologice respectiv cu triunghiurile antipodare ale punctelor* M′ şi N′.

Cele două perechi de triunghiuri omologice au ca ax de omologie axul radical al cercurilor circumscrise triunghiului de referință și triunghiurilor podare ale punctelor M *și* N.

C. IONESCU-BUJOR.

1°. *Soluție* dată de D-l I. LEBĂDĂ (elev Liceul Militar Iași): Problema se deduce din proprietățile: „*Fie* M *și* N *două puncte în planul unui triunghiu simetrice în raport cu centrul cercului său circumscris. Triunghiul podar al punctului* M *este omologic cu triunghiul antipodar al punctului* N, *centru de omologie fiind* M, *iar ax de omologie fiind axul radical al cercurilor circumscrise triunghiului de referință și triunghiului podar al lui* M [1])" și

„*Triunghiurile podare a două puncte inverse au același cerc circumscris* [2]) ".

Au mai soluționat problema D-nii: T. G. COCEA și M. C. POSTELNICESCU, I. I. ȚIȚEICA (Liceul militar Mânăstirea Dealu).

2°. *Note. a)* Problema a urmărit prezentarea unei familii de perechi de triunghiuri omologice cu același ax de omologie.

Intr'o notă, ce va apărea, vom arăta condițiile pentru ca două perechi de triunghiuri omologice să aibă același ax de omologie.

b) D-l T. G. COCEA observă pentru cazul particular când M este H — ortocentrul, iar N este O — centrul cercului circumscris— următoarea proprietate:

„*Triunghiul complimentar și tangențial, triunghiul ortic și antipodarul simetricului ortocentrului față cu centrul cercului circumscris, sunt două perechi de triunghiuri omologice cu același ax de omologie, care este axul ortic al triunghiului de referință* ".

c) Dacă luăm triunghiul ortic drept triunghiu fundamental și considerăm cazul limită al problemei, când punctele M, N coincid cu centrul cercului înscris acestui triunghiu, obținem proprietatea:

„*Triunghiul format de proiecțiile punctelor lui* CARNOT *pe laturile corespunzătoare ale triunghiului ortic este omologic cu*

---

1) C. IONESCU-BUJOR: „Asupra unor triunghiuri podare și antipodare". Revista Matematică din Timișoara, Vol. XIII p. 87.

2) E. ROUCHÉ et COMBEROUSSE: „Traité de Géométrie", pag. 453.

triunghiul format de perpendicularele ridicate din picioarele înălțimilor pe dreptele ce unesc aceste puncte cu centrul cercului circumscris, ax de omologie fiind axul radical al cercului înscris în triunghiul ortic și cercului lui EULER.

C. I. B.

PROBLEMA 4551. *Fie* B'D' *o paralelă la diagonala* BD *a paralelogramului* ABCD. *Prin* B' *și* D' *se duc dreptele* Δ_b *și* Δ_d. *Se consideră punctele:*

$B_1 \equiv (\Delta_b, AD)$; $D_1 \equiv (\Delta_d, AB)$; $B_2 \equiv (\Delta_b, BC)$; $D_2 \equiv (\Delta_d, CD)$.

Perpendicularele duse prin B_1 *și* D_1 *respectiv pe* AD *și* AB *se intersectează în* M, *iar perpendicularele duse prin* B_2 *și* D_2 *respectiv pe* BC *și* CD *se intersectează în* N. *Să se arate că dreapta* MN *trece printr'un punct fix, când dreptele* Δ_b *și* Δ_d *variază.*

THEODOR GH. COCEA.

Soluție dată de D-nii: VILHELM CSEKE (student, Cluj) și AL. D. STOICA (Lic. „M. V. M." Buc.).

Aplicând teorema lui THALES putem scrie:

$$(1) \qquad \frac{B_1B'}{B'B_2} = \frac{AB'}{B'B} = \frac{AD'}{D'D} = \frac{D_1D'}{D'D_2}.$$

Să ducem prin B' și D' paralele respectiv la B_1M și D_1M și să presupunem deocamdată că ele taie dreapta MN în două puncte diferite P_1 și P_2. Avem:

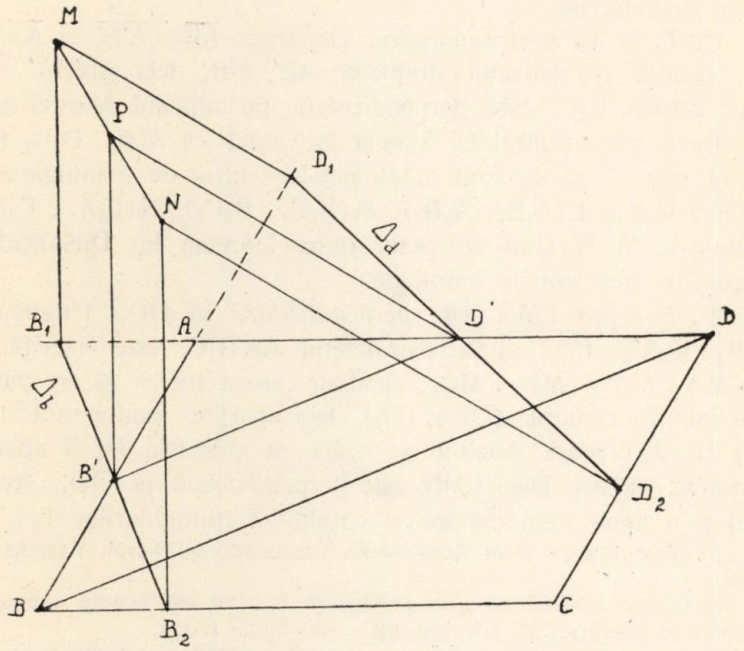
$$\frac{P_1M}{P_1N} = \frac{B'B_1}{B'B_2} \quad \text{și} \quad \frac{P_2M}{P_2N} = \frac{D'D_1}{D'D_2},$$

însă, ținând seama de relația (1), deducem:

$$(2) \qquad \frac{P_1M}{P_1N} = \frac{P_2M}{P_2N}$$

ceeace arată că punctele P_1 și P_2 se confundă într'un singur punct P pe dreapta MN.

Deoarece punctele B′ şi D′ sunt fixe, punctul P este şi el fix, iar prin acest punct trece totdeauna dreapta MN, oricare ar fi poziţia dreptelor Δ_b şi Δ_d.



Observaţii. 1. Punctul P este ortocentrul triunghiului AB′D′.

2. Proprietatea se menţine şi în cazul când, în loc să ducem prin B_1, D_1 etc. perpendiculare pe laturile AD şi AB, am duce paralele la două direcţii fixe D şi D′.

G. D. S.

PROBLEMA 4619. *Fie* T_1 *triunghiul format prin întâlnirea laturilor corespunzătoare a două triunghiuri egale şi înscrise în acelaşi cerc* O; T_2 *triunghiul format de dreptele ce unesc vârfurile corespunzătoare ale celor două triunghiuri.*

Să se arate că triunghiurile T_1 *şi* T_2 *sunt omologice, iar axa de omologie este perpendiculară pe dreapta ce uneşte centrul cercului circumscris triunghiului* T_1 *cu centrul cercului* O.

C. IONESCU-BUJOR.

Soluție dată de D-ra ALEXANDRA AL. VASILESCU (Liceul Carmen-Sylva Timișoara) și D-l M. A. VASILESCU-ȘTABU (Liceul Mihaiu Viteazul, Alba Iulia):

Notăm $T_1 \equiv A_1B_1C_1$, $T_2 \equiv A_2B_2C_2$, O_1 și O_2 centrele cercurilor circumscrise.

1°. T_1 și T_2 *sunt omologice.* Deoarece $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ și $\overline{AA'} = \overline{BB'}$, rezultă paralelismul dreptelor AB', A'B, deci AB'BA' este trapez isoscel, C_1C_2 este perpendiculară pe mijlocul coardei AB', C_1C_2 trece prin centrul O. Similar se arată că A_1A_2, B_1B_2 trec prin O, deci T_1 și T_2 sunt omologice și centrul de omologie este O. Dacă notăm $L(A_1B_1, A_2B_2)$, $M(B_1C_1, B_2C_2)$, $N(C_1A_1, C_2A_2)$, punctele L, M, N sunt colineare după teorema lui DESARGUES, dreapta lor este axa de omologie.

2°. *Dreapta* LMN *este perpendiculară pe* OO_1. Unghiurile C_1AB_1, $C_1A'B_1$ fiind egale, patrulaterul $AA'B_1C_1$ este inscriptibil, deci $\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MB_1} \cdot \overline{MC_1}$, egalitate care arată că M are puteri egale față cu cercurile (O) și (O_1), deci aparține axului radical al celor două cercuri. Analog se arată că punctele M, N aparțin acestui ax radical. Deci LMN este perpendiculară pe OO_1. Avem astfel și o nouă demonstrare a omologiei triunghiurilor T_1, T_2.

3°. *Note* date de D-ra ALEXANDRA VASILESCU și D-l M. VASILESCU-ȘTABU:

a) O *este centrul cercului înscris în* T_2. Din cele arătate la punctul 1° rezultă că dreapta C_1C_2 este bisectoarea unghiului $B'C_2A$.

b) O *este ortocentru în* T_1. Patrulaterele AB'C'C și $B_1A_1C'C$ fiind inscriptibile, unghiurile B'AC și A_1B_1C având același supliment, sunt egale, deci dreptele AB', A_1B_1 sunt paralele și C_1C_2, care trece prin O, este perpendiculară pe A_1B_1, deci înălțime a triunghiului T_2.

c) Dacă prelungim dreptele AB', BC', CA' până se întâlnesc în A'_1, B'_1, C'_1 obținem triunghiul T'_1 care este omotetic cu T_1, din cauza paralelismului dreptelor AB', A_1B_1 și al analoagelor.

d) Dreptele AC', BA', CB' se întâlnesc în punctele A'_2, B'_2, C'_2 care formează triunghiul T'_2. Am arătat că $A'_1B'_1$ este paralelă cu $A'_2B'_2$ etc., prin urmare T'_1 este omotetic cu T'_2, centru de omotetie fiind K.

e) K *este punctul lui* LEMOINE *în* T'_1. $A'_1AA'_2A'$ fiind paralelogram, A'_1A_2 trece prin mijlocul segmentului AA', care fiind antiparalel cu $B'_1C'_1$ în unghiul A'_1, $A'_1A'_2$ este simediană a triunghiului T'_1.

f) *Cercul* ABC *este un cerc* TUCKER *al triunghiului* T'_1, deoarece $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$ și antiparalele cu laturile corespunzătoare ale triunghiului T'_1 în unghiurile opuse. Fie O'_1 centrul cercului $A'_1B'_1C'_1$.

g) *Punctele* O, O'_1, K *sunt colineare*, întrucât centrul O al cercului TUCKER se află pe dreapta ce unește centrul cercului circumscris cu punctul LEMOINE.

h) *Triunghiurile* T'_1 *şi* T_2 *sunt omologice.*

AA', BB' fiind antiparalele laturilor triunghiului T'_1 şi egale între ele, se întâlnesc pe simediana vârfului C'_1 [1]). C'_1C_2 este deci simediană a triunghiului T'_1, iar K este centrul de omologie al triunghiurilor considerate.

i) *Axa de omologie a triunghiurilor* T'_1 *şi* T_2 *este perpendiculară pe* OO'_1. Fie $M'(B_2C_2, B'_1C'_1)$. Din antiparalelismul dreptelor AA', $B'_1C'_1$ avem $M'A \cdot \overline{M'A'} = M'B'_1 \cdot M'C'_1$, ceeace arată de asemenea că M se află pe axul radical al cercurilor (O) şi (O'_1) etc.

3°. Altă soluţie a fost dată de Dl. V. ECKSTEIN (elev inginer).

C. I. B.

PROBLEMA 4677. *Să se rezolve în numere întregi ecuaţia*

$$x^8 - y^8 = p^z,$$

p *fiind un număr prim.*

HAR. P. IONESCU.

Soluţie dată de D-ra ALEX. AL. VASILESCU (lic. Alba-Iulia) şi D-l MIRCEA A. VASILESCU-ŞTABU (lic. Alba-Iulia):

Ecuaţia se descompune în:

$$x - y = p^\alpha \quad , \quad x + y = p^\beta \, ,$$
$$x^2 + y^2 = p^\gamma \quad , \quad x^4 + y^4 = p^\delta \, ,$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = z.$$

Din primele două ecuaţii avem:

$$(1) \qquad x = \frac{1}{2}\left(p^\beta + p^\alpha\right) \quad ; \quad y = \frac{1}{2}\left(p^\beta - p^\alpha\right),$$

iar a treia ecuaţie conduce la

$$p^{2\alpha} + p^{2\beta} = 2p^\gamma$$

care se pune sub forma:

$$1 + p^{2\beta - 2\alpha} = 2p^{\gamma - 2\alpha};$$

Am presupus că 2α este cel mai mic dintre exponenţi. Din această ultimă formă avem:

$$\gamma - 2\alpha = 0 \quad \text{şi} \quad \beta = \alpha \, ,$$

căci p fiind prim trebue să dividă unitatea; dar atunci exponentul lui trebue să fie zero.

---

1) F. G. M. Ex. de Géométrie Ed. VII Nr. 2296.

Cu aceste se are din ultima ecuaţie:

$$\delta = 4\alpha ,$$

iar din (1):

$$x = p^{\alpha} \quad , \quad y = 0.$$

apoi:

$$z = 8\alpha.$$

Notă. In mod analog avem acum soluţiile ecuaţiei:

$$x^{2^n} - y^{2^n} = p^z$$

când $n \neq 1$; care caz are ca soluţii pe cele din (1).

H. P. I.

PROBLEMA 4751. *Fie* D, E, F *picioarele a trei ceviene concurente în triunghiul* ABC. *Dacă* O *este un punct oarecare din planul triunghiului, dreptele* OB *şi* OC *intersectează pe* EF *respectiv în punctele* F′ *şi* E′.

Notând cu M *şi* N *intersecţiile dreptelor* DE′ *şi* DF′ *respectiv cu* OB *şi* OC, *să se arate că dreapta* MN *trece printr'un punct fix, când punctul* O *se mişcă în plan.*

THEODOR GH. COCEA

1°. *Soluţie* dată de D-l Slt. I. C. PAREPEANU (din Geniu). Fie L intersecţia (BC, EF). In triunghiul LDF′, E′NC este o transversală; dar L este conjugatul armonic al lui D faţă de B, C şi reciproc, C este conjugatul lui B faţă de L şi D. Rezultă că în acelaşi triunghiu, E′, N, B sunt picioare de ceviene concurente, deci MN trece prin L care este fix.

2°. *Soluţie* dată de D-l NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU (cl. VII-a, lic. militar „N. Filipescu“ Mânăstirea Dealu). Intersecţia L a dreptelor MN, E′F′ este prin construcţie, polara dreptei OD în raport cu unghiul BOC. OL va tăia deci pe BC în conjugatul armonic al lui D faţă de B şi C, deci L se confundă cu intersecţia EF, BC. MN trece prin punctul fix L.

3°. *Soluţie* dată de D-l M. C. POSTELNICESCU (cl. VIII-a, lic. mil. Mânăstirea Dealu). Notând L şi L′ intersecţia dreptei EF cu MN şi OD, cum patrulaterul MDONE′F′ este complet, rezultă că $(F'E'L'L) = -1$; dacă D′ este punctul în care EF taie pe BC,

avem deasemenea $(BCDD') = -1$. Comparând cele două rapoarte anarmonice scrise, observăm că razele BF', CE', DL' sunt concurente în O, deci LD' va trebui să treacă prin O, ceeace impune $L \equiv D'$.

Ultimele două soluţii diferă numai prin expunerea aceluiaşi material.

4°. D-l VICTOR L. FLORESCU (cl. VI-a. L. M. M-rea Dealu), observă că OD, BE', CF' sunt concurente, deci conjugatele lor faţă de laturile triunghiului OBC, anume L, M, N sunt colineare.

5°. D-l RADU V. APOSTOL (cl VII-a, L. M. M-rea Dealu) notează O_1 intersecţia (BE', CF') şi $L \equiv (BC, EF)$, OO_1 este polara lui L în unghiul BOC, deci trece prin D; invers polul L al lui OD, este intersecţia MN, E'F'. Deci MN trece prin L.

6°. D-l ALEXANDRU POPESCU ZORICA (cl. VII-a lic. „Sf. Iosif") luând trei puncte O_1, O_2, O_3 ceeace conduce la trei poziţii M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, observă că *triunghiurile* $M_1M_2M_3$, $N_1N_2N_3$ *sunt într'o omologie specială de pol* L *pe axul* EF *de omologie.*

In adevăr, triunghiurile $M_1O_1E'_1$ şi $M_2O_2E'_2$ sunt omologice din cauza laturilor opuse concurente în B, D, C, colineare; deci O_1O_2, M_1M_2 şi evident analog N_1N_2, concură pe EF. Triunghiurile $M_1M_2M_3$, $N_1N_2N_3$ au deci laturile opuse concurente pe EF; sunt omologice, şi M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 sunt concurente, deci MN trece printr'un punct fix. Din omologia $M_1N_1E'_1$, $M_2N_2E'_2$ se deduce că punctul fix este pe BC odată cu O; când $O \equiv A$, $MN \equiv EF$, deci punctul fix este şi pe EF, este $L \equiv (BC, EF)$.

N. M.

PROBLEMA 4757. *Pe catetele unui triunghiu dreptunghiu* ABC, *ca diametre, se descriu cercuri. Să se demonstreze că patratul construit pe tangenta comună a acestor cercuri, cuprinsă între contacte, este echivalent cu aria triunghiului* ABC *şi că avem*

$$\cos^2\varphi = \sin 2B$$

φ *fiind unghiul tangentei cu ipotenuza.*

ALEXANDRU V. NICULESCU.

Soluţie. Fie D şi E mijloacele laturilor AB şi AC şi *a, b, c* măsurile respective ale laturilor triunghiului.

Ducem DF paralelă cu tangenta comună şi formăm astfel triunghiul DEF, dreptunghic în F. Insemnând cu P_{bc} aria patratului construit pe această tangentă, avem succesiv:

$$P_{bc} = \overline{DF}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{EF}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4} = \frac{bc}{2} = \text{aria (ABC)}$$

şi partea întâia a problemei este demonstrată.

In triunghiul DEF avem

$$\cos\varphi = \frac{DF}{DE} = \frac{\sqrt{2bc}}{a};$$

dar

$$\sin 2B = 2\,\sin B \,.\, \cos B = 2\,\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{2bc}{a^2}$$

şi deci

$$\cos^2\varphi = \sin 2B.$$

c. c. t. d.

I. Au dat soluţii analoage aceleia de mai sus, D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila), Sublocot. PAREPEANU C. I. (din Geniu), AMĂRĂŞTEANU F. M. şi MARTAC RADU (Şc. Politech. Buc.), ŞTEFĂNESCU V. P. (stud. Buc.), MARCOVICI EUG. (student Iaşi), LASCU BAL (stud. Cluj), MILU I. N. şi GAVRILESCU N. C. (Şc. Preg. Of.), TÂNJEALĂ EM. (Bac. Brăila), APOSTOL RADU, FLORESCU V. şi ŞTEFĂNESCU D. N. (elevi L. M. N. F.), BUCURENCIU I. V. (L. M. T.-Mureş), TILICĂ C. ŞTEFAN şi DIACONESCU I. (Lic. T.-Severin), MATEIU D. D. (Liceul Internat-Iaşi) E. C. BEIU-PALADI (L. M. Viteazu Buc.), POPESCU-ZORICA AL. (Lic. Sf. Iosef), CIURESCU I. RADU (cl. 7, Colegiul Sf. Sava, Buc.), VASILESCU-STABU MIRCEA, DUMITRIU CĂLIN, LEUCA ION şi STREDER ION.

Elevii: BIVOLARU L., JIPA C. ALEX., IOACHIM L. H., MAMUT P., PETRESCU B., PASCARU I. I., RĂDUCĂNESCU D., STĂNCULEANU M., STĂNCULESCU VIRGIL, dela liceul militar Iaşi au dat soluţii identice.

II. *Observare.* Elevul CIURESCU I. RADU (Coleg. Naţional Sf. Sava) se ocupă şi de cazul când unul din cercuri ar fi descris pe ipotenuză. Relaţia la care se ajunge, ia următoarea înfăţişare, cu notaţiile introduse:

$$\frac{P_{bc}}{P_{ab}} = \sqrt{\frac{a+c}{a-c}}.$$

Deduc imediat o altă analoagă cu aceasta:

$$\frac{P_{bc}}{P_{ab}} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

Observ că se mai pot scrie:

$$(1)\quad \frac{P_{bc}}{P_{ac}} = \frac{a+c}{b}\ ;\quad (2)\quad \frac{P_{bc}}{P_{ab}} = \frac{a+b}{c},$$

de unde rezultă relaţia interesantă între cele trei arii şi catete

$$\frac{b}{P_{ac}} - \frac{c}{P_{ab}} = \frac{c-b}{P_{bc}}.$$

Eliminând acum a, b, c între (1), (2) şi $a^2 = b^2 + c^2$ se obţine

$$P_{bc}^2 = P_{bc} \cdot P_{ab} + P_{bc} \cdot P_{ac} + P_{ab} \cdot P_{ac}$$

o relaţie între cele 3 arii, care se verifică imediat dacă ţinem seamă de (1) şi (2).

III. Au mai trimis, ulterior, soluţii şi D-nii: BOGDAN I., CARAMAN D. V., COJOCARU P. P., DOBRESCU PAUL, DEUTSCH ADOLF, POSTELNICESCU C. M. şi STOIAN S. I.

ALEX. V. N.

PROBLEMA 4776. *Fie* ABCD *un patrulater ortodiagonal şi cercurile* C_a, C_b, C_c, C_d *cu centrele în* A, B, C, D *astfel ca perechile* (C_a, C_b), (C_b, C_c), (C_c, C_d) *să fie ortogonale.*

1°. *Să se arate ortogonalitatea cercurilor* C_a, C_d.

2°. *Să se determine raza cercului astfel încât* C_b, C_d *să fie ortogonale. Discuţie.*

3°. *Condiţia de adăugat pentruca deasemenea* C_a, C_c *să fie ortogonale.*

C. IONESCU-BUJOR.

1°. Patrulaterul fiind ortodiagonal,

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2,$$

ori aceasta este şi condiţia pentruca lanţul de cercuri ortogonale C_a, C_b, C_c, C_d să fie închis, adică pentruca C_d, C_a să fie ortogonale [1]).

---

1) C. IONESCU-BUJOR: „Asupra cercurilor ortogonale". *Gazeta Matematică* XLII. pag. 455, 7°.

2°. Cercul C_a este ortogonal cu C_b şi C_d. Pentruca şi C_b, C_d să fie ortogonale, trebue să existe relaţia: [1])

$$r_a^2 = \tfrac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2\right).$$

Problema este posibilă numai dacă triunghiul ABD are unghiurile ascuţite [2]).

3°. Lanţul închis de cercuri ortogonale C_a, C_b, C_d conduce şi la relaţia:

$$r_b^2 = \tfrac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2\right);$$

însă cercurile C_b, C_c fiind ortogonale,

$$r_c^2 = \overline{BC}^2 - r_b^2 = \tfrac{1}{2}\left(2\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2\right),$$

deci

$$r_a^2 + r_c^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2,$$

şi cum pentru ortogonalitatea cercurilor C_a, C_c trebue

$$r_a^2 + r_c^2 = \overline{AC}^2,$$

deducem

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2,$$

ceeace exprimă perpendicularitatea dreptelor AB, CD.

A soluţionat analog problema D-nul I. I. ŢIŢEICA (Liceul Mânăstirea Dealu).

Alte soluţii au fost date de D-nii: V. FLORESCU şi D. N. THEODORESCU (Lic. M-rea Dealu), R. V. MARTAC (Şcoala Politechnică Bucureşti), I. STREDER, M. D. POPA şi E. MARCOVICI (Iaşi).

Au soluţionat necomplet problema D-nii: R. V. APOSTOL, O. RĂDULESCU şi N. D. ŞTEFĂNESCU (Lic. N. Filipescu Târgovişte).

C. I. B.

PROBLEMA 4796. *Fie* φ, φ_a, φ_b, φ_c *punctele de contact ale cercului celor nouă puncte ale unui triunghiu* ABC, *înscris în cercul* O, *cu cercurile tritangente* I, I_a, I_b, I_c.

Să se demonstreze că dacă a *este latura mijlocie a triunghiului, atunci:*

$$\overline{OI}_a \cdot \overline{\varphi\varphi}_a = \overline{OI}_b \cdot \overline{\varphi\varphi}_b + \overline{OI}_c \cdot \overline{\varphi\varphi}_c.$$

V. THÉBAULT.

---

1) Loc. cit. 2°.

2) Loc. cit. 3°.

Soluție dată de D-nii: M. L. A. NEGREA (Brăila), DORIN N. THEODORESCU (Lic. militar „N. Filipescu").

Propunătorul problemei a demonstrat în *Mathesis* 1922 pag. 118 și în *Mathesis* 1934 la supliment că, în condițiile enunțului,

$$\overline{\varphi\varphi_a} = \frac{R^2(b-c)}{dd_a} \; ; \; \overline{\varphi\varphi_b} = \frac{R^2(a-c)}{dd_b} \; ; \; \overline{\varphi\varphi_c} = \frac{R^2(b-a)}{dd_c}$$

unde

$$d = \overline{OI} \; ; \; d_a = \overline{OI}_a \; ; \; d_b = \overline{OI}_b \; ; \; d_c = \overline{OI}_c \, .$$

Introducând aceste valori în relația dată, se găsește identitatea

$$b - c = a - c + b - a$$

ceeace demonstrează proprietatea enunțată.

PROBLEMA 4813. *Ecuațiile*

$$x^2 + px + q = 1 \, , \quad (q-1)x^2 + pqx + q^2 = 0$$

au rădăcinile de aceeași natură. Să se caute relația dintre rădăcinile lor.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție dată de D-nii: MIHAIL M. ANASTASIU (lic. mil. „N. Filipescu" Mânăstirea Dealu), STELIAN CETĂȚEANU (lic. „Șincai" București) și DORIN N. THEODORESCU (lic. mil. „N. Filipescu" Mânăstirea Dealu).

Realizantul primei ecuații este $r = p^2 - 4(q-1)$ și al celei de a doua ecuații

$$R = p^2q^2 - 4q^2(q-1) = q^2 r \, ;$$

q^2 fiind totdeauna pozitiv — q real —, R și r sunt de același semn, deci rădăcinile de aceeași natură.

Rezolvând ecuațiile și notând x_1, x_2 și X_1, X_2 rădăcinile, se obține:

$$X_{1,2} = \frac{-pq + qr}{2(q-1)} = \frac{q}{q-1} x_{1,2}$$

sau

$$X_1 = \frac{q}{q-1} x_1 = \frac{x_1 x_2 + 1}{x_1 x_2} x_1 = \frac{x_1 x_2 + 1}{x_2} = x_1 + \frac{1}{x_2}, \quad X_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} \, .$$

Notă. 1°. Nu era necesar să se rezolve ecuaţiile, dacă se ţine seamă de relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi

$$x_1 + x_2 = -p \qquad X_1 + X_2 = -\frac{pq}{q-1}$$

$$x_1 x_2 = q - 1 \qquad X_1 X_2 = \frac{q^2}{q-1}$$

de unde

$$X_1 X_2 = \frac{q^2}{x_1 x_2}, \quad \frac{X_1 + X_2}{X_1 X_2} = \frac{x_1 + x_2}{q}$$

sau

$$\frac{1}{X_1} \cdot \frac{1}{X_2} = \frac{x_1}{q} \cdot \frac{x_2}{q}, \quad \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} = \frac{x_1}{q} + \frac{x_2}{q},$$

deci

$$X_1 = \frac{q}{x_1}, \quad X_2 = \frac{q}{x_2} \text{ — sau, indiferent } X_1 = \frac{q}{x_2}, \quad X_2 = \frac{q}{x_1}$$

şi în definitiv

$$X_1 = \frac{x_1 x_2 + 1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_1}, \quad X_2 = x_1 + \frac{1}{x_2}.$$

2°. De altfel fie $f(x) = 0$ prima ecuaţie, se observă imediat pe forma coeficienţilor că a doua se obţine prin substituţia $f\left(\frac{q}{x}\right) = 0$, deci rădăcinile sunt de aceeaşi natură, relaţia dintre ele fiind

$$X = \frac{q}{x}, \text{ adică } X_1 = \frac{q}{x_1}, \quad X_2 = \frac{q}{x_2}, \text{ etc.}$$

3°. S'au primit multe soluţii necomplete, fiindcă în grupa 1°, nu s'au eliminat ambii parametri p şi q pentru a se obţine relaţii directe între X şi x. 8 rezolvitori s'au mulţumit cu o singură relaţie între X, x.

EXERCIŢII

1. Dacă cercul circumscris este tangent cercului lui EULER, triunghiul este dreptunghic.

IOAN A. ILIE.

R. Fie razele lor R şi r. Fiind tangente interioare şi având $R = 2r$, cercul lui EULER trece prin centrul cercului circumscris, deci punctul de tangenţă este ortocentrul.

(Exercices de Géométrie par F. G. M. pag. 670).

$$\overline{OH}^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$$

dar aci avem $OH = R$; deci :

$$R^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$$

$$\therefore \cos A \cos B \cos C = 0$$

de unde : $\cos A = 0$ $A = 90^0$,

ori : $\cos B = 0$ $B = 90^0$,

ori : $\cos C = 0$ $C = 90^0$.

2. Să se demonstreze inegalitatea :

$$a_1 . a_2 \ldots a_n < \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)^n$$

$a_1, a_2, \ldots a_n$ fiind pozitivi şi în progresie aritmetică.

MIRCEA ADAM.

R. Se ştie că media aritmetică a n numere pozitive este mai mare ca media lor geometrică, deci :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > n \sqrt[n]{a_1 . a_2 \ldots a_n}$$

şi cum

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

rezultă

$$a_1 . a_2 \ldots a_n < \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)^n .$$

In particular avem :

$$1 . 2 . 3 \ldots n < \left(\frac{n + 1}{2} \right)^n .$$

(Culegere de probleme Algebră Ed. III prob. 23 cap. IX)

şi $$1 . 3 . 5 \ldots (2n - 1) < n^n .$$

3. Să se stabilească relaţia :

$$\begin{vmatrix} 1 & m_a & m''_a \\ 1 & m_b & m''_b \\ 1 & m_c & m''_c \end{vmatrix} = 0$$

m_a fiind mediana unui triunghiu, iar m''_a porţiunea de mediană cuprinsă între centrul de greutate şi latură.

M. AMĂRĂŞTEANU.

R. Avem : $m''_a = \frac{m_a}{3}$, etc.

4. Să se demonstreze identitatea :

$$(\alpha\beta - ab)(c\delta - \gamma d) + (a\gamma - \alpha c)(d\beta - \delta b) + (a\delta - \alpha d)(b\gamma - \beta c) = 0.$$

D. MAVRODIN.

R. Considerăm determinantul, evident identic nul :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

pe care îl desvoltăm după minorii de ordinul al doilea ai lui LAPLACE, obţinem astfel identitatea din enunţ. In cazul particular $a = b = c = d = 1$ obţinem identitatea lui EULER :

$$(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \gamma)(\delta - \beta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma) = 0.$$

Identitatea dată generalizează astfel identitatea lui EULER şi ne permite să construim şi alţi determinanţi de ordin superior, generalizând formal identitatea lui EULER.

PROBLEME PROPUSE

4855. Care este prima grupă de un milion de numere consecutive care nu conţine niciun bipatrat ?

I. IONESCU.

4856. Să se găsească numărul de patru cifre de forma *abcd*, care adunat cu cele 5 numere consecutive următoare lui, să ne dea un număr de cinci cifre de forma *aascd*, unde cifra *s* este egală cu $b - c$.

COLONEL G. I. LITEANU.

4857. Să se găsească două numere întregi ştiind că diferenţa între ele este egală cu 2 şi egală cu diferenţa între cubul unuia şi pătratul celuilalt.

G-L GH. BUICLIU.

4858. Fie M punctul de întâlnire al diagonalelor AC şi BD ale patrulaterului ABCD înscris în cercul O. Perpendiculara dusă prin M pe OM intersectează pe AB şi CD respectiv în M_1 şi M_2.

Să se arate că patrulaterul format de centrele de greutate ale triunghiurilor AM_1M_2, BM_1M_2, CM_1M_2 şi DM_1M_2 este inscriptibil.

THEODOR GH. COCEA.

4859. A', B', C' fiind punctele unde trei ceviene concurente taie cercul circumscris triunghiului ABC, iar M, N, P picioarele înălţimilor coborîte din vârfurile A', B', C' în triunghiurile BA'C, CB'A, AC'B, să se demonstreze că dreptele AM, BN, CP sunt concurente.

Aceeaşi problemă pentru cazul simedianelor.

M. C. POSTELNICESCU.

4860. Pe o dreaptă indefinită *xy* sunt date patru puncte în ordinea A, D, C, B. Se descrie, de aceeaşi parte a lui *xy*, semicercurile de diametru AB, AD, CB. Se cere:

1°. Să se calculeze raza unui cerc (O) tangent la toate cele trei cercuri:

2°. Să se stabilească relaţia care există între razele celor trei cercuri pentru ca cercul (O) să fie tangent şi la dreapta *xy*.

V. THÉBAULT.

4861. Să se stabilească identitatea:

$$\frac{x-a+a\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-a^2}}{x-a+a\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{1-ax+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}}{x-a}$$

$$\equiv\frac{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}}\cdot$$

P. SERGESCU.

4862. Să se rezolve ecuaţiunea

$$x^3-2(a+b)x^2+(a^2+b^2+4ab)x-2b(a^2+b^2)=0,$$

ştiind că între rădăcinile ei x_1, x_2, x_3 există relaţia

$$x_1x_2+ax_3=(a+b)^2.$$

C. IONESCU-BUJOR.

4863. a, b, c, A, B, C fiind laturile şi unghiurile unui triunghiu, iar φ un unghiu arbitrar, avem relaţiile:

$$a^3 \cos\varphi = b^3 \cos(3C + \varphi) + c^3 \cos(-3B + \varphi) + 3abc \cos(C - B + \varphi)$$

$$a^3 \sin\varphi = b^3 \sin(3C + \varphi) + c^3 \sin(-3B + \varphi) + 3abc \sin(C - B + \varphi).$$

N. N. MIHĂILEANU.

4864. Să se demonstreze că într'un triunghiu oarecare avem:

$$A + C = \operatorname{arctg}\left(\frac{a^2}{S} - \operatorname{cotg} C\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{c^2}{S} - \operatorname{cotg} A\right).$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4865. Se consideră triunghiurile ABC înscrise în cercul cu centrul O, şi având acelaşi ortocentru H. Să se arate că triunghiurile ABC sunt circumscrise la o elipsă cu focarele O şi H şi având ca cerc director cercul dat. Să se arate că cercul principal al elipsei este cercul fix al celor nouă puncte (al lui EULER) al triunghiurilor ABC.

N. ABRAMESCU.

4866. Fie P un punct în planul triunghiului ABC ; A' şi B' intersecţiile dreptelor PA şi PB respectiv cu CB şi CA ; K, L şi M mijloacele segmentelor AB, A'B' şi CP.

1. Să se arate că locul geometric al punctelor P, pentru care avem

$$(1) \qquad \overline{AK}^2 = \overline{KL} \cdot \overline{KM},$$

se compune dintr'un cerc O, o dreaptă D, şi o cubică Γ.

2. Să se verifice geometriceşte că dacă punctul P se găseşte pe cercul O, sau pe dreapta D, avem relaţia (1).

A. ANGELESCU.

ERATĂ. La problema 4731 — „G. M." — XLII — 112 partea a doua a neegalităţii este $\frac{2\sqrt{2}}{r}$, iar nu 3, cum s'a publicat.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bodnărescu H. (4816); *Boldescu B. P.* (4704, 841); *Botezatu C. F.* (4727); *Cetăţeanu St.* (4784, 820, 33, 43, 44, 45); *Cocea G. T.* (P); *Constantinescu G. G.* (2295, 3279, 593, 819, 4495, 520, 782, 808, 09, 13, 16, 28, 33, 42, 45); *Deutsch A.* (4822, 42); *Dobrescu P.* (4184, 400, 703, 62, 65, 73, 76, 84, 88, 89, 90, 802, 15, 23, 24, 34, 36); *Florescu V.* (4810, 11, 20, 25, 45); *Gavrilescu C.* (4788); *Grumăzescu M.* (4788, 97, 808, 11, 20, 28, 34); *Herman V.* (4820); *Ionescu B. N. G.* (4809, 23, 26, 33, 34, 43, 45); *Mavrodin D.* (4827, 28, 30, 33, 42); *Mihalcea N. N.* (4573, 789, 816); *Negoiţă P.* (4843, 45); *Pană A.* (4820); *Popescu-Zorica A.* (4432, 556, 86, 753, 86, 816, 23, 28, 33, 45); *Predoescu T.* (4022, 299, 301, 410, 570, 73, 99, 605, 76, 717, 64, 66, 78, 81, 86, 97, 802, 16, 23, 34, R); *Romaşcan Georgetta* (4833); *Sacter O.* (4605, 97, 802, 32, 41, 42, 51); *Segal J.* (4816); *Stănculescu I.* (4823, 33); *Ştefănescu D. N.* (4526, 75, 90, 642, 92, 95, 702, 74, 86, 88, 90, 828, 33); *Vasilescu-Stabu A. M.* (4811, 22, 23, 24, 28, 33, 34, 36, 45, 46); *Vlad M.* (4814, 17, 33).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia VI . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* 1926. (Epuizată).

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. **C. D. IONESCU-ŢIU**

C. 90225

BIBLIOTECA CENTRALĂ
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIII

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1937

SUMARUL

1. Considerații invariant-teoretice asupra patrulaterului (va urma) . . . . . *D. Barbilian.*
2. Aritmetica lui Gheorghe Asachi (va urma). *Petre V. Cazanacli.*
3. O configurație de cercuri . . . . . *Ad. Gheorghiu.*
4. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu".
5. Note Matematice: 4 — 10.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 270.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 4437, 4522, 4575, 4663, 4691, 4702, 4715, 4728, 4802, 4816.
10. Exerciții: 5 — 8.
11. Probleme propuse: 4867 — 4878.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1937

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **D. Stan**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1937 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 59, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

CONSIDERAȚII INVARIANT-TEORETICE ASUPRA PATRULATERULUI

§ 1. Proprietăți topologice în legătură cu un anume invariant-semn.

1°. Insemn cu (F, G) figura formată de un patrupunct F^0, F^1, F^2, F^3 și un patrulater G^0, G^1, G^2, G^3 de acelaș triunghiu diagonal IJK. Luând ca triunghiu de referință al unui sistem de coordonate proiective chiar triunghiul IJK, avem pentru coordonatele punctuale x și tangențiale y ale punctelor (F) și dreptelor (G) :

$$(1) \qquad x_i = \varepsilon_i f_i \quad , \quad (2) \quad y_i = \varepsilon_i g_i \quad , \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\varepsilon_i = \pm 1,$$

$$f_i \neq 0, \qquad g_i \neq 0.$$

E clar că expresia

$$(3) \quad \Omega \equiv -\prod (\varepsilon_1 f_1 g_1 + \varepsilon_2 f_2 g_2 + \varepsilon_3 f_3 g_3) \quad , \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1$$

sau

$$\Omega \equiv -\sum f_1^4 g_1^4 + 2 \sum f_2^2 f_3^2 g_2^2 g_3^2 ,$$

e un semi-invariant proiectiv al configurației (F, G) căci o schimbare de coordonate proiective

$$x_i^* = \frac{1}{\lambda_i} x_i \quad , \quad y_i^* = \lambda_i y_i \quad , \qquad i = 1, 2, 3$$

lasă valoarea lui Ω neschimbată. Dacă introducem însă două normări independente ale coordonatelor x și y

$$x_i^* = h x_i \qquad y_i^* = k y_i$$

$$h \neq 0 \quad , \quad k \neq 0,$$

formațiunea Ω se înmulțește cu un factor pozitiv

$$\Omega^* = h^4 k^4 \Omega.$$

Conchidem de aci la *existența unui „invariant semn"*

$$(4) \qquad \sigma = \operatorname{sgn} \Omega$$

al configurației (F, G) *față de toate colineațiile reale ale planului.*

2°. E vorba să dăm o interpretare geometrică invariantului astfel introdus.

Se ştie că un patrulater complect desparte planul proiectiv (o varietate topologică cu două dimensiuni, închisă şi unilateră sau, cu alt cuvânt mai nou, neorientabilă) în două clase de domenii: 1) o clasă de domenii triunghiulare şi 2) o clasă de domenii cuadrangulare, ceeace uşor se poate recunoaşte pe o figură. Există patru domenii triunghiulare şi 3 domenii cuadrangulare. Domeniile din aceeaş clasă aderă numai într'un punct, domeniile de clase diferite se unesc dealungul unei graniţe, formate dintr'un segment.

Grupul colineativ de automorfism G_4 al configuraţiei (F, G) e dat de substituţiile

$$x_i^* = \varepsilon_i x_i , \qquad \varepsilon_i = \pm 1 , \quad i = 1, 2, 3,$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1.$$

Se constată uşor că G_4 permută transitiv domeniile triunghiulare şi lasă în parte invariante domeniile cuadrangulare: în orice caz, nu schimbă clasa domeniului transformat.

Cum G_4 operează transitiv asupra punctelor (F) rezultă că *acestea sau sunt distribuite în câte unul din domeniile primei clase, sau sunt adunate într'unul din domeniile celei de a doua clase. După cum avem o situaţie, sau alta, vom zice despre configuraţia* (F, G) *că aparţine clasei 1 sau clasei 2.*

3°. *Vrem să arătăm că repartiţia configuraţiilor* (F, G) *după invariantul-semn* σ *sau după criteriul topologic din alineatul* 2°, *e aceeaşi.*

Pentru aceasta să cercetăm semnificaţia anulării semi-invariantului Ω, din (3). Presupunem că factorul care aduce anularea produsului Ω este

$$\varepsilon_1 f_1 g_1 + \varepsilon_2 f_2 g_2 + \varepsilon_3 f_3 g_3 = 0,$$

unde ε_i au valori determinate. Această relaţie se mai scrie însă

$$(5) \qquad \varepsilon_1' f_1 \cdot \varepsilon_1'' g_1 + \varepsilon_2' f_2 \cdot \varepsilon_2'' g_2 + \varepsilon_3' f_3 \cdot \varepsilon_3'' g_3 = 0,$$
$$\varepsilon_i'' = \varepsilon_i' \varepsilon_i \quad , \quad i = 1, 2, 3,$$

în care $\varepsilon_i' = \pm 1$ sunt distribuiţi arbitrar. Citim pe egalitatea (5) că anularea lui Ω aduce incidenţa, într'o oarecare ordine, a fiecărei drepte G^i cu câte un punct F^i.

Incât *o schimbare de semn a lui* Ω, obținută prin variarea continuă a coeficienților (f) și (g), *are drept efect străbaterea simultană a dreptelor* (G) *de către punctele* (F): *trecerea configurației* (F, G) *dela o clasă, la alta.*

4°. Pentru a preciza ordinea în care semnele $\sigma = \pm 1$ corespund claselor 1 și 2 e deajuns să facem o verificare. Să considerăm ca patrupunct F asociat patrulaterului G, patrupunctul covariant, format din polurile trilatere ale fiecărei laturi G^i față de triunghiul celorlalte trei. Această configurație particulară (F, G) poartă numele de configurația lui GUNDELFINGER [1]).

Cum, prin chiar definiția domeniilor triunghiulare, o latură G^i e exterioară domeniului mărginit de celelalte trei, polul trilinear F^i al acesteia cade în interiorul domeniului. *Deci configurația lui* GUNDELFINGER *aparține clasei 1.*

Să calculăm acum invariantul-semn σ al configurației. Avem, evident, pentru caracterizarea acestui caz particular:

$$f_i^2 g_i^2 = k \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

Inlocuind în (3) găsim

$$\Omega = + 3k^2 ,$$

prin urmare

$$\sigma = + 1 .$$

De aici și din cele arătate la alineatul 3°, urmează teorema:

O configurație (F, G) *aparține clasei 1 sau clasei 2 după cum invariantul-semn corespunzător are valorile*

$$\sigma = + 1 \quad , \quad \sigma = - 1 .$$

5°. Să dăm o a doua interpretare geometrică invariantului-semn. Din confruntarea nouei interpretări cu interpretarea de mai sus, vom deduce o proprietate destul de ascunsă a configurațiilor (F, G).

Punctele (F), deoparte și dreptele (G), de alta, pot fi luate ca elementele duble a două involuții cremoniane, pătratice: una punctuală, alta tangențială, de triunghiu principal IJK și de ecuații:

$$(7) \qquad x_i^* = \frac{f_i^2}{x_i} \quad , \qquad (8) \qquad y_i^* = \frac{g_i^2}{y_i} \quad , \quad i = 1, 2, 3 .$$

---

1) Ea se caracterizează în câmpul configurațiilor (F, G), prin proprietatea grupului colineativ de automorfism corespunzător de a putea fi extins dela G_4 la G_{24}.

Producerea geometrică a perechilor omoloage ale acestor involuții e bine cunoscută: ele sunt perechile de elemente conjugate față de toate conicele fascicolului linear circumscris patrupunctului F sau înscris patrulaterului G.

Fie acum ξ și ξ' intersecțiile conicei corespunzătoare unei drepte curente y în involuția (7) cu omoloaga aceleeași drepte în involuția (8). — Ne propunem să găsim legătura între ξ și ξ'. Să punem

$$\xi_i' = \theta_i \xi_i , \qquad i = 1, 2, 3, \tag{9}$$

$$\xi_i \neq 0 .$$

Transformata lui y prin (7) e o conică ce trece prin I, J, K și, în virtutea ipotesei, prin ξ și ξ'. Deci

$$\Sigma \theta_1 (\theta_2 - \theta_3) \xi_1 x_2 x_3 = 0. \tag{7'}$$

Dreapta $\xi\xi'$ are ecuația

$$\Sigma (\theta_2 - \theta_3) \xi_2 \xi_3 x_1 = 0. \tag{8'}$$

Transformatele

$$\sum \frac{\theta_1 (\theta_2 - \theta_3) \xi_1}{f_1'} x_1 = 0 \quad , \quad \sum \frac{g_1^2}{(\theta_2 - \theta_3) \xi_2 \xi_3} x_1 = 0,$$

ale lui (7') și (8') respectiv prin (7) și (8) trebue să se reducă la una și aceeași dreaptă y. Așa dar avem

$$\frac{f_1^2 g_1^2}{\theta_1 (\theta_2 - \theta_3)^2} = \frac{f_2^2 g_2^2}{\theta_2 (\theta_3 - \theta_1)^2} = \frac{f_3^2 g_3^2}{\theta_3 (\theta_1 - \theta_2)^2},$$

relații echivalente evident cu

$$\Sigma f_1 g_1 \sqrt{\theta_1} = 0 \quad , \quad \Sigma f_1 g_1 \sqrt{\theta_2} \sqrt{\theta_3} = 0 . \tag{10} \quad (10')$$

De aici conchidem: *cantitățile* θ determinate de (10) și (10') *sunt niște constante,* cu alte cuvinte nu depind de dreapta arbitrară y. Ceva mai mult, între cele două șiruri de mărimi θ și $\bar{\theta}$ determinate de (10) și (10') avem evident

$$\bar{\theta}_i = \frac{1}{\theta_i}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Așa dar *între punctele* ξ *și* ξ' *lucrează,* în virtutea realațiilor (9) și a constantei numerelor θ *o omografie binedeterminată sau inversa acesteia.*

Din (10) şi (10') luând mărimile $\sqrt{\theta_i}$ drept coordonate, scoatem numai decât condiţia necesară şi suficientă pentru realitatea numerelor $\sqrt{\theta_i}$. Găsim

$$\sigma = -1. \tag{12}$$

Avem evident în (12) o *condiţie suficientă* de realitate pentru numerele θ_i. *Această condiţie se dovedeşte însă şi necesară.* Intr'adevăr, singurul caz în care mărimile $\sqrt{\theta_i}$ ar putea fi complexe, iar θ_i, reale, e cazul în care $\sqrt{\theta_i}$ ar fi pur imaginare. Ar urma deci să avem (de exemplu):

$$\sqrt{\theta_1} : \sqrt{\theta_2} : \sqrt{\theta_3} = ip_1 : p_2 : p_3, \quad \sqrt{\theta_1} : \sqrt{\theta_2} : \sqrt{\theta_3} = -ip_1 : p_2 : p_3$$

unde (p) sunt numere reale, diferite de zero. Ca aceste două serii de valori să verifice (10) ar trebui

$$f_1 g_1 = 0,$$

ceeace e exclus.

Incât putem enunţa teorema:

Dacă F *şi* G *sunt respectiv un patrupunct şi un patrulater de acelaşi triunghiu diagonal, iar* (7) *şi* (8) *involuţiile cremoniane asociate, conica şi dreapta provenite din transformarea unei drepte arbitrare a planului respectiv prin* (7) *şi* (8) *sunt exterioare sau se taie, după cum configuraţia* (F, G) *aparţine întâiei* ($\sigma = +1$) *sau celei de a doua clase* ($\sigma = -1$).

Intre punctele de intersecţie ξ *şi* ξ' *avem o omografie bine determinată, cu punctele fixe* I, J, K, *ai cărei invarianţi* θ_i *sunt daţi de ecuaţiile* (10) *şi* (10').

6°. In deosebi interesant e cazul $\Omega = 0$. Patrupunctul F vine înscris patrulaterului G.

In «Buletinul Şedinţelor Societăţii Române de Ştiinţe» anul I, No. 2 am demonstrat că, într'o astfel de figură, *conicele lui* GUNDELFINGER ale lui F şi G au o infinitate de triunghiuri înscrise şi circumscrise.

Intr'adevăr, se verifică uşor că existenţa unei serii de triunghiuri înscrisă şi circumscrisă respectiv la două conice X şi Y se exprimă prin anularea uneia sau alteia din sumele

$$\pm\sqrt{S_1} \pm \sqrt{S_2} \pm \sqrt{S_3} = 0,$$

unde S_i $(i = 1, 2, 3)$ sunt rădăcinele «ecuaţiei în S» a celor două

conice. Dar ecuațiile conicelor lui GUNDELFINGER ale lui F și G se scriu

$$\frac{x_1^2}{f_1^2}+\frac{x_2^2}{f_2^2}+\frac{x_3^2}{f_3^2}=0 \quad , \quad g_1^2x_1^2+g_2^2x_2^2+g_3^2x_3^2=0,$$

iar rădăcinile ecuației lor în S sunt $S_i=-f_i^2g_i^2$. De aici rezultă proprietatea menționată.

Reiese din discuția din alineatul 5° că o altă enunțare a acestei teoreme de inchidere e următoarea:

Dacă transformata unei drepte particulare prin involuția (8) *atinge conica provenită din transformarea ei prin involuția* (7), *această situație se păstrează pentru transformatele oricărei drepte din plan.*

7°. Cazul configurației lui GUNDELFINGER (F, G) e bine caracterizat prin condiția ca *omografia asociată* (9) *să fie ciclică, de perioadă 3.*

Intr'adevăr, dacă

$$\sqrt{\theta_1}:\sqrt{\theta_2}:\sqrt{\theta_3}=1:\pm j:\pm j^2 \quad , \quad j^2+j+1=0,$$

ecuațiile (10) și (10′) ne dau relațiile

$$f_i^2\,g_i^2=k \quad , \quad i=1,2,3,$$

care definesc o astfel de configurație.

8°. Desvoltările din alineatele 2° și 3° conduc la o proprietate topologică destul de ascunsă a configurației (F, G).

Să schimbăm patrulaterul G cu un patrulater analog $\overline{G}$ și să formăm configurația $(F, \overline{G})$.

E clar că o dreaptă G^i poate fi dedusă dintr'o dreaptă G^j prin deplasări continue, la nevoie străbătând un oarecare număr de puncte (F). Fie σ și $\overline{\sigma}$ invarianții - semn ai celor două configurații, iar (ij) numărul minim de puncte (F) străbătute de dreapta $\overline{G}^j$ pentru a ajunge în G^i. Acest număr coincide cu totalitatea punctelor (F) cuprinse într'una din fâșiile pe care dreptele G^i, $\overline{G}^j$ le rup din planul proiectiv.

Am recunoscut la alineatul 3° că la fiecare străbatere de către o dreaptă $\overline{G}^j$ a unui punct F^k avem o schimbare a determinației lui $\overline{\sigma}$. Așa dar

$$\overline{\sigma}:\sigma=(-1)^{(ij)}.$$

Incât enunţăm teorema:

Fiind date două patrulatere G *şi* $\bar{G}$ *şi un patrupunct* F *de acelaşi triunghiu diagonal, numărul punctelor* (F) *conţinute într'una sau alta din fâşiile de plan proiectiv* $\{G^i, \bar{G}^j\}$, — $i, j = 0, 1, 2, 3$, — *au acelaş ordin de paritate. Avem anume relaţia*

$$\bar{\sigma} : \sigma = (-1)^{(ij)} \tag{13}$$

unde $\bar{\sigma}$ *şi* σ *sunt invarianţii-semn ai configuraţilor* (F, $\bar{G}$) *şi* (F, G).

Această teoremă ar trebui cercetată mai de aproape, în legătură cu fundamentele Geometriei Proiective, în special cu teoremele lui DESARGUES şi PAPPUS. Să observăm aici numai că ea decurge analitic din existenţa grupului de automorfism G_4, cu toate că, într'un astfel de grup, două drepte $G^i \bar{G}^j$ nu sunt totdeauna transitive cu alte două G^h, $\bar{G}^k$.

9°. *Aplicaţie la problema realităţii punctelor lui* MONGE.

Se ştie că cercurile descrise pe cele trei diagonale ale unui patrulater complect G, ca diametre, trec prin aceleaşi două puncte: punctele lui MONGE. Se vede uşor că aceste puncte sunt simetrice în acelaşi timp faţă de dreapta lui NEWTON-GAUSS Γ, cât şi faţă de cercul circumscris triunghiului diagonal IJK. Prin urmare punctele lui MONGE sunt reale numai când dreapta Γ e exterioară cercului IJK.

Să căutăm să înlocuim această condiţie cu alta, mai semnificativă.

Dreapta Γ e evident omoloaga dreptei $\bar{G}^0$ dela infinit în involuţia cremoniană asociată patrulaterului G căci e conjugata acesteia faţă de toate conicele înscrise în G. Pe de altă parte cercul IJK e transformatul dreptei dela infinit în inversiunea isogonală a triunghiului IJK, adică în involuţia ceremoniană asociată *patrupunctului* F *format de centrele cercurilor tritangente triunghiului.*

Suntem prin urmare în condiţiile teoremei dela alineatul 5°. Deci Γ e exterioară cercului IJK dacă configuraţia (F, G) astfel definită e de prima clasă, cu alte cuvinte, *dacă centrele* (F) *cad în domeniile triunghiulare ale patrulaterului* G.

Această condiţie de realitate a punctelor lui MONGE poate lua încă o formă.

Fie $\bar{G}$ patrulaterul de acelaş triunghiu diagonal IJK şi care conţine dreapta $\bar{G}^0$ dela infinit. E clar că (F, $\bar{G}$) e o configuraţie de

prima clasă, căci transformata lui $\overline{G}^0$ în involuţia asociată lui $\overline{G}$ e însăşi această dreaptă pe când, în involuţia asociată lui F, transformata iui G^0 e cercul IJK, evident exterior lui G^0. Aşa dar

$$\overline{\sigma} = +1.$$

Inlocuind în formula (13) de mai sus, găsim

$$(-1)^{(i\,o)} = +1.$$

Aşa dar:

Condiţia necesară şi suficientă de realitate a punctelor lui MONGE, *este ca, în planul afin, una din dreptele* G^i, — şi odată cu ea toate, — *să împartă centrele* (F) *în două grupe de număr pereche (sau nul) de elemente.*

(Va urma) D. BARBILIAN.

ARITMETICA LUI GHEORGHE ASACHI

Se ştie că GHEORGHE ASACHI a publicat, între anii 1836 şi 1838, un curs de *Matematică* în trei părţi: *Aritmetica, Geometria* şi *Algebra*, care, desigur, a contribuit mult la desvoltarea învăţământului matematic în Moldova. Am socotit util să fac o dare de seamă amănunţită despre conţinutul acestor cărţi, începând deocamdată cu Partea I: *Aritmetica.*

Exemplarul consultat de mine aparţine Bibliotecii Universităţii din Iaşi, este din anul 1836, tipărit la *„Eşi în tipografia Albinei"*. Cartea este scrisă cu cirilice şi are 208 pagini.

In § 1 se dă definiţia *Aritmeticii*, care (dela cuvântul grecesc **Aritmos,** *număr) „este ştiinţa numerilor"*.

Interesantă este definiţia cuvântului *„unime"*.

„Prin unimi se înţelege ceimea sau calităţile trebuitoare spre a comparui, adecă a asemăna mai multe **obiecturi** *între sine. Atunce când se zice, — doi cai şi trei boi fac cinci vite, aceste obiecturi se socotesc numai în privirea unei singure însuşiri, care este lor* **comună (de o potrivă),** *şi care este viaţa"*.

Numerele *abstracte* şi *concrete* se definesc ca şi azi.

In § 5 se introduc numerele *„complexe sau fracţionare“* şi *„necomplexe sau simple“*. Un număr ar fi complex sau fracţionar când *„se alcătuieşte din unimi de deosebită speţie (feliu); „şase stânjini patru palme“; „două şi jumătate“*. Iar ca necomplexe se citează numerele: *„două zeci stânjini“; „cinci zeci trii taleri“*.

Numerele fiind nesfârşit de multe, se cere totuşi să le putem numi cu puţine *cuvinte* şi să le putem scri cu puţine *semne*. Avem: *„Numărarea vorbită“* pe care o deosebim de *„Numărarea scrisă, care înfăţoşează numere prin caractire sau semne“*.

Din § 7 aflăm că *„Indienii, alţii zic Arabii, au urzit înadins caractire pe care le numim ţifre“*. Această numeraţie scrisă este lămurită bine, clar şi fără prea multe detalii. Astfel, în § 10 se rezumă că *„se cuvine a însemna cumcă cuvintele de unime, zecime, sutime se înoiesc periodic, şi că numile perioadelor sunt, începând totdeauna dela dreapta: unimi, zecimi, sutimi de unimi simple, de mie, de milion, bilion, trilion, patrulion, cincilion, şeselion, şeptelion, optilion, nouălion, sau periodul unimilor, a miilor, a milioanelor, bilioanelor“* ...

Un capitol special (§§ 12—15) tratează *„de întrebuinţarea de 0“*. Citez din § 12:

„Fie numărul o sută trii; dacă ne-am mulţumi a scrie 1 pentru sutime şi 3 pentru trii unimi simple, atunce am avea 13 sau triisprezece, în loc de o sută trii, pentru că ţifra 1 se află în locul ţifrei zecimilor, care pururea este acea de mijloc în orice period, când ţifra sutimilor este a tria spre stânga. Dar dacă în locul zecimilor s'ar pune un caractir spre a însemna cum că nu sunt zecimi, atunci ţifra 3 s'ar afla la postul ce i se cuvine. Ţifra 0 este caractirul ce se întrebuinţează spre câştigarea acelui scopos, în cât o sută trii se scrie 103“.

Câteva exemple lămuresc importanţa acestui *„caractir 0“* precum şi felul cum se schimbă un număr dacă în urma lui scrim câteva zeruri. *„Să fie 1 pe care am voi a face de zece ori mai mare; apoi după cum s'au zis, eu o înaintez de un rang spre stânga, însă atunce locul ce cuprindea se va face vacant, eu îl împlinesc cu o 0 şi scriu 10 spre a reprezenta poziţia cea nouă a ţifrei 1, care acuma preţuieşte zece, ca una ce se află în rangul zecimilor“*.

Urmează definiţia celor 4 operaţiuni, din care două se numesc *„de căpitenie“*, anume *„Adiţia (sau Adunare)“* şi *„Subtragerea“*. Inmulţirea este o adunare repetată. In § 17 se zice: *„Adiţia se numeşte înmulţire când tot acel număr se adauge un hotărât număr de ori“*. De asemenea, *„Această operaţie“* (e vorba de scădere) *„are nume de divizie* (împărţire) *când tot un număr se scade dela alt număr de un hotărât număr de ori“*. *„Adiţia“* se explică în §§ 19—21. Se dau câteva reguli practice, expunerea semănând cu cea actuală. Autorul zice:

„Nu ni se pare cu putinţă a se întâmpina vreo nedumerire întru facerea unei ori care adiţii cu numere simple, îndată ce se vor pătrunde cu amăruntul regulile aplicate în cele două exemple trecute“. Rezultatul adunării se numeşte *„somă“*.

„Subtragerea“ (§§ 22—25) se tratează la fel, cu exemple simple şi reguli practice. Se întrebuinţează *metoda scăderii „cu împrumut“*. Autorul nu introduce numirile *„descăzut“* şi *„scăzător“*, spunând *„numărul susnic“* şi *„numărul giosnic“*. Rezultatul scăderii este *„rămăşiţa sau diferenţia (deosebirea)“*. Se vorbeşte şi despre semnele + *(plus, mai mult)* şi — *(minus, mai puţin)*. Trebuie însă subliniat, că în nicio problemă tratată autorul nu întrebuinţează aceste semne, spunând totdeauna: *„fie numărul... de adunat cu numărul...“* etc.

Inmulţirea (§§ 26—35) este tratată mai pe larg, cu multe exemple. Se defineşte astfel (§ 26):

„In fapt, a înmulţi un număr este tot acea ce a-l adăogi la el însuşi atâte ori câte unimi se află în un alt număr ce se numeşte înmulţitoriul. Numărul ce se adauge se numeşte înmulţitul (multiplicandu, carele are a se înmulţi), iar somei sau rezultatului s'au dat nume de product. Inmulţitul şi Inmulţitoriul se numesc factori a productului; şi îndeobşte se numeşte factor a unui număr o câtime care este cuprinsă în el chiar un hotărât număr de ori: 2, 3, 4, 6 sunt factori de 12“. Urmează *„Tabla lui Pitagoras“* cu explicaţia ei amănunţită. Transcriu un exemplu (§ 29):

„Fie numărul 432 a se înmulţi prin 4: scriu pe înmulţitorul 4 sub unimile simple 2, a înmulţitului, precum urmează, şi subliniez totul: După aceste, cuvintez aşa: fiind că (26) a înmulţi 432 prin 4 este tot aceea ce a adaogi de 4 ori a sale unimi, a sale zecimi şi a sale sutimi, destul îmi va fi a căuta cu tabla înmulţirii cât fac 4 ori 2,

```
  4 3 2
      4
-------
  1 7 2 8
```

4 ori 3 şi 4 ori 4. Aflu că 4 ori 2 fac 8, care scriu sub linie, la coloana unimilor simple. Trec la 3 zecimi, şi aflu în tablă că 4 ori 3 zecimi 12, etc. etc.".

Vin alte exemple când înmulţitorul are mai multe cifre: 432×24, 4502×324; 425×302, 20×20, 243000×4700, fiecare cu explicaţia lui; în deosebi se insistă asupra cazurilor când avem un zero sau mai multe printre cifrele înmulţitorului, şi când unul sau amândoi factorii se termină cu zeruri. In § 34 se încearcă o demonstraţie (de fapt, o simplă verificare într'un caz particular) a faptului că „*produsul de două numere este pururea tot acela, ori că se pune înmulţitorul în locul înmulţitului şi viţe versa (pe dos); 4 înmulţite prin 3 dau 12, chiar ca şi 3 înmulţite prin 4; figura următoare lămureşte acest adevăr:*

1 1 1 1 *Spre a avea productul de 4 ori prin 3, s'ar*
1 1 1 1 *cuveni a scrie de 3 ori un şir de 4 ori 1; şi spre*
1 1 1 1 *a înmulţi 3 prin 4, a scrie 4 şiruri de 3 ori 1.*

Figura de mai sus înfăţoşează aceste două cazuri, şi arată că numărul de 1 este pururea 12.

Autorul zice că semnul înmulţirii este × (înmulţit prin) dar nu întrebuinţează de loc acest semn, scriind totdeauna: „*fie numărul... a se înmulţi prin numărul...*" Nu se găseşte nimic despre produsul mai multor numere.

Impărţirea (§§ 36—44) se defineşte ca o scădere repetată, precum am arătat mai sus. „*Numărul pe carile scad se numeşte împărţitoriul (divizorul), acela de la carile îl scad se numeşte împărţitul (dividendul, care are a se împărţi), iar rezultatul operaţiei, adică numărul carile însemnează numărul de câte ori au intrat împărţitorul în împărţitul se numeşte câtor (cvoţient)*".

Tratarea împărţirii este la fel cu cea întrebuinţată şi azi în cărţile şcolarilor. Avem câteva despărţituri: „*A împărţi un număr de o singură ţifră prin un număr de o singură ţifră*" (se lucrează cu ajutorul tablei lui *Pitagora*); „*A se împărţi un număr de mai multe ţifre prin un număr de o singură ţifră*". „*De împărţirea prin un număr de mai multe ţifre*". E interesant raţionamentul următor (§ 38):

„*Impărţirea putându-se socoti ca o înmulţire a căria factori sunt reprezentaţi prin împărţitoriul şi câtoriul, iar împărţitul prin product, urmează că împărţitoriul înmulţit fiind prin câtoriu, trebuie să alcătuiască împărţitul*".

Primele împărţiri (128 : 4, 1185 : 5) se fac fără rest; însă în § 39 avem de împărţit 1017 prin 5. Lucrarea este aşezată astfel:

10, 17	5
10	203
00, 17	
15	
2	

Iar autorul termină explicaţia zicând: *„Nefiind nici o ţifră de a fi coborâtă pe cea de pe urmă rămăşiţă 2 o scriu la câtoriu, pe împărţitoriul 5 pun de-desupt şi le dispart prin o linie:* câtoriul total este 203 şi $\frac{2}{5}$ sau *două cincimi“. „Mai în urmă vom lămuri firea unor asemenea câtimi“.*

Ultimele două exemple $\left(7560 : 24 = 315 \text{ şi } 18503 : 57 = 324\frac{35}{57}\right)$ sunt tratate foarte amănunţit.

In § 42 autorul are grijă de a sublinia că *„se întâmplă adesea ori că ţifra care se pune la câtoriu nu este cea adevărată, şi se cuvine a mărturisi cum că nu este un metod care să poată povăţui, întru aceasta, în un chip sigur: căci numai după oarecare cercări se poate câştiga un câtoriu nemerit“.* Şi, pentru mai multă claritate, se mai face o împărţire: $4704 : 183 = 25\frac{129}{183}$.

In § 44 se arată că dacă deîmpărţitul şi împărţitorul sunt terminate cu zeruri, putem şterge un acelaşi număr de zeruri la deîmpărţit şi împărţitor, fără ca să schimbăm câtul.

In §§ 45—53 tratează *„De pruba acelor patru operaţiuni fondamentale ale Aritmeticii“.* Vin întâiu probele obişnuite, pe urmă proba prin 9. Aceasta se bazează pe faptul că (§ 49): *„fieşcare număr ce are mai mult de cât o ţifră este ecval (întocma) cu un hotărât număr de 9 ori, plus soma ţifrelor sale adunate ca nişte simple unimi“.* Proba prin 9 se face pentru toate 4 operaţiuni; transcriu aci proba împărţirii (§ 53):

Pruba împărţirii prin 9 se face tot în acelaşi chip ca şi pruba înmulţirii; căci (38), împărţitul reprezentează pe productul, împărţitoriul şi câtoriul se pot socoti drept înmulţitul şi înmulţitoriul. Deci trebuie a scoate toate 9 a împărţitorului, a scoate iarăşi toate 9 a câtoriului, a înmulţi acele două rămăşituri, dacă vor fi, una prin alta, a mai scoate încă toate 9 dela acest product, şi a scrie rămăşiţa dacă va fi. După aceasta se cuvine a

scoate toate 9 a împărțitului, apoi, dacă operația este bună, rămășița trebuie să fie ecvală cu acea de pe urmă rămășiță trecută. Exemplu :

304416 | 453 *rămâne* 3
672 *rămâne* 6
18 *rămâne* 0

Rămășița 18 *sau* 0.

După ce se vor scădea toate 9 a împărțitoriului, plus toate 9 ale câtoriului, și se vor înmulți rămășițele una prin alta, și se vor scădea toate 9 dela product, scoate toate 9 dela împărțitul, atunci mai rămân 18, sau 2 ori 9, sau 0.

Autorul nu spune nicăeri ce semn se întrebuințează pentru a indica o împărțire. Semnul : nu se întâlnește nicăeri, iar semnul |_ din contra se pune la fiecare împărțire.

Cele de mai sus ocupă cam un sfert din carte (50 de pagini) și privesc operațiunile cu numerele întregi.

In numărul viitor ne vom ocupa de partea referitoare la fracții.

(Va urma).

PETRE V. CAZANACLI
(Profesor la Liceul din Chișinău).

O CONFIGURAȚIE DE CERCURI

Rezumat. In cele ce urmează stabilesc teorema: *„Cele șase cercuri de similitudine a patru cercuri oarecare în plan luate câte două sunt ortogonale unui același cerc“* cu ajutorul unei interpretări în spațiu și tratez apoi două cazuri particulare.

1. Fie două cercuri de centre O_1 și O_2 și raze R_1 și R_2, se știe că locul geometric al punctelor de unde aceste cercuri se văd sub același unghiu e un cerc din fascicolul liniar determinat de cele două cercuri: Având:

$$(O_1) \equiv x^2 + y^2 - R_1^2 = 0$$

$$(O_2) \equiv (x - a)^2 + y^2 - R_2^2 = 0$$

un punct M al locului se bucură de proprietatea că T_1 și T_2 fiind contactele tangentelor din M la (O_1) și (O_2) avem:

$$\widehat{O_1MT_1} = \widehat{O_2MT_2}$$

încât din

$$\begin{cases} R_1 = \overline{O_1M} \ \sin \widehat{O_1MT_1} \\ R_2 = \overline{O_2M} \ \sin \widehat{O_2MT_2} \end{cases}$$

rezultă

$$\frac{\overline{MO_1}}{MO_2} = \frac{R_1}{R_2} \tag{1}$$

de unde se vede că acest cerc e descris pe segmentul determinat de centrele de similitudine a cercurilor (O_1) şi (O_2) ca diametru — de aci şi numele de cerc de similitudine al cercurilor (O_1) şi (O_2).

Punând M (x, y), locul său se scrie:

$$\frac{x^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

sau

$$\frac{x^2+y^2-R_1^2}{(x-a)^2+y^2-R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

de unde

$$(\Gamma_{12}) \equiv x^2+y^2-R_1^2-\frac{R_1^2}{R_2^2}[(x-a)^2+y^2-R_2^2] = 0 \tag{2}$$

pe care se vede că locul lui M e un cerc trecând prin punctele de intersecţie ale cercurilor (O_1) şi (O_2).

2. Fie în plan cercul

$$(O) \equiv x^2+y^2+2ax+2by+c = 0 \tag{3}$$

el este perfect determinat de parametrii a, b, c; notez acest cerc O (a, b, c).

Să observăm că cercurile din plan şi punctele din spaţiu se pot pune într'o corespondenţă biunivocă, introducând o reprezentare a cercurilor O (a, b, c) din plan prin puncte M (a, b, c) în spaţiu.

Din proprietăţile acestei reprezentări, utile în cele ce urmează consider:

a) La cercurile de rază nulă din plan, deci ai căror parametri satisfac la relaţia:

$$R^2 = a^2 + b^2 - c = 0 \tag{4}$$

corespund în spaţiu punctele cuadricei

$$S \equiv x^2 + y^2 - z = 0. \tag{5}$$

b) Condiţia de ortogonalitate a două cercuri O_1 (a_1, b_1, c_1) şi O_2 (a_2, b_2, c_2) fiind:

$$2a_1 a_2 + 2b_2 b_2 - c_1 - c_2 = 0 \tag{6}$$

ea se citeşte în spaţiu condiţie ca punctele M_1 (a_1, b_1, c_1) şi M_2 (a_2, b_2, c_2) să fie conjugate armonic faţă de cuadrica S, deci la două cercuri ortogonale corespund două puncte conjugate armonic faţă de S.

c) La un cerc (O) din fascicolul de cercuri determinat de două cercuri O_1 şi O_2 scris sub forma:

$$O\ (a, b, c) \equiv O_1\ (a_1, b_1, c_1) + \lambda\ O_2 (a_2, b_2, c_2) = 0 \tag{7}$$

şi ai cărui parametri sunt deci:

$$a = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda},\quad b = \frac{b_1 + \lambda b_2}{1 + \lambda},\quad c = \frac{c_1 + \lambda c_2}{1 + \lambda} \tag{8}$$

corespunde în spaţiu un punct M pe dreapta $M_1 M_2$ astfel că

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -\lambda. \tag{9}$$

d) La un cerc O din reţeaua liniară determinată de trei cercuri O_1, O_2, O_3 scris sub forma:

$$O\,(a,b,c) \equiv O_1(a_1, b_1, c_1) + \lambda\, O_2 (a_2, b_2, c_2) + \mu\, O_3 (a_3, b_3, c_3) = 0 \tag{10}$$

şi ai cărui parametri sunt:

$$a = \frac{a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3}{1 + \lambda + \mu},\quad b = \frac{b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3}{1 + \lambda + \mu},\quad c = \frac{c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3}{1 + \lambda + \mu} \tag{11}$$

corespunde în spaţiu un punct M în planul determinat de punctele M_1, M_2, M_3.

Cum acest plan admite un pol Γ faţă de cuadrica S, toate cercurile unei reţele liniare sunt ortogonale unui aceluiaşi cerc.

Analog se pot deduce proprietăţile fascicolelor de cercuri.

3. Fie în plan patru cercuri liniar independente O_i (a_i, b_i, c_i), de raze R_i, $i = 1, 2, 3, 4$; consider cercurile de similitudine a acestor cercuri luate câte două şi ale căror ecuaţii sunt:

$$(\Gamma_{ij}) \equiv (O_i) - \frac{R_i^2}{R_j^2}(O_j) = 0 \qquad (12)$$

ij fiind una din cele şase combinări ale indicilor 1, 2, 3, 4 luaţi câte doi.

Cu ajutorul interpretării în spaţiu, expuse mai sus, la cercurile (O_i) corespund puncte M_i, la cercurile (Γ_{ij}) corespund puncte M_{ij} respectiv pe dreptele $M_i M_j$ şi astfel că:

$$\frac{\overline{M_{ij} M_i}}{\overline{M_{ij} M_j}} = \frac{R_i^2}{R_j^2} \qquad (13)$$

Considerăm triunghiul $M_1 M_2 M_3$, avem:

$$\frac{\overline{M_{12} M_1}}{\overline{M_{12} M_2}} \cdot \frac{\overline{M_{23} M_2}}{\overline{M_{23} M_3}} \cdot \frac{\overline{M_{31} M_3}}{\overline{M_{31} M_1}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{R_2^2}{R_3^2} \cdot \frac{R_3^2}{R_1^2} = 1. \qquad (14)$$

Deci conform teoremei lui MENELAUS punctele M_{12}, M_{23}, M_{31} sunt colineare.

Analog se arată că cele şase puncte M_{ij} sunt trei câte trei colineare pe patru drepte. Deci sunt toate în acelaş plan P.

Revenind la interpretarea plană deducem:

Cele şase cercuri Γ_{ij} se grupează trei câte trei în patru fascicole lineare astfel:

$$(\Gamma_{12}, \Gamma_{23}, \Gamma_{31}), (\Gamma_{12}, \Gamma_{24}, \Gamma_{41}), (\Gamma_{23}, \Gamma_{34}, \Gamma_{42}), (\Gamma_{13}, \Gamma_{34}, \Gamma_{41}), \quad (15)$$

iar toate fac parte dintr'o aceeaşi reţea liniară.

Adică: *Cele şase cercuri de similitudine a patru cercuri luate câte două sunt ortogonale unui acelaşi cerc.*

Punctele M_{12}, M_{23}, M_{31} fiind în planul $M_1 M_2 M_3$, cercurile Γ_{12}, Γ_{23}, Γ_{31}, O_1, O_2, O_3 fac parte dintr'o aceeaşi reţea liniară, adică axa fascicolului liniar $(\Gamma_{12}, \Gamma_{23}, \Gamma_{31})$ trece prin centrul radical al cercurilor O_1, O_2, O_3.

Deci axele fascicolelor de mai sus (15) trec respectiv prin centrele radicale:

$$(O_1 O_2 O_3), (O_1 O_2 O_4), (O_2 O_3 O_4), (O_1 O_3 O_4) \qquad (16)$$

şi sunt concurente într'un punct Γ centrul cercului (Γ) ortogonal tuturor cercurilor Γ_{ij}.

4. Scriem ecuația planului P determinându-l cu punctele M_{12}, M_{13}, M_{14}:

$$P \equiv \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ a_1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} a_2 & b_1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} b_2 & c_1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} c_2 & 1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \\ a_1 - \frac{R_1^2}{R_3^2} a_3 & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 - \frac{R_1^2}{R_4^2} a_4 & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

determinant, care după proprietăți cunoscute, se poate pune sub forma, cu aproximația unor factori constanți:

$$P \equiv \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 & R_1^2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 & R_2^2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 & R_3^2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 & R_4^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Polul acestui plan P față de cuadrica S:
$F(x, y, z, t) \equiv x^2 + y^2 - zt = 0$ este un punct $\Pi(x_0, y_0, z_0, t_0)$ dat de:

$$\frac{F'_{x_0}}{\Delta_x} = \frac{F'_{y_0}}{\Delta_y} = \frac{F'_{z_0}}{\Delta_z} = \frac{F'_{t_0}}{\Delta_1} \quad (19)$$

unde Δ_x, Δ_y, Δ_z, Δ_1 sunt coeficienții lui X, Y, Z, 1 în desvoltarea determinantului dela (18).

Făcând $t_0 = 1$ și efectuând în (19) avem:

$$\frac{2x_0}{\Delta_x} = \frac{2y_0}{\Delta_y} = \frac{-1_0}{\Delta_z} = \frac{-z_0}{\Delta_1} \quad (20)$$

de unde

$$x_0 = -\frac{\Delta_x}{2\Delta_z}, \quad y_0 = -\frac{\Delta_y}{2\Delta_z}, \quad z_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta_z} \quad (21)$$

relații care determină în același timp cercul (Γ) dela paragraful 3.

Considerăm planul $M_2 M_3 M_4$ a cărui ecuaţie este:

$$P_1 \equiv \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{22}$$

polul său faţă de cuadrica S este un punct $\Pi_1 (m_1, n_1, p_1)$ dat de:

$$\frac{2m_1}{A_1} = \frac{2n_1}{B_1} = \frac{-1}{C_1} = \frac{-p_1}{D_1}, \tag{23}$$

unde A_1, B_1, C_1, D_1 sunt coeficienţii lui a_1, b_1, c_1, 1 în desvoltarea determinantului

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Avem deci şi cu notaţii analoage:

$$m_i = -\frac{\Delta_i}{2C_i}, \; n_i = -\frac{B_i}{2C_i}, \; p_i = \frac{D_i}{C_i} \tag{25}$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Aceste puncte $\Pi_i (m_i \, n_i \, p_i)$ reprezintă în spaţiu cercurile ortogonale Γ_i la câte trei din cercurile O_1, O_2, O_3, O_4.

Observăm că determinanţii Δ_x, Δ_y, Δ_z, Δ_1 (cu semnul lor) desvoltaţi după ultima lor coloană se scriu

$$\begin{aligned} \Delta_x &= -R_1^2 A_1 - R_2^2 A_2 - R_3^2 A_3 - R_4^2 A_4 \\ \Delta_y &= \; R_1^2 B_1 + R_2^2 B_2 + R_3^2 B_3 + R_4^2 B_4 \\ \Delta_z &= -R_1^2 C_1 - R_2^2 C_2 - R_3^2 C_3 - R_4^2 C_4 \\ \Delta_1 &= -R_1^2 D_1 - R_2^2 D_2 - R_3^2 D_3 - R_4^2 D_4 \end{aligned} \tag{26}$$

în care ţinând seama de formulele (25) şi introducând în (21) avem parametrii cercului (Γ):

$$x_0 = \frac{\Sigma C_i R_i^2 m_i}{\Sigma C_i R_i^2}$$

$$y_0 = -\frac{\Sigma C_i R_i^2 n_i}{\Sigma C_i R_i^2} \qquad (27)$$

$$z_0 = \frac{\Sigma C_i R_i^2 p_i}{\Sigma C_i R_i^2},$$

iar raza cercului (Γ) e dată de:

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0$$

$$= \frac{\Sigma C_i^2 R_i^4 (m_i^2 + n_i^2 - p_i) + \Sigma C_i C_j R_i^2 R_j^2 (2 m_i m_j + 2 n_i n_j - p_i - p_j)}{(\Sigma C_i R_i^2)^2} \qquad (28)$$

5. Ţinând seama de interpretarea plană a punctelor Π_i (m_i, n_i, p_i) să considerăm următoarele două cazuri particulare.

α) Fie $m_i^2 + n_i^2 - p_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

In acest caz cercurile (Γ_i) se reduc la patru puncte Γ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, iar cercurile (O_i) ortogonale la câte trei din cercurile (Γ_i) devin cercurile determinate de câte trei din cele patru puncte Γ_i. Problema se reduce la o problemă tratată de D-l Prof. D. BARBILIAN în „Articol de geometrie" din G. M. Vol. XXXVII, pag. 81. Folosind acele rezultate *se ştie că cercurile* (O_i) *în aceste condiţii sunt văzute sub un acelaşi unghiu dintr'un anumit punct:* adică cele şase cercuri de similitudine (Γ_{ij}) se întâlnesc într'un acelaşi punct — sau sunt ortogoale unui cerc (Γ) de rază nulă. Deci trebuind ca $x_0^2 + y_0^2 - z_0 = 0$ avem următoarea relaţie metrică

$$\Sigma C_i C_j R_i^2 R_j^2 (2m_i m_j + 2n_i n_j - p_i - p_j) = 0. \qquad (29)$$

Sau ţinând seama de condiţiile (α) avem:

$$2m_i m_j + 2 n_i n_j - p_i - p_j = -\overline{\Gamma_i \Gamma_j}^2$$

deci (29) se scrie:

$$\Sigma C_i C_j R_i^2 R_j^2 \overline{\Gamma_i \Gamma_j}^2 = 0 \qquad (30)$$

în care coeficienţii C_i sunt dublul suprafeţelor triunghiurilor ce se pot forma cu punctele O_i, încât formula (30) are o intrepretare geometrică.

Paralel deducem pentru spaţiu următoarele:

Din relaţiile (α) punctele Π_i sunt pe cuadrica S. Cum aceste puncte sunt polurile planurilor ce se formează cu punctele M_i, rezultă că tetraedrul $M_1 M_2 M_3 M_4$ e circumscris cuadricei S; cum în acest caz şi punctul Π e pe cuadrica S, căci $x_0^2 + y_0^2 - z_0 = 0$, rezultă că planul P e tangent în Π la S adică avem următoarea proprietate de geometrie în spaţiu:

Dacă tetraedrul determinat de punctele $M_i(a_i, b_i, c_i)$ $i = 1, 2, 3, 4$ *e circumscris cuadricei* $x^2 + y^2 - z = 0$ *atunci planul:*

$$P \equiv \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 & a_1^2 + b_1^2 - c_1 \\ a_2 & & & & \\ a_3 & & & & \\ a_4 & & & & \end{vmatrix} = 0 \qquad (31)$$

este tangent aceleeaşi cuadrice.

β) Fie $2m_i m_j + 2n_i n_j - p_i - p_j = 0$; $i, j = 1, 2, 3, 4$.

In acest caz cercurile (Γ_i) sunt ortogonale două câte două şi deci se confundă cu cercurile (O_i). Adică

$$\Gamma_i(m_i, n_i, p_i) \equiv O_i(a_i, b_i, c_i).$$

Atunci formulele (25) devin:

$$a_i = -\frac{A_i}{2C_i}, \quad b_i = -\frac{B_i}{2C_i}, \quad c_i = \frac{D_i}{C_i} \qquad (32)$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Să desvoltăm determinantul D după una din linii avem:

$$D = (a_i A_i + b_i B_i + c_i C_i + D_i)(-1)^{i-1}. \qquad (33)$$

In care ţinând seama de (32), avem:

$$D = (-1)^{i-1}(-2C_i)(a_i^2 + b_i^2 - c_i)$$

sau

$$D = (-1)^i 2C_i R_i^2$$

adică

$$D = -2C_1 R_1^2 = 2C_2 R_2^2 = -2C_3 R_3^2 = 2C_4 R_4^2. \qquad (34)$$

Cu acestea se vede că formulele (26) devin, ţinând seama de forma lor din (27):

$$\Delta_x = +D(-a_1 + a_2 - a_3 + a_4)$$
$$\Delta_y = -D(-b_1 + b_2 - b_3 + b_4)$$
$$\Delta_z = \frac{D}{2} - \frac{D}{2} + \frac{D}{2} - \frac{D}{2} = 0 \qquad (35)$$
$$\Delta_1 = +D(-c_1 + c_2 - c_3 + c_4).$$

Rezultă de aci că polul Π (x_0, y_0, z_0) al planului P este la infinit de unde interpretarea plană:

Cercurile Γ_{ij} sunt ortogonale unui cerc de rază infinită adică: *Cele şase cercuri de similitudine a patru cercuri două câte două ortogonale au centrele pe o aceeaşi dreaptă.*

Paralel, pentru spaţiu deducem următoarele, ţinând seama de punctul *b* dela paragraful 2: *Dacă tetraedrul determinat de punctele* M_i (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, 3, 4$ *este conjugat cuadricei* $x^2 + y^2 - z = 0$ *atunci planul* P *de ecuaţie (31) este un plan diametral al cuadricei.*

AD. GHEORGHIU.

RAPORTUL COMISIUNEI
PENTRU
ACORDAREA PREMIULUI „GENERAL SC. PANAITESCU"
PE ANUL 1936—1937.

Subsemnaţii, membri ai Comisiunei pentru decernarea premiului pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare, cercetând revistele militare de arme speciale, precum şi lucrările apărute în intervalul 1.IX.1936—24. VIII.1937, care să trateze astfel de chestiuni, am constatat următoarele:

I. *Au apărut:*

1. In *„Revista Artileriei"* următoarele articole:

a) *„Cum se face o hartă. Observaţiuni şi concluziuni necesare artileriştilor"*, de Lt. PETRACHE I.

b) *„O problemă de topografie"*, de Lt. NEGOIŢĂ PANAIT.

2. In *„Revista Aeronauticei şi Marinei"*, articolul *„Asupra unei probleme de Cinematică Navală"* de Lt. C. V. COSTĂCHESCU.

3. In „*Revista Geniului*“, articolul „*Studii geohidrologice*“. *Despre pompe* de Lt. AUREL ŞTEFĂNESCU.

4. *O lucrare litografiată* la Şcoala de Aplicaţie a Artileriei, Timişoara, de Căpitanii BĂNULESCU MIHAIL şi DRAGOMIRESCU-BUZNE, intitulată: „*Construcţii de Guri de Foc*“.

II. *Analizând publicaţiile* de mai sus, comisiunea a apreciat ca cea mai de seamă lucrare „Construcţii de Guri de Foc“ a D-lor Căpitani BANULESCU şi DRAGOMIRESCU-BUZNE.

Această lucrare cuprinde 2 volume:

Vol. I: Dimensionarea ţevei.

Vol. II: Dimensionarea frânelor de tragere, precum şi 3 anexe:

Anexa No. 1: Date numerice şi planşe pentru diferite ţevi de tun în serviciu.

Anexa No. 2: Notaţiuni, valori numerice şi table balistice.

Anexa No. 3: Aplicaţiuni numerice pentru construcţia diferitelor elemente ale unei guri de foc.

Volumul I. (Dimensionarea ţevei) are 7 capitole, în care se tratează pe larg:

— studiul rezistenţei ţevei, interiorul ţevei,

— dimensionarea elementelor de legătură, dimensionarea închizătorului,

— determinarea greutăţei ţevei şi a centrului de greutate.

Volumul II. (Dimensionarea frânei de tragere) are 6 capitole, tratând:

— studiul reculului teoretic,

— calculul rezistenţei frânei de tragere,

— studiul reculului real,

— dimensionarea elementelor frânei de tragere şi verificarea frânei de tragere.

Lucrarea, conţinând o largă aplicaţiune matematică la ştiinţele militare, cu o specială documentare matematică, formează o adevărată podoabă a technicei artileristice şi apreciem că merită a i se acorda premiul «GENERAL SCARLAT PANAITESCU» pe anul 1936—1937.

Ing. D. STOICA, Ing. AL. BUNESCU,
Col. GH. LITEANU.

Acest raport s'a citit şi s'a aprobat în şedinţa Adunării generale din 27 Aug. 1937.

NOTE MATEMATICE

4. **Acum o sută de ani în lumea matematică.** *Date culese în biblioteca Seminarului Matematic din Iaşi din revistele timpului.*

Prima metodă a lui JACOBI în teoria ecuaţiunilor cu derivate parţiale de ord. I. *Journal für reine und angewandte Mathematik* (Crelle) Bd. 17 (1837). Cităm: „... După cât ştiu, tot ce se cunoaşte în teoria ecuaţiunilor cu derivate parţiale de ord. I-iu, este conţinut în lecţiunile lui LAGRANGE despre calculul funcţiunilor şi într'un memoriu al lui PFAFF din „Memoriile Academiei de Ştiinţe" din Berlin 1814. LAGRANGE se mărgineşte în cercetările sale la ecuaţiuni cu derivate parţiale de ord. I cu trei variabile, din care una este funcţiunea necunoscută de celelalte două considerate ca independente. In vol. II al acestui Journal, am căutat să expun într'o formă mai simetrică şi mai clară — fără să adaog nimic esenţial — metoda lui PFAFF, care se extinde la ecuaţiuni cu derivate parţiale de ord. I-iu cu un număr oarecare de variabile...

Vom arăta mai departe că, dacă se urmează metoda lui HAMILTON, se ajunge la rezultatul general că pentru integrarea unei ecuaţiuni cu derivate parţiale de ord. I cu un număr oarecare de variabile, este suficientă integrarea completă a primului sistem de ecuaţiuni diferenţiale ordinare construit de PFAFF; şi nu este nevoie, cum cerea metoda acestui analist, să mai integrăm după aceea complet încă un şir de sisteme de ecuaţiuni diferenţiale ordinare...

5. *O teoremă de Geometrie elementară.*

D-l Profesor D. POMPEIU a demonstrat[1]) cu ajutorul cantităţilor imaginare următoarea remarcabilă teoremă de Geometrie elementară:

Dacă în planul unui triunghiu echilateral ABC *se ia un punct arbitrar* M, *dreptele* MA, MB, MC *sunt laturile unui triunghiu.*

Acestei teoreme i s'au dat imediat demonstraţiuni elementare[2]).

---

1) Bull. de l'Ecole Polytéchnique de Bucarest (1934—35, VI année, p. 6).
2) Idem, VII année, p. 3, 4 şi 5.

Vreau să observ însă că demonstrațiile date de D-nii: Profesori N. OBRECHKOFF (Sofia) și HAROLD HILTON (Londra) sunt insuficiente. (A doua ne era chiar cunoscută, dela Sem. de Matematici din Cluj, unde D-l Prof. POMPEIU ne-a expus pentru prima oară teorema D-sale). In adevăr, ambele se bazează pe un caz de figură în care punctul M are o poziție favorizată față de o anumită latură a triunghiului ABC. Autorii deci, demonstrează neegalitatea

$$MA + MB > MC,$$

dar aceasta nu este suficient. Mai trebuesc demonstrate neegalitățile analoage

$$MA + MC > MB, \quad MB + MC > MA,$$

ceeace D-lor nu au făcut și cari nu rezultă în mod necesar din prima.

Incercând o extindere a teoremei D-lui POMPEIU, am obținut următoarea proprietate, pe care însă nu am demonstrat-o suficient nici eu:

Dacă în planul unui triunghiu oarecare ABC *se ia un punct* M *în interiorul unghiului celui mai mare al triunghiului* (exterior acestuia), *dreptele* MA, MB, MC *sunt laturile unui triunghiu.*

Fie, de exemplu, B cel mai mare unghiu al triunghiului.

Aplicând teorema lui PTOLEMEU patrulaterului MABC, obținem neegalitatea

$$(1) \qquad MA \cdot BC + MC \cdot AB > MB \cdot AC,$$

din care deducem una din următoarele

$$(\alpha) \quad BC\,(MA+MC-MB)+MC\,(AB-BC)>MB\,(AC-BC),$$

$$(\beta) \quad AB\,(MA+MC-MB)+MA\,(BC-AB)>MB\,(AC-AB).$$

Cum, prin ipoteză, AC este latura cea mai mare, urmează că în ambele neegalități (α) și (β), membrul al doilea este pozitiv și atunci, fie că $AB > BC$, fie că $AB < BC$, una din aceste două neegalități ne permite a scrie:

$$MA + MC > MB.$$

Mai trebuesc demonstrate însă și celelalte două neegalități, analoage acesteia, ceeace propunem colegilor și corespondenților Gazetei. Este posibil iarăși ca enunțul să fie ameliorat sau chiar infirmat.

M. G.

6. *Soluția geometrică a problemei 4721. G. M. XLII — 602, a D-lui Prof.* N. ABRAMESCU.

1°. Dreptele OM_1, OM_2, simetrice față de Oy, sunt *raze omoloage a două fascicole în involuție.* Ducând o conică (C), arbitrară prin O, care le întâlnește în M_1 și M_2, *dreapta* M_1M_2 *trece printr'un punct fix*, după teorema FRÉGIER. Dacă M_1, M_2 se confundă în O sau pe Oy în N, M_1M_2 devine tangentă la (C), punctul fix T este deci intersecția tangentelor din O și N, sau *polul dreptei* Oy, față de conica (C).

2°. Fie M' mijlocul coardei M_1M_2 și C centrul conicei (C). Razele TM', CM' sunt *în corespondență omografică:* în adevăr, fiind dat TM', CM' se determină imediat; dar și invers, fiind dat diametrul CM', paralela din T la diametrul conjugat lui, va da pe TM'. Deci M' *va descrie o conică* (C') *trecând prin* T *și* C. Punctele dela infinit ale conicei (C') vor fi date de razele CM', TM' paralele, adică de direcțiile ce coincid cu conjugatele lor, deci de asimptotele conicei (C). In concluzie, *conicele* (C) *și* (C') *sunt de aceeași natură,* cu asimptotele paralele.

Tangenta Tu în T la (C'), este omoloagă, în omografia considerată, a razei TC, adică paralelă cu diametrul conjugat, sau cu polara, deci *paralelă cu* Oy. E lesne de asigurat, din definiția ei ca loc geometric, că conica (C') mai *trece prin* O *și* N.

Conica fiind determinată prin patru puncte și o tangentă, se poate face construcțiile rezultând din teorema PASCAL degenerată; de ex., pentru a afla tangenta în O, fie

$$\alpha \equiv (TU, OC)\ ,\ \beta \equiv (NC, Ox)\ ,\ \gamma \equiv (\alpha\beta, TN);$$

tangenta este $O\gamma$.

3°. Dar fie N' intersecția cu conica (C) a paralelei din N la Ox; V și V' mijloacele segmentelor NN' și ON; diametrul conjugat direcției Ox în (C) este evident OV și *centrul* C *al conicei este pe mediana* OV. Analog, centrul C' al conicei (C') este pe TV, și cum (C') trece prin T și C, va fi *la mijlocul lui* TC; tangentele la capetele unui diametru fiind paralele, *tangenta în* C *este paralelă cu* Oy. Rezultă tot de aici: *segmentele paralele cu* Ox, *respectiv* Oy, *interceptează segmente egale între conica* (C) *și triunghiul* NON', *respectiv conica* (C') *și triunghiul* NTO.

Fascicolele T (OCNU) şi O (TNVN') fiind evident armonice deci egale şi cu raza OT comună, restul intersecţiilor sunt colineare; dar (TC, ON) = V' şi (TN, OC) = Z sunt aşezate pe polara punctului $\beta \equiv (Ox, NC)$, care intersectează tangenta în T — unde concură şi ON' — în polul dreptei Ox, adică intersecţia tangentelor în T şi O; deci ON' *este tangentă în* O *la* (C'): limita dreptei ce uneşte pe O cu mijlocul coardei M_1M_2, când M_1, M_2 tind spre O. Se deduce de asemenea că tangenta în N la (C'), trece prin intersecţia V'Z cu tangenta în C. Z este polul dreptei NN' faţă de (C), fiind situat pe diametrul conjugat OCV şi pe tangenta în N, deci ZN' *este tangenta în* N' *la conica* (C); fie T' intersecţia ZN' cu Ox; ZV, mediană în NZN', va fi mediană şi în TZT' deci T *şi* T' *sunt simetrice faţă de* O.

4°. Propoziţiile nu se modifică cu nimic, dacă T este oricum situat faţă de conica (C). Particularitatea problemei constă în a fi luat tangenta Ox şi polara Oy perpendiculare. Problema 4721 pune deci în evidenţă locul geometric al mijloacelor coardelor trecând printr'un punct fix. Mai trebue observat că deşi M_1, M_2 sunt uneori imaginare, mijlocul distanţei M_1M_2 este totdeauna real şi M' descrie conica (C') în întregime. Conica (C') variază şi cu poziţia lui T. Ea se reduce la un punct când T este centrul conicei; la o dreaptă, când T este la infinit: diametrul conjugat direcţiei; la o conică omotetică în raportul $^1/_2$ de centru T, când T este chiar pe conică.

5°. Făcând o transformare prin polare reciproce în raport cu (C), în care scop vom privi pe M' ca conjugatul punctului dela infinit al segmentului M_1M_2, conica transformată, tangentă polarei lui C, deci dreptei dela infinit este o parabolă; T devine polara ON; M_1, M_2, tangentele în aceste puncte concurente în M; iar M', conjugata diametrului MC', deci paralelă cu TM_1M_2. Se obţine. M *fiind un punct variabil pe latura* ON *a triunghiului* TON, *paralela din* M *la polara lui, faţă de dreptele* TO, TN *înfăşoară o parabolă înscrisă triunghiului* TON, *tangentă laturei* ON *în mijlocul ei* V' *şi cu axa paralelă cu* TV'.

Am regăsit astfel parabola din G. M. XLI—611.

N. N. MIHĂILEANU.

7. *Calculul unor sume.* Imi propun să calculez sumele:

(1) $\quad S_m^k = 1^k C_m^1 + 2^k C_m^2 + 3^k C_m^3 + \ldots + m^k C_m^m.$

Pentru aceasta voiu căuta o relaţie de recurenţă care să permită calculul din aproape în aproape a sumelor de forma (1).

Observăm că putem scrie:

$$S_m^k = m\left(1^{k-1} C_{m-1}^0 + 2^{k-1} C_{m-1}^1 + 3^{k-1} C_{m-1}^2 + \ldots + m^{k-1} C_{m-1}^{m-1}\right)$$

$$= m \sum_{p=1}^{m} p^{k-1} C_{m-1}^{p-1} = m \sum_{p=1}^{m} p^{k-1} \left(C_m^p - C_{m-1}^p\right)$$

$$= m \sum_{p=1}^{m} p^{k-1} C_m^p - m \sum_{p=1}^{m} p^{k-1} C_{m-1}^p.$$

$\therefore \quad$ (2) $\quad S_m^k = m\left(S_m^{k-1} - S_{m-1}^{k-1}\right).$

Aceasta este relaţia de recurenţă, din care rezultă:

$$S_m^1 = m\left(S_m^0 - S_{m-1}^0\right) = m\left(2^m - 2^{m-1}\right) = m \cdot 2^{m-1}$$

$$S_m^2 = m\left(S_m^1 - S_{m-1}^1\right) = m\left[m \cdot 2^{m-1} - (m-1) \cdot 2^{m-2}\right] = m(m+1)\, 2^{m-2}$$

Continuând calculul, găsim:

$$S_m^3 = m^2(m+3) \cdot 2^{m-3} \quad ; \quad S_m^4 = m(m+1)(m^2+5m-2) \cdot 2^{m-4}$$

$$S_m^5 = m^2(m^3+10m^2+15m-10) \cdot 2^{m-5} \quad ;$$

$$S_m^6 = m(m+1)(m^4+14m^3+31m^2-46m+16) \cdot 2^{m-6}$$

$$S_m^7 = m^2(m^5+21m^4+105m^3+35m^2-210m+112) \cdot 2^{m-7}$$

$$S_m^8 = m(m+1)(m^6+27m^5+183m^4+97m^3-832m^2+860m-272) \cdot 2^{m-8}.$$

Din cele de mai sus, rezultă că se poate scrie în general: $S_m^k = P_k(m) \cdot 2^{m-k}$, unde $P_k(m)$ este un polinom în m de gradul k, *căruia îi lipseşte ultimul termen sau ultimii doi termeni, după cum k este par sau impar.*

Observaţiuni. a) Dacă în (2) înlocuim pe $S_m^k = P_k(m) \cdot 2^{m-k}$, etc. găsim o relaţie de recurenţă între polinoame:

(3) $\quad P_k(m) \equiv 2m\, P_{k-1}(m) - m\, P_{k-1}(m-1).$

b) Dacă în identitatea

$$P_k(m) \cdot 2^{m-k} \equiv 1^k C_m^1 + 2^k C_m^2 + \ldots m^k C_m^m$$

facem $m = 1$, obţinem:

$$P_k(1) \cdot 2^{1-k} = 1 \quad \text{sau:} \quad P_k(1) = 2^{k-1},$$

adică suma tuturor coeficienţilor polinomului $P_k(m)$ este 2^{k-1}.

GH. D. SIMIONESCU.

8. *In legătură cu problema 4624*[1]). In problema 4624 s'a cerut să se calculeze suma

$$1+2(1+2)+3(1+2+3)+\ldots+n(1+2+3+\ldots+n).$$

Fie în general un şir de numere oarecare $a_1, a_2, \ldots a_n$. Ne propunem a calcula suma

$$S = a_1 + a_2(a_1+a_2) + \ldots + a_n(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Notând cu

$$S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$S_2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

se observă uşor că

$$S_1^2 = S_2 + 2S_1^2 - 2S - 2a_1(a_1-1)$$
$$\therefore \quad S = \tfrac{1}{2}(S_1^2+S_2) - a_1(a_1-1) \qquad (1)$$

Formula (1) rezolvă complect problema generală atunci când se cunosc S_1 şi S_2, *ori care ar fi legea de formare a numerelor* a_i.

Aplicaţiuni. 1°. *Cazul problemei 4624* unde $a_1 = 1$ şi

$$S_1 = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2 = 1+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

care duse în (1) dau

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$$

rezultat găsit în generalizările publicate în Volumul XLI şi XLII.

2°. Cazul unei progresii aritmetice cu primul termen **a** *şi cu raţia* **r**. Avem

$$S_1 = n\left(a + \frac{n-1}{2}r\right)$$

$$S_2 = na^2 + n(n-1)ar + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}r^2$$

$$\therefore \quad S = \frac{n(n+1)}{24}[(n-1)(3n-2)r^2 + 12a[a+(n-1)r]] - a(a-1).$$

---

[1]) A se vedea generalizările de la pag. 449, 527, 626 Vol. XLI şi pag. 528 Vol. XLII.

3°. Cazul unei progresii geometrice.

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{a^2(r^n-1)^2}{(r-1)^2} + \frac{a^2(r^{2n}-1)}{r^2-1}\right] - a(a-1).$$

4°. *Cazul şirurilor formate de* **cos nx** *şi* **sin nx** *în care* **n** *creşte în progresie aritmetică de raţie* 1.

Avem pentru cele 2 şiruri respectiv

$$S_1 = \frac{\cos\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \; ; \quad S_1' = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

de unde se calculează S_2 şi S_2' exprimând linia trigonometrică în funcţie de îndoitul ei prin relaţiunile

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}$$

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}$$

şi găsim

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos^2\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{\cos(n+1)x \sin(nx)}{\sin x} + \frac{n}{2}\right] - \cos x(\cos x - 1)$$

$$S' = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x \sin^2\frac{nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{\cos(n+1)x \sin(nx)}{\sin x} + \frac{n}{2}\right] - \sin x(\sin x - 1).$$

Ca aplicaţie se poate calcula

$$S'' = \sum_1^n i\cos(ix)$$

şi se găseşte

$$S'' = \frac{2n\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{x}{2} - \sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{n}{2}.$$

S-LT. SILVIAN M. ŢILENSCHI.

9. *Asupra problemei 4567 (G. M. XLI pag. 595).*

In această problemă se cere să se demonstreze inegalitatea:

$$a_{p-1} < a_p + a_{p+1},$$

a_{p-1}, a_p, a_{p+1} fiind laturile poligoanelor regulate de $(p-1)$, p, $(p+1)$ laturi înscrise în cercul de rază R.

Voi da acestei probleme o soluţie geometrică simplă care restrânge inegalitatea.

Notăm cu arc a_p cel mai mic dintre cele două arce de coardă a_p din cercul de rază R — avem:

$$\text{arc } a_{p-1} = \frac{2\pi}{p-1} \qquad \text{arc } a_p = \frac{2\pi}{p}$$

deci

$$\text{arc } a_{p-1} - \text{arc } a_p = \frac{2\pi}{p(p-1)} = \text{arc } a_{p(p-1)}.$$

Cu alte cuvinte în cercul de rază R se poate înscrie un triunghiu având ca laturi pe a_{p-1}, a_p, a_{p+1} şi deci:

$$a_{p-1} < a_p + a_{p(p-1)}$$

inegalitate care rezolvă problema căci;

$$a_{p(p-1)} < a_{p+1}.$$

Pentru a se vedea cât de mult s'a restrâns inegalitatea vom considera cazul $p = 4$, când avem:

$$a_3 < a_4 + a_{12}.$$

In mod analog putem stabili şi inegalitatea

$$a_{pk} < a_{(p+1)k} + a_{p(p+1)k},$$

în care k este un număr întreg şi pozitiv oarecare.

MIRCEA ADAM
Constanţa.

10. *Asupra problemei 4658.* (G. M. XLII. pag. 374).

In cele ce urmează, ne propunem să stabilim o formă mai generală pentru identitatea care formează obiectul acestei probleme, precum şi unele identităţi analoage.

1°. Plecăm dela relaţia:

$$\cos a + \cos b + \cos c = -\cos k + 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2},$$

unde a, b, c sunt arce oarecare şi $a+b+c=k$, cu ajutorul căreia se stabileşte fără greutate:

$$\Sigma\cos^2(a-b)=\tfrac{1}{2}\Sigma[1+\cos 2(a-b)]=1+2\cos(a-b)\cos(b-c)\cos(c-a)$$

şi

$$\Sigma\cos(a+b)\cos(a-b)=\Sigma\cos 2a=-\cos 2k+4\cos(a+b)\cos(b+c)\cos(c+a),$$

relaţii, care adunate membru cu membru, dau:

$$(1)\qquad \Sigma\cos a\cos b\cos(a-b)$$
$$=\sin^2 k+\cos(a-b)\cos(b-c)\cos(c-a)+2\cos(a+b)\cos(b+c)\cos(c+a),$$

iar scăzute una din alta:

$$(2)\qquad \Sigma\sin a\sin b\cos(a-b)$$
$$=\cos^2 k+\cos(a-b)\cos(b-c)\cos(c-a)+2\cos(a+b)\cos(b+c)\cos(c+a).$$

Dacă în (1) facem $a=A$, $b=B$, $c=C$, obţinem identitatea care face obiectul problemei 4658:

$$(3)\qquad \sum\frac{\cos(B-C)}{\cos A}+2=\frac{\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)}{\cos A\cos B\cos C},$$

iar dacă în (2) facem $a=\frac{A}{2}$, $b=\frac{B}{2}$, $c=\frac{C}{2}$, obţinem o identitate asemănătoare:

$$(4)\qquad \sum\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+2=\frac{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

(probl. 29.X. Culegere de probleme Trigonometrie Ed. II).

2°. Urmând aceeaşi cale şi folosind relaţia:

$$\sin a + \sin b + \sin c = \sin k + 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2},$$

se poate stabili fără greutate:

(5) $\Sigma \cos a \cos b \sin (a-b) = -\sin (a-b) \sin (b-c) \sin (c-a)$,

identitate din care, dacă înlocuim pe a prin $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ etc., obţinem:

(6) $\Sigma \sin a \sin b \sin (a-b) = -\sin (a-b) \sin (b-c) \sin (c-a)$.

(probl. 15.IX. Culegere de probleme Trigonometrie Ed. II).

In cazul triunghiului, identităţile (5) şi (6) păstrează acelaşi aspect.

3°. In mod analog se mai pot stabili relaţiile:

(7) $\Sigma \sin a \cos b \cos (a-b) = \Sigma \cos a \sin b \cos (b-a)$
$= \frac{1}{2} \sin 2k + 2 \sin (a+b) \sin (b+c) \sin (c+a) - \sin (a-b) \sin (b-c) \sin (c-a)$

şi

(8) $\Sigma \sin a \cos b \sin (a-b) = \Sigma \cos a \sin b \sin (b-a)$
$= 1 - \cos (a-b) \cos (b-c) \cos (c-a)$.

MIRCEA ADAM
Constanţa.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXIII. Fascicola VI. Iunie 1937. Buenos-Aires. Conturi şi selecţie economică de M. DURRIEU.

Idem. Tom. CXXIV. Fascicola II. August 1937. Buenos-Aires. Fundamente matematice ale muzicei (continuare) de A. E. SAGASTUME BERRA. Subordonarea metricei neeuclidiene geometriei proiective de E. A DE CESARE. Regulamente asupra construcţiilor de beton armat de O. GOTTSCHALK. Variaţiuni posibile ale suprafeţei pământului de G. SGHULZ.

Anuario. Nr. 26 şi 27. La Plata. Argentina. Planuri de studii şi programe de ştiinţe fizico-matematice. 1936—1937.

Boletin Matematico. Anul X. Nr. 1. Martie 1937. Buenos-Aires.

Bulletin de la Section Scientifique de l'Academie Roumaine. XIX-ème Année Nr. 1—3. Bucureşti. Asupra undelor seismice P. S. de G. DEMETRESCU.

Buletinul Institutului Român pentru Betoane, Construcţii şi Drumuri. Anul II. Nr. 4—6. Aprilie-Iunie 1937.

Preciziunea încercărilor de laborator pentru ciment de Ing. C. C. TEODORESCU. Studiul tălpilor de fundaţie în beton armat de Ing. D. STAN.

Idem. Nr. 7—9. Iulie-Septemvrie 1937. Problema drumurilor noastre de Ing. N. PROFIRI.

Deutsche Matematik editat de THEODOR VAHLEN. Anul II. Caietul II. Mai 1937.

Asupra semi-invarianţilor de formă binară de R. WEITZENBÖCK.

Contribucion al Estudio de las Ciencias Fisicas y Matemáticas. (seria matematică). Vol. I. Fascicola 4. Decemvrie 1936. La Plata. Asupra automorfismelor grupelor finite şi clasificarea structurală a acestor grupe, de A. E. SEGASTUME BERRA. Proprietăţi de convergenţă a integralelor duble LAPLACE-STIELTJES de A. DURANONA Y. VEDIA — C. A. TREJO. Asupra metodei de însumare a lui SANNIA-KNOPP de J. C. VIGNAUX. Interpretarea geometrică a derivatei radiale a unei funcţii complexe de 2 variabile de J. C. VIGNAUX.

Numerus. Revistă de matematici elementare. Vol. 3. Caietul 26. Sept. 1937. Bucureşti.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVII. Nr. 7. Septemvrie 1937. O problemă de Geometrie de G-L GH. BUICLIU.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Anul VII. Nr. 10. Octomvrie 1937. Bruxelles.

E. ABASON. Articol asupra triunghiului echilateral. (Extras din *Gazeta Matematică*). Bucureşti 1937.

N. ABRAMESCU. *Lecţiuni elementare de Algebră superioară*, pentru cl. VIII-a ştiinţifică, Ediţia VI. Bucureşti 1937. Preţul 120 lei.

N. ABRAMESCU. *Algebra financiară.* Pentru clasa VII-a a liceelor comerciale. Bucureşti 1937.

MAIOR I. LINTEŞ. *Comparaţie între bombardamentul cu avionu şi cu tunu.* (Extras din Revista Artileriei Nr. 2. 1937).

MAIOR I. LINTEŞ. *Observaţiuni asupra tragerilor care se execută pentru determinarea preciziunei unei guri de foc.* (Extras din Revista Artileriei. Nr. 5—6, 1937.

W. F. OSGOOD. *Functions of real variables.* University Press, The national University of Peking, 1936.

Acest volum al marelui matematician american OSGOOD cuprinde lecţiunile pe care el le-a făcut la Peking în iarna anului 1934—35. Primul capitol

cuprinde seriile şi produsele infinite şi se închee cu seria ipergeometrică. Al doilea capitol tratează despre numerele raţionale şi iraţionale. Al treilea studiază mulţimile de puncte. Vin apoi la rând noţiunile de derivată, integrală funcţiune implicită, serii de funcţiuni, convergenţă uniformă, funcţiuni elementare, serii de puteri, serii FOURIER, integrale definite şi curbilinii, funcţiunea gama, ecuaţii diferenţiale.

Mai interesantă de cât înşiruirea de materii pe care am dat-o mai mult ca o idee generală, este metoda de tratare. D-l OSGOOD are o expunere fericită, în acelaş timp strânsă şi limpede. E un minunat manual pentru o pregătire temeinică.

G. Ţ.

W. F. OSGOOD. *Functions of a complex variable.* University Press, The national University of Peking, 1936.

Şi acest volum ca şi cel de mai sus, amândouă admirabil tipărite şi frumos legate, e rezultatul unor lecţii făcute în China. Iată materiile tratate: Numere complexe, noţiunea de funcţiune analitică, transformarea lineară, reprezintarea conformă, suprafeţele lui RIEMANN, teoria lui CAUCHY, teoria lui WEIERSTRASS, prelungirea analitică, potenţial logaritmic, reprezintarea conformă a unei regiuni simplu conexă.

Volumul are aceleaşi calităţi de expunere ca şi cel precedent.

G. Ţ.

CERERI

270. In 1864 a apărut la Sibiu o „*Tabelă de reducţie a piaştrilor şi paralelor în valută austriacă şi viceversa*".

Există vre-o publicaţiune română, la care să se fi întrebuinţat mai înainte cuvântul „*Valută*"?

I. I.

DIVERSE

Sporirea bibliotecii.

CH. GALOPIN-SCHAUB. Questions de maxima et de minima. Théorie et Exercices. Geneva şi Paris 1890.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

MILES A. DAWSON. Necessary caution For the Guidance of Mathematicians in Dealig with Actuarial Problems.
The Cronicle Company. New York.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

Distilarea cărbunilor de I. L. BLUM.
Donată de Institutul Român de Energie. No. 91.

Industrii chimice bazate pe cărbuni de EMIL E. CASIMIR.
Donată de I. R. E. No. 92.

Rezolvări constructive în vederea combustiunii cu randament maxim posibil al cărbunilor de CORNEL MIKLÓȘI.
Donată de I. R. E. No. 93.

Folosirea cărbunelui pentru scopuri industriale și domestice de I. ARAPU.
Donată de I. R. E. No. 94.

Problemele cărbunilor în România sub aspectul valorificării lor pentru scopuri vechi și noui de I. E. BUJOIU.
Donată de I. R. E. No. 95.

Ameliorarea cărbunilor din punct de vedere al consumatorilor de G. M. VĂTĂMANU.
Donată de I. R. E. No. 96.

Politica petrolului în funcție de situația explorărilor și problema combustibilului de ION BOSGAN.
Donată de I. R. E. No. 97.

Die Bemessung von überspannungsableitern und ihre Bedeutung für dem electrischen Siecherheitsgrad de D. MÜLLER-HILLEBRAND.
Donată de I. R. E. No. 98.

Anteproiect pentru alimentarea municipiului București cu gaz de sonde de I. ARAPU.
Donată de I. R. E. No. 100.

Valorificarea cărbunilor. (Comunicări și discuțiuni). Vol. I.
Donată de I. R. E. No. 101.

Valorificarea cărbunilor. (Comunicări și discuțiuni). Vol. II.
Donată de I. R. E. No. 102.

Instalațiuni și mașini hidraulice. Vol. I. de DORIN PAVEL.
Donată de I. R. E. No. 103.

Instalațiuni și mașini hidraulice. Vol. II. de DORIN PAVEL.
Donată de I. R. E. No. 104.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4437. *Să se găsească curba la care tangenta dusă într'un punct oarecare taie pe axa* x-*lor patratul porţiunei de pe axa* y-*lor.*

GH. VASILIU.

Soluţie dată de D-nul G. G. CONSTANTINESCU:

Ecuaţia tangentei într'un punct oarecare la curbă fiind:

$$Y - y = y'(X - x)$$

vom avea respectiv pentru porţiunile determinate de ea pe axa absciselor şi axa ordonatelor:

$$\frac{xy' - y}{y'} \quad \text{şi} \quad y - xy'$$

aşa încât ecuaţia diferenţială a problemei este:

$$xy' - y = y'(y - xy')^2$$

şi deci se compune din următoarele două ecuaţii:

$$xy' - y = 0 \quad \text{şi} \quad y'(xy' - y) = 1.$$

Prima ecuaţie nu corespunde problemei deoarece reprezintă curbele pentru care coeficientul unghiular al tangentei, într'un punct oarecare, este egal cu raportul dintre ordonata şi abscisa acelui punct.

Cea de a doua se scrie sub forma:

$$y = xy' - \frac{1}{y'}$$

ceeace ne arată că este o ecuaţie CLAIRAUT şi deci aplicându-i procedeul clasic, adică diferenţiind şi punând $y' = \rho$, obţinem:

$$\left(x + \frac{1}{\rho}\right)\frac{d\rho}{dx} = 0$$

rezultând:

$$\frac{d\rho}{dx} = 0 \quad \text{şi} \quad x + \frac{1}{\rho^2} = 0.$$

Prima ecuaţie ne dă $\rho = c$ şi deci avem integrala generală:

$$y = cx - \frac{1}{c},$$

iar a doua ecuaţie ne dă curba:

$$x = -\frac{1}{\rho^2}, \quad y = -\frac{2}{\rho}$$

care reprezintă o parabolă şi este integrala singulară, anume, înfăşurătoarea integralei generale constituită de familia de drepte:

$$y = cx - \frac{1}{c}$$

şi cari constituesc soluţia problemei.

Observări: 1°. In acelaşi mod, dacă s'ar fi cerut curba pentru care tangenta dusă într'un punct oarecare determină pe axa y-lor o porţiune egală cu patratul celei determinate pe axa x-lor, am fi obţinut dreptele de ecuaţie

$$y - cx = c^2$$

a căror înfăşurătoare este parabola:

$$x = -2\rho, \quad y = -\rho^2$$

şi aceasta natural după ce am fi îndepărtat soluţia străină a curbelor pentru care coeficientul unghiular al tangentei este egal cu raportul dintre abscisa şi ordonata punctului de contact.

2°. Problema aşa este enunţată poate fi extinsă prin căutarea curbe pentru care tangenta într'un punct oarecare determină pe axa x-lor o porţiune care este o putere dată a porţiunei determinată pe axa y-lor. Ecuaţia diferenţială a acestei probleme este:

$$xy' - y = y'(y - xy')^m.$$

3°. In fine socotim interesant de adăugat că cea mai largă generalizare a problemei, este constituită de ecuaţia diferenţială:

$$f\left(\frac{xy' - y}{y'};\ y - xy'\right) = 0$$

care poate fi integrată atunci când cunoaştem legătura dintre cele două porţiuni determinate de tangentă pe axele de coordonate.

Soluţiuni mai sumare s'au primit dela D-nii: ARŞAVSCHI AL., Sub-locot. AVRAM N. CONST. (Versailles), DOBRESCU PAUL, MAVRODIN DIMITRIE, NEGREA A. MIRCEA, Profesor SAGER N. IANCU şi TARASIUC EUG.

Parte dintre rezolvitori au găsit soluţia eliminând parametrul variabil între ecuaţia dreptei (adică tangenta la curba căutată) şi derivata ei în raport cu acest parametru; căutând înfăşurătoarea.

Parametrul fiind, evident, porţiunea determinată de tangentă pe axe.

D-ra CARACUDOVICI MARGARETA, a trimes o soluţie complet greşită.

GH. V.

PROBLEMA 4522. *Se dă un cerc* O *şi un punct fix* C, *pe acest cerc. O coardă dusă prin* C *taie din nou cercul în* B. *Intersecţia coardei* BC, *cu diametrul cercului care-l taie în două puncte* D *şi* E, *astfel ca să avem*

$$\text{arc}CD = 3\,\text{arc}BE$$

este pe o cardioidă.

LOCOT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

Soluţie.

Se observă că $\sphericalangle BOE = \text{arc}BE$ şi că

$$\sphericalangle BMO = \frac{\text{arc}CD - \text{arc}BE}{2} = \text{arc}BE = \sphericalangle BOE.$$

Unghiurile BOE şi BMO fiind egale, triunghiul BOM e isoscel şi deci

$$\overline{BM} = \overline{BO} = R.$$

BM prelungind raza vectoare CB cu o cantitate egală cu raza, punctul M va descrie o *cardioidă.*

SERGIU TARASIUC
şi MIRCEA-LEONTE A. NEGREA.

Generalizare.

1°. *Cardioida* se ştie că este o *concoidă* a cercului, iar concoida unei curbe este o curbă obţinută prelungind raza vectoare cu o cantitate constantă, în acelaşi sens.

Se poate arăta foarte uşor că dintre curbele care se bucură de proprietatea că

$$\text{arc}CD = n \cdot \text{arc}\,BE \qquad (1)$$

una singură este concoidă a cercului şi aceasta este *cardioidă.*

Ecuaţia în coordonate polare, a curbelor (1) este

$$\rho = 2R\left(\cos\theta + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sin\dfrac{2\theta}{n+1}}{\sin\dfrac{n-1}{n+1}\theta}\right).$$

Pentru a avea o concoidă a cercului trebue ca

$$\sin\frac{2\theta}{n+1} = k \cdot \sin\frac{n-1}{n+1}\theta$$

care ne arată că nu poate exista, pentru orice valoare a lui θ, decât dacă avem $k = 1$ şi atunci trebue neapărat $n = 3$.

2°. S'ar putea pune însă întrebarea, *ce relaţie* trebue să existe între arcele CD şi BE, pentru ca punctul M să descrie o concoidă de cerc.

In acest caz, dacă θ este unghiul razei vectoare cu diametrul CO, şi α unghiul BOE, iar α_1 unghiul BMO, avem

$$\alpha_1 = \theta - \alpha \quad \text{şi} \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} = k$$

din care se scoate imediat

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\theta}{k+\cos\theta} \quad \text{sau} \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\theta}{k+\cos\theta} \cdot \tag{2}$$

Insă $\operatorname{arc}CD = 2\theta - \alpha$

şi

$$\operatorname{arc}CD = 2\theta - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\theta}{k+\cos\theta} \cdot \tag{3}$$

Relaţiile (2) sau (3) definesc concoida cercului, adică *melcul lui* PASCAL.

Putem verifica şi pe această cale, că singura concoidă, care să satisfacă o relaţie (1) este cardioida.

In adevăr relaţia (2) devine

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{cotg}\varphi \quad \text{unde} \quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{k-1}{\sin\theta}$$

şi nu se poate reduce la o relaţie de forma

$$2\theta - \alpha = n\alpha$$

decât dacă $\operatorname{cotg}\varphi = 0$ adică $k = 1$,

în care caz $\alpha = \frac{\theta}{2}$ şi $\alpha_1 = \frac{\theta}{2} = \alpha$.

M. I. F.

PROBLEMA 4575. *Cercul circumscris triunghiului format de două laturi ale triunghiului de referință și de tangenta cercului lui* EULER *ce trece prin mijlocul laturii a treia, taie această latură a triunghiului de referință în două puncte astfel că unul este conjugatul armonic, în raport cu capetele laturii, al izotomicului celuilalt.*

C. IONESCU-BUJOR.

1°. *Soluție* dată de D-l N. D. ȘTEFĂNESCU (Liceul militar N. Filipescu):

Fie ABC triunghiul de referință, A' mijlocul lui BC, B_1 și C_1 intersecțiile tangentei în A' la cercul lui EULER respectiv cu AC, AB. Cercul AB_1C_1 taie dreapta BC în A_1 și A_2. Notăm A'_2 izotomicul lui A_2.

Se știe că B_1C_1 este antiparalelă cu BC în unghiul A [1]), deci patrulaterul BC_1CB_1 este inscriptibil. Deducem

$$\overline{A'B} \times \overline{A'C} = \overline{A'B_1} \times \overline{A'C_1};$$

iar pentru cercul AB_1C_1,

$$\overline{A'A_1} \times \overline{A'A_2} = \overline{A'B_1} \times \overline{A'C_1},$$

deci

$$\overline{A'B} \times \overline{A'C} = \overline{A'A_1} \times \overline{A'A_2}$$

și cum

$$\overline{A'C} = -\overline{A'B}, \quad \overline{A'A_2} = -\overline{A'A'_2},$$

rezultă că

$$\overline{A'B}^2 = \overline{A'A_1} \times \overline{A'A'_2},$$

egalitate care dovedește că punctele A_1 și A'_2 sunt armonic conjugate în raport cu B, C [2]).

2°. *Soluția II.* Din antiparalelismul dreptelor BC, B_1C_1 deducem că AA' este ax radical al cercurilor ABC, AB_1C_1, și după teorema lui STEINER generalizată [3]):

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \times \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$$

---

1) F. G. M. Exercices de Géométrie. Ed. VII pag. 11.

2) G. PAPELIER: Exercices de Géométrie moderne. Fasc. III, pag. 6.

3) G. ȚIȚEICA: Culegere de Probleme de Geometrie IX. 81, pag. 52.

sau

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} : \frac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2B}} = -1$$

şi cum

$$\frac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2B}} = \frac{\overline{A'_2B}}{\overline{A'_2C}},$$

urmează

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} : \frac{\overline{A'_2B}}{\overline{A'_2C}} = -1.$$

3°. Alte soluţii date de D-nii: M. C. POSTELNICESCU (Lic. M-rea Dealu) şi V. ECKSTEIN.

C. I. B.

PROBLEMA 4663. *Dacă* m *este un număr întreg, medie aritmetică a numerelor întregi* a, b, c,..., k, l, *atunci orice număr de două cifre privit ca scris în sistemul de numeraţie* m *este medie aritmetică a numerelor ce se obţin privind acel număr ca scris în sistemele de numeraţiune* a, b, c,... k, l.

I. IONESCU.

Soluţiune dată de D-ra ALEXANDRA AL. VASILESCU (Alba Iulia) şi de D-nii: C. SĂNDULACHE, N. D. ŞTEFĂNESCU, MIRCEA LEONTE A. NEGREA, MIRCEA A. VASILESCU-STABU, P. DOBRESCU, M. F. AMĂRĂŞTEANU, E. MARCOVICI.

Fie n numărul numerelor $a, b, c, \ldots, k, l$. Avem:

$$m = \Sigma a/n.$$

Fie $(px + q)$ un număr de două cifre în baza x, scris cu cifrele p şi q. Inlocuind x prin $m, a, b, c, \ldots, k, l$, relaţia de demonstrat este:

$$pm + q = \Sigma (pa + q)/n = (p\Sigma a + nq)/n = (p\Sigma a/n) + q,$$

care este evidentă, dacă înlocuim m cu $(\Sigma a/n)$.

PROBLEMA 4691. *Intr'un triunghiu* ABC, *punctul* I *fiind intersecţia cevienelor* AA', BB', CC' *să se stabilească identitatea:*

$$\sum \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = 2 + \Pi \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} .$$

ADRIAN GHEORGHIU.

I. *Soluţie* dată de D-l MIRCEA A. VASILESCU-STABU (Cl. V, Lic. „Mihai Viteazu" Alba Iulia).

Notăm cu S_a suprafaţa triunghiului BIC, cu S_b şi S_c suprafeţele analoage, avem, notând cu S suprafaţa ABC:

$$\frac{\overline{IA'}}{\overline{AA'}} = \frac{S_a}{S}, \ldots; \quad \text{apoi:} \quad \frac{\overline{IA}}{\overline{AA'}} = \frac{S_a - S}{S}, \ldots$$

Formăm rapoartele:

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = 1 - \frac{S}{S_a}, \quad \frac{\overline{IB}}{\overline{IB'}} = 1 - \frac{S}{S_b}, \quad \frac{\overline{IC}}{\overline{IC'}} = 1 - \frac{S}{S_c}$$

de unde:

$$\sum \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = 3 - S \sum \frac{1}{S_a},$$

$$\Pi \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = 1 - S \sum \frac{1}{S_a};$$

între cari eliminând termenul $S \sum \frac{1}{S_a}$, obţinem relaţia din enunţ.

II. *Soluţie* dată de D-l VICTOR L. FLORESCU (Cl. VI. Lic. Militar „N. Filipescu" Târgovişte).

In problema 4582 rezolvată în G. M. Vol. XLI, p. 545 s'a stabilit relaţia:

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{IA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{IB'}} = \Pi \frac{\overline{AI}}{\overline{IA'}} - \frac{\overline{CI}}{\overline{IC'}}$$

în care punând

$$\overline{AA'} = \overline{AI} + \overline{IA'} \text{ şi } \overline{BB'} = \overline{BI} + \overline{IB'},$$

devine:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IA'}} + \frac{\overline{BI}}{\overline{IB'}} + 2 = \Pi \frac{\overline{AI}}{\overline{IA'}} - \frac{\overline{CI}}{\overline{IC'}}$$

şi unde grupând termenii şi schimbând semnele convenabil, obţinem relaţia din enunţ.

III. *Soluţie* dată de D-l ECKSTEIN VIRGIL (elev-inginer).

M, N, P fiind trei puncte colineare şi O un punct arbitrar se cunoaşte relaţia:

$$\frac{\sin \widehat{NOP}}{\overline{OM}} + \frac{\sin \widehat{POM}}{\overline{ON}} + \frac{\sin \widehat{MON}}{\overline{OP}} = 0.$$

Aplicăm această relaţie fascicolelor I (BA'C), I (CB'A), I (AC'B); notând: $\widehat{BIC} = \alpha$, $\widehat{CIA} = \beta$, $\widehat{AIB} = \gamma$, şi avem:

$$\frac{\sin\beta}{\overline{IB}} + \frac{\sin\alpha}{\overline{IA'}} + \frac{\sin\gamma}{\overline{IC}} = 0$$

$$\frac{\sin\gamma}{\overline{IC}} + \frac{\sin\beta}{\overline{IB'}} + \frac{\sin\alpha}{\overline{IA}} = 0$$

$$\frac{\sin\alpha}{\overline{IA}} + \frac{\sin\gamma}{\overline{IC'}} + \frac{\sin\beta}{\overline{IB}} = 0.$$

Scriind aceste relaţii, am scris în acelaş timp colinearitatea punctelor A_1I_1A'; B_1I_1B'; C_1I_1C', adică ipoteza enunţului, căci de ex. $\widehat{BIA'} = \pi - \gamma$, $\widehat{A'IC} = \pi - \beta$ etc.

Unghiurile α, β, γ fiind evident diferite de zero, rezultă:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\overline{IA'}} & \frac{1}{\overline{IB}} & \frac{1}{\overline{IC}} \\ \frac{1}{\overline{IA}} & \frac{1}{\overline{IB'}} & \frac{1}{\overline{IC}} \\ \frac{1}{\overline{IA}} & \frac{1}{\overline{IB}} & \frac{1}{\overline{IC'}} \end{vmatrix} = 0, \text{ sau } \begin{vmatrix} \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\overline{IB}}{\overline{IB'}} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{\overline{IC}}{\overline{IC'}} \end{vmatrix} = 0,$$

care determinant, desvoltat conduce la relaţia din enunţ.

IV. *Soluţie* dată de D-nii: RADU V. APOSTOL (lic. militar „N. Filipescu" Târgovişte), AURELIAN CĂLINESCU (Tg.-Mureş), NĂSTASE MARIN (lic. mil. „N. Filipescu" Târgovişte), PAUL DOBRESCU (S. P. O.) şi O. SACTER.

Scrim relaţiile lui VAN AUBEL:

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} + \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IB'}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} + \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$$

$$\frac{\overline{IC}}{\overline{IC'}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} + \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$$

pe cari înmulţindu-le şi ţinând seama de teorema lui CEVA, obţinem relaţia din enunţ.

V. *Soluţie* dată de D-ra GIGEA DIMITRIU (lic. Oltea Doamna, Iaşi) şi D-nii: IOAN CĂLIN DIMITRIU (Galaţi), IOAN GR. BOGDAN, VASILE BOGZA, NIC. GH. VARTIC, PETRE T. MAMUT, AL. C. JIPA, NIC. I. PUNGĂ, MIRCEA GH. NICULESCU, LIVIUS M. BIVOLARU, I. D. ENACHE, HAR. L. IOACHIM, DAN STOIAN RĂDUCĂNESCU, VIRGIL STĂNCULESCU, PETRE P. COJOCARU, CLEMENT V. ANICOLAESI şi IOAN I. BUZINCU, (toţi dela Lic. Mil. Iaşi).

Aducând la acelaş numitor avem de stabilit identitatea;

$$\overline{IA} \cdot \overline{IB'} \cdot \overline{IC'} + \overline{IB} \cdot \overline{IA'} \cdot \overline{IC'} + \overline{IC} \cdot \overline{IA'} \cdot \overline{IB'}$$

$$- 2\,\overline{IA'} \cdot \overline{IB'} \cdot \overline{IC'} = \overline{IA} \cdot \overline{IB} \cdot \overline{IC}$$

în care să înlocuim:

$$\overline{IA'} = \overline{AA'} + \overline{IA}\ ,\quad \overline{IB'} = \overline{BB'} + \overline{IB}\ ,\quad \overline{IC'} = \overline{CC'} + \overline{IC}\ .$$

De unde după toate calculele şi reducerile, ajungem la identitatea cunoscută:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{BI}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{CI}}{\overline{CC'}} = 2$$ (Ex. de Géométrie F. G. M. ed. 7-a, p. 75).

Observaţiuni. 1. D-l M. A. VASILESCU-STABU stabileşte pe calea soluţiei I şi relaţiunile:

$$\sum \frac{\overline{IA'}}{\overline{AA'}} = 1\ ,\quad \sum \frac{\overline{AI}}{\overline{AA'}} = 2\ .$$

2. D-nul IOAN GR. BOGDAN observă că problema e similară cu problema 4582, nu face însă legătura.

3. D-nul T. STOICESCU arată că identitatea ce face obiectul problemei 4691, e cunoscută din „Journal de Math. élém." 1-er juin 1897 şi din „Ex. de Géom. mod." G. PAPELIER, t. II.

4. Cu identitatea geometrică stabilită în această problemă se pot regăsi sau obţine noi identităţi trigonometrice, prin particularizarea punctului I, considerându-l ortocentrul, centrul cercului înscris, circumscris, etc.

PROBLEMA 4702. *Dacă* A', B', C' *sunt intersecţiile cevienelor unui punct* K, *din planul triunghiului* ABC, *cu cercul circumscris acestui triunghiu, să se demonstreze că tangentele cu* A', B', C' *taie respectiv pe* BC, CA, AB *în trei puncte colineare.*

In ce caz dreapta se confundă cu dreapta lui LEMOINE *a triunghiului fundamental?*

M. C. POSTELNICESCU.

Soluţie dată de D-nii: OCTAVIAN GH. RĂDULESCU (Cl. VI lic. militar „N. Filipescu" Târgovişte) şi Sublt. I. C. PAREPEANU.

Fie M, N, P intersecţiile tangentelor în A', B', C', la cercul (ABC) respectiv cu BC, CA, AB; şi fie A'', B'', C'' picioarele cevienelor punctului K respectiv pe aceleaşi laturi.

Din triunghiurile asemenea A'MB şi CMA' deducem:

$$\frac{\overline{MB}}{MA'} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \text{ şi } \frac{\overline{MC}}{MA'} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}},$$

de unde prin împărţire:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{A'B}^2}{\overline{A'C}^2}. \qquad (1)$$

Din perechile de triunghiuri asemenea A'A''B cu CA''A şi A'A''C cu BA''A deducem respectiv:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A''B}}{\overline{A''A}} \text{ şi } \frac{\overline{A'C}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A''C}}{\overline{A''A}}$$

de unde prin împărţire obţinem:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}. \qquad (2)$$

Ţinând seama în (1) de (2) obţinem:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \left(\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2. \qquad (3)$$

Scriind şi relaţiile analoage, formăm produsul:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \left(\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{B''C}}{\overline{B''A}} \cdot \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}\right)^2, \qquad (4)$$

în care ţinând seama că:

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{B''C}}{\overline{B''A}} \cdot \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = -1, \qquad (5)$$

rezultă:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$$

deci M, N, P sunt colineare.

Dacă prin ipoteză aceste puncte se găsesc pe dreapta lui LEMOINE a triunghiului, polarele lor faţă de cercul circumscris (ABC) sunt simedianele triunghiului. Deci punctul K trebue să fie punctul lui LEMOINE, de intersecţie a simedianelor, pentruca M, N, P construite ca în problemă să definească dreapta lui LEMOINE a triunghiului ABC.

Observaţiuni. 1°. D-nii: ILIE ŢIŢEICA şi VIRGIL ECKSTEIN observă că prima parte a acestei probleme e identică cu exerciţiul Nr. 51 pag. 646 Vol. XLI, primul dă o soluţie analoagă, iar secundul afirmă că demonstraţia sa e copiată după acel exerciţiu.

2°. Exerciţiul identic şi apărut în acelaş număr al G. M. cu problema 4702 a fost trimis însă în 1932. Dealtfel chestiunea este cunoscută.

3°. D-nul VIRGIL ECKSTEIN dă o proprietate corelativă.

4°. O soluţie în coordonate baricentrice s'a primit dela D-nul O. SACTER

5°. Pe expresiunea (4) de mai sus se observă că proprietatea punctelor M, N, P de a fi colineare se păstrează şi în cazul când A″, B″, C″ sunt colineare pe laturile triunghiului. Adică se poate enunţa:

Dacă o dreaptă taie laturile BC, CA, AB ale unui triunghin ABC respectiv în A″, B″, C″ şi dacă A′, B′, C sunt intersecţiile dreptelor AA″, BB″, CC″ cu cercul circumscris triunghiului; tangentele în A′, B′, C′ taie respectiv pe BC, CA, AB în trei punte colineare.

A. G.

PROBLEMA 4715. *Trei cercuri* O_a, O_b, O_c *se taie două câte două în* C, C'; A, A'; B, B'. *Dreptele ce unesc centrele cercurilor* ABC, A'BC, AB'C, ABC' *respectiv cu centrele cercurilor* A'B'C', AB'C', A'BC' A'B'C *sunt concurente.*

ADRIAN C. GHEORGHIU.

Soluție dată de D-l I. ȚIȚEICA (elev lic. militar M-rea Dealu).

Fie P punctul de concurență al dreptelor AA', BB', CC' adică centrul radical al cercurilor O_a, O_b, O_c. Inversiunea

$$I \equiv (P, k = \overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = \overline{PC} \cdot \overline{PC'})$$

transformă punctele A, B, C respectiv în A', B', C'. Incât perechile de cercuri ABC cu A'B'C', A'BC cu AB'C', AB'C cu A'BC' și ABC' cu A'B'C sunt inverse în inversiunea I.

Știind că centrele a două cercuri sunt colineare cu polul lor de inversiune (unul din centrele de asemănare), rezultă că cele patru drepte din enunț sunt concurente în punctul P.

Observațiune. Dacă O_a, O_b, O_c sunt cercurile CARNOT ale unui triunghiu, rezultă colinearitatea centrului cercului circumscris, ortocentrului și centrului cercului lui EULER.

PROBLEMA 4728. *Fie* ABC *un triunghiu dreptunghic în* A, *de arie constantă. Presupunând punctul* A *fix, iar* B *descriind o dreaptă* (D), *se cere locul vârfului* C.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

1°. *Soluție* dată de D-nii: SUBLOCOT. PANĂ ALEX., HERMAN VICTOR, LASCU BAL (Student Cluj), FLORESCU VICTOR, RĂDULESCU GH. OCT., DECIULESCU D. GH., TEODORESCU DORIN (elevi Liceul militar „N. Filipescu"), și CIOC I. DUMITRU (elev L. M. Craiova).

Fie $A_1B_1C_1$ o poziție particulară a triunghiului ABC, astfel că $A_1B_1 \perp (D)$. Aria fiind constantă rezultă:

$$AB_1 \times AC_1 = AB \times AC \qquad (A \equiv A_1)$$

sau

$$\frac{AB_1}{AC} = \frac{AB}{AC_1}$$

şi cum

$$\measuredangle BAB_1 = \measuredangle CAC_1$$

deducem că

$$\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1$$

Deci

$$\measuredangle ACC_1 \measuredangle B_1AC_1 = 90^0$$

şi prin urmare *locul geometric al punctului* C *este un cerc descris pe* AC_1 *ca diametru.*

Se observă uşor că punctul C descrie semicercul superior sau inferior, după cum punctul B e situat de o parte sau alta a punctului B_1.

Dacă considerăm acum şi punctele C', simetrice lui C faţă de AB, atunci locul geometric se completează cu un al doilea cerc simetric primului, în raport cu AB_1.

2°. *Soluţie* dată de D-nii: LASCU BAL (student), ILIE I. ŢIŢEICA, POSTELNICESCU M. C., FLORESCU VICTOR (elevi L. M. N. F.).

Fie P un punct pe AB, astfel că $\overline{AP} = \overline{AC}$.

Vom avea:

$$AB \times AP = k^2 \ (k = \text{const}).$$

Rezultă atunci că punctul P va descrie un cerc (ω), inversul dreptei (D), în inversiunea (A, k^2).

Locul lui C va fi compus din două cercuri simetrice faţă de A, ce se obţin din (ω) prin rotaţii — directe sau retrograde — de 90° în jurul lui A.

In cazul unghiului $A = \alpha$ (const.), vom lua $AP = AC \cdot \sin\alpha$ şi deci

$$AP \cdot AB = AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = 2S = k^2,$$

natura locului rămânând neschimbată.

3°. *Soluţie* dată de elevii Lic. Militar Iaşi.

Să ducem prin C o dreaptă $CQ \parallel AB$, punctul Q fiind pe (D). Să arătăm că segmentul BQ este constant. Avem

$$2 \text{ aria } QAB = 2 \text{ aria } ABC = AB \times AC = k^2,$$

dar

$$2 \text{ aria } QAB = AB_1 \times BQ$$

deci

$$BQ = \frac{k^2}{AB_1} = \text{const.}$$

Fie acum $\overline{AR} \# BQ$, rezultă imediat că dreapta CQ trece prin punctul fix R şi cum $\sphericalangle ACQ = 90^0$, locul punctului C va fi cercul descris pe AR ca diametru.

Să observă aci că punctul R nu este decât punctul C_1 din prima soluţie, — de unde rezultă apropierea celor 2 soluţii.

4°. *Soluţie analitică* dată de D-nii: SUBLT. PAREPEANU C. ION (din Geniu), DEUTSCH M. A., RIPIANU D-TRU, POSTELNICESCU M. C., ŞTEFĂNESCU D. N., TEODORESCU DORIN (elevi L. M. N. F.), BAZAC I. ALEX., TOMESCU TH. HORAŢIUS, DIACONESCU I. MIHAIL, (L. M. Chişinău), BUCURENCIU VASILE (L. M. T.-Mureş), TANASICIUC CLAUDIU (L. M. Cernăuţi), COJOCARU I. P. (Iaşi), CRIŞAN A. ION (Lic. Arad), CONSTANTINESCU G. G. şi MAVRODIN D-TRU.

Luăm ca axe de coordonate:

Dreapta $(D) \equiv Ox$

Perpend. din A pe $(D) \equiv Oy$.

Coordonatele punctelor A, B, C vor fi

$$A(0, a) \; ; \; B(\lambda, 0) \; ; \; C(x, y)$$

a fiind o constantă, iar λ un parametru variabil.

Ecuaţiile

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \pm k^2 \qquad \therefore \quad \frac{y-a}{x} \cdot \frac{a}{\lambda} = 1$$

exprimă respectiv invariabilitatea ariei triunghiului ABC şi ortogonalitatea dreptelor AB, AC.

Eliminând pe λ între aceste ecuaţii se obţine

$$x(ax \pm k^2) + a(y-a)^2 = 0$$

sau

$$\left(x \pm \frac{k^2}{2a}\right)^2 + (y-a)^2 = \left(\frac{k^2}{2a}\right)^2$$

ecuaţii ce reprezintă întocmai cercurile dela 1° şi 2°.

Observări. 1°. D-l MAVRODIN D-TRU (student, Bucureşti) generalizează problema astfel:

„Fie ABC un triunghiu oarecare având unghiul A şi aria S constante. Presupunând punctul A fix, iar B descriind o curbă (C), se cere locul vârfului C″. D-sa găseşte că locul geometric este o curbă (C_1) transformată printr'o rotaţie de unghiu A, a curbei inverse a curbei (C), în inversiunea (A, $k^2 = 2S$).

2°. D-l MIRCEA A. NEGREA ne trimite o soluţie apropiată soluţiilor 1° şi 3°, utilizând relaţii trigonometrice.

3°. Elevii lic. militar Iaşi, corespondenţi ai Gazetei, trimiţând soluţii identice sau puţin diferite una de alta, i-am citat aci în „grup", neştiind cui să atribuim paternitatea soluţiei.

4°. In ultimul timp s'a primit o soluţie analitică dela D-l BOTEZATU C. FILIP.

A. V. N.

PROBLEMA 4802. *Să se verifice că expresiunea:*

$$\frac{(x+\sqrt[3]{x.y.z}).(y+\sqrt[3]{x.y.z})}{(x-\sqrt[3]{x.y.z}).(y-\sqrt[3]{x.y.z})}+\frac{(y+\sqrt[3]{x.y.z}).(z+\sqrt[3]{x.y.z})}{(y-\sqrt[3]{x.y.z}).(z-\sqrt[3]{x.y.z})}+\frac{(z+\sqrt[3]{x.y.z}).(x+\sqrt[3]{x.y.z})}{(z-\sqrt[3]{x.y.z}).(x-\sqrt[3]{x.y.z})}$$

este independentă de x, y, *şi* z.

GH. VASILIU.

Făcând spre simplificarea scrisului, substituirea:

$$k=\sqrt[3]{x.y.z}$$

şi aducând expresiunea, pe care o vom nota cu E, la acelaşi numitor, avem:

$$E=\frac{\Sigma(x+k)(y+k)(z-k)}{(x-k)(y-k)(z-k)}=\frac{3xyz+k\Sigma xy-k^2\Sigma x-3k^3}{xyz-k\Sigma xy+k^2\Sigma x-k^3}.$$

In fine, ţinând seamă de valoarea lui k, găsim uşor că:

$$E=\frac{k\Sigma xy-k^2\Sigma x}{-k\Sigma xy+k^2\Sigma x}=-1.$$

c. c. t. d.

Au rezolvat astfel problema, D-nii: ANASTASIU M. MIHAIL, DIMITRIU CĂLIN I., GAVRILESCU N. CONST., GOTH L. M., Sub-Locot. GRUMĂZESCU MIRCEA, LASCU BAL, MATAC RADU, NEGREA A. MIRCEA, RAUCH B. IOSIF, RIPIANU DUMITRU, ROŞCULEŢ N. M., ŞTEFĂNESCU D. NIC., STOENESCU D. MIREL, THEODORESCU N. DORIN şi VASILESCU AL. M.

Observare. Expresia propusă în problema 4802 se găseşte stabilită în R. M. T. Anul II No. 2 în articolul: „O clasă de identităţi Algebrice" la pag. 21; coincidenţa aceasta nu a fost observată de nici unul dintre rezolvitorii problemei 4802. Eu când am propus-o nu am ştiut şi nici nu am descoperit aceasta decât când cu ocazia redijării problemei 4802 am răsfoit prin colecţia R. M. T. şi întâmplător am dat peste această coincidenţă. Era însă prea târziu ca să mai retrag problema.

GH. V.

PROBLEMA 4816. *Să se stabilească identitatea:*

$$\sin^2(A-B)+\sin^2C\cos^2(A-B)=(\sin^2A+\sin^2B)(\cos^2A+\cos^2B),$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu oarecare.

DIMITRIE MAVRODIN.

1°. *Soluţie* dată de D-l DUMITRU I. CIOC (L. M. Craiova). Partea I-a a identităţii se poate scrie succesiv:

$$\sin^2(A-B)+\sin^2C\cos^2(A-B)=\sin^2(A-B)+\cos^2(A-B)$$

$$-\cos^2(A+B)\cos^2(A-B)=1-(\cos^2A\cos^2B-\sin^2A\sin^2B)^2$$

$$=1-(1-\sin^2A-\sin^2B)^2=1-1+2(\sin^2A+\sin^2B)-(\sin^2A+\sin^2B)^2$$

$$=(\sin^2A+\sin^2B)(2-\sin^2A-\sin^2B)=(\sin^2A+\sin^2B)(\cos^2A+\cos^2B).$$

2°. *Soluţie* dată de D-l VICTOR L. FLORESCU (L. M. Târgovişte). Avem:

$$(\sin^2A+\sin^2B)(\cos^2A+\cos^2B)=(\sin A\cos B+\sin B\cos A)^2$$

$$+(\sin A\cos A-\sin B\cos B)^2=\sin^2C+\sin^2(A-B)\cos^2(A+B)$$

$$=\sin^2C+\sin^2(A-B)\cos^2C=\sin C[1-\sin^2(A-B)]$$

$$+\sin^2(A-B)=\sin^2C\cos^2(A-B)+\sin^2(A-B).$$

Alte soluţii au fost date de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU (Sem. Ped. Bucureşti), GH. GH. CARDARA (Student Bucureşti), G. G. CONSTANTINESCU (Tecuci), GH. D. DECIULESCU (L. M. Târgovişte), S-LT. M. GRUMĂZESCU (Iaşi), N. N. MIHALCEA (Elev-Ing. Bucureşti), LT. P. NEGOIŢĂ, BENNONE P. PETRESCU (L. M. Târgovişte), AL. POPESCU-ZORICA (Bucureşti), TR. PREDOIESCU (Ţânţăreni-Dolj), M. N. ROŞCULEŢ (Călăraşi), J. SEGAL (Bucureşti), N. D. ŞTEFĂNESCU (L. M. Târgovişte), T. C. ŞTEFAN (T.-Severin).

C. I. Ţ.

EXERCIŢII

5. Intr'un triunghiu ABC în care unghiul A este egal cu 60°, dreapta lui EULER este dublul segmentului determinat pe BC de punctul de tangenţă al cercului înscris cu această latură şi mediana ce pleacă din vârful opus.

M. C. POSTELNICESCU.

R. Dacă A', A'' sunt intersecţiile bisectoarelor unghiului A cu cercul O circumscris triunghiului dat şi dacă H este ortocentrul, din formula cunoscută: $AH = 2R\cos A$, rezultă că triunghiul OAH este isoscel şi cum AH şi OA sunt izogonale, deducem că dreapta AA' este perpendiculară pe OH şi deci OH şi AA'' sunt paralele şi egale.

Se aplică apoi teorema lui PTOLOMEU patrulaterului inscriptibil BAA''C şi se ţine seamă că triunghiul BA''C este echilateral, obţinând astfel:

$$AA'' = OH = AC - AB.$$

Se poate uşor arăta că: AC — AB este şi expresia dublului segmentului indicat în enunţ.

6. Să se găsească relaţia de condiţie ce trebue să existe în cantităţile reale x, y, z pentru a avea identitatea:

$$\frac{1}{7x^3+y^3+z^3}+\frac{1}{x^3+7y^3+z^3}+\frac{1}{x^3+y^3+7z^3}=\frac{7}{x^3+y^3+z^3}.$$

MIRCEA ADAM.

R. Notăm:

$$S = x^3 + y^3 = z^3$$

identitatea propusă devine:

$$\sum S\,(S+6y^3)\,(S+6z^3) = (S+6x^3)\,(S+6y^3)\,(S+6z^4)$$

dezvoltăm ambii membri şi făcând reducerile găsim:

$$S^3 = 3^3 x^3 y^3 z^3$$

de unde

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \qquad (1)$$

Pe de altă parte avem:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

astfel că relaţia (1) se poate înlocui prin următoarele două relaţii:

$$x + y + z = 0 \qquad (2)$$

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

din care numai (2) satisface condiţia cu x, y, z să fie reali.

7. Să se arate că dacă avem:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} x_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

atunci avem şi:

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 z_2 - y_1 z_2} = \frac{x_2 - x_0}{y_2 z_0 - y_0 z_2} = \frac{x_0 - x_1}{y_0 z_1 - y_1 z_0}$$ şi alte două analoage.

D. MAVRODIN.

R. Se vede uşor că primele două egalităţi se pot scrie şi astfel:

$$\sum y_0 (x_1 - x_2) = 0 \quad \text{şi} \quad \sum z_0 (x_1 - x_2) = 0.$$

Rezolvând acest sistem de două ecuaţii omogene cu trei necunoscute, în raport cu diferenţele $x_1 - x_2$, etc. obţinem dubla egalitate de demonstrat. Cum $\sum (x_1 - x_2) = 0$, avem şi $\sum (y_1 z_2 - z_1 y_2) = 0$, adică avem şi:

$$\begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ceeace e evident geometriceşte.

Luând acum această din urmă egalitate cu câte una din primele două egalităţi şi procedând ca mai sus obţinem alte două egalităţi analoage.

$$\frac{y_1 - y_2}{z_1 x_2 - x_1 z_2} = \frac{y_2 - y_0}{z_2 x_0 - z_0 x_2} = \frac{y_0 - y_1}{z_0 x_1 - z_1 x_0}$$

şi

$$\frac{z_1 - z_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} = \frac{z_2 - z_0}{x_2 y_0 - y_2 x_0} = \frac{z_0 - z_1}{x_0 y_1 - x_1 y_0}.$$

c. c. t. d.

8. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$y^5 + 5ky^4 + (p + 10k^2) y^3 + (10k^3 + 3kp + q) y^2 + (5k^4 + 3k^2 p + 2kq + r) y + (k^5 + pk^3 + qk^2 + rk + s) = 0,$$

ştiind că:

$$(1) \quad rq^2 + s(s - pq) = 0.$$

D. MAVRODIN.

R. Facem transformarea:

$$x = y + k,$$

ecuaţia dată devine după toate reducerile posibile:

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

descompunând această ecuaţie într'una de gradul II şi alta de gradul III, obţinem făcând identificările şi ţinând seamă de (1) următoarele două ecuaţii:

$$x^2 + \frac{s}{q} = 0 \quad \text{şi} \quad x^3 + \left(p - \frac{1}{q}\right) x + q = 0, \text{ de unde:}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{s}{q}}$$

şi ecuaţia a doua putem s'o rezolvăm cu ajutorul formulei lui CARDAN.

PROBLEME PROPUSE

4867. Să se demonstreze că se pot găsi şapte patrate consecutive având aceeaşi cifră la zecimi.

I. IONESCU.

4868. Să se găsească un patrat de patru cifre de forma *aabb* a cărui rădăcină să fie de forma *cc*.

SUBLT. MIHAI C. I. VLAD.

4869. Să se demonstreze că dacă într'un sistem de numeraţie numărul de patru cifre $N = aabb$ este patratul numărului de două cifre *cc* şi dacă produsul $a \times b$ este patrat perfect, atunci N este egal cu suma patratelor a două numere întregi.

V. THÉBAULT.

4870. Fiind dat un număr prim $p > 2$, să se arate că putem determina un număr a astfel ca să avem

$$a\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + 1 = \mathcal{M}.p.$$

CONST. SĂNDULACHE.

4871. Se consideră triunghiul ABC şi un punct P pe cercul circumscris. Dreapta PA întâlneşte înălţimile vârfurilor B, C în B_a, C_a. Analog se obţin A_b, C_b; A_c, B_c.

Fie A', B', C' şi A", B", C" mijloacele laturilor triunghiului ABC şi ale segmentelor $C_b B_c$, $A_c C_a$, $A_b B_a$. Să se arate că:

1°. Triunghiurile A'B'C' şi A"B"C" sunt omologice, cu centrul de omologie I pe pe *cercul lui* EULER al triunghiului dat;

2°. Cercurile PA_bB_a şi analoagele sale au centrele pe aceeaşi dreaptă ce trece prin I;

3°. $A_b B_a$, $A_c C_a$, $B_c C_b$, sunt paralele;

4°. Triunghiul ABC este un triunghiu polar al triunghiului A"B"C".

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU.

4872. Se consideră două drepte perpendiculare duse prin ortocentrul H al triunghiului ABC şi fie A_b, A_c; B_c, B_a; C_a, C_b respectiv proiecţiunile punctelor A, B, C pe ele.

1°. Dreptele $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ sunt concurente în ω.

2°. Perpendicularele din A, B, C respectiv pe $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ sunt concurente într'un punct ω';

3°. Locul punctelor ω şi ω', când dreptele duse prin H variază;

4°. In acest caz dreapta $\omega\omega'$ trece printr'un punct fix.

I. ŢIŢEICA.

4873. Dacă a', b', c' sunt laturile triunghiului ortic al triunghiului ABC, iar r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscrise aceluiaşi triunghiu, avem relaţia:

$$\begin{vmatrix} 1 & a' & r_a \\ 1 & b' & r_b \\ 1 & c' & r_c \end{vmatrix} = 0.$$

SUBLT. MIRCEA GRUMĂZESCU.

4874. Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni:

$$x + y + z = 0$$

$$\Sigma xy^2z^3 = -108$$

$$\Sigma x^3y^5 = -3038.$$

PETRU P. COJOCARU.

4875. Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni:

$$(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 = m(a^2+b^2+c^2)$$

$$(by+cz+dt)^2+(bz-cy)^2+(ct-dz)^2+(dy-bt)^2 = n(b^2+c^2+d^2)$$

$$(cz+dt+ax)^2+(ct-dx)^2+(dx-at)^2+(az-cx)^2 = p(c^2+d^2+a^2)$$

$$(dt+ax+by)^2+(dx-at)^2+(ay-bx)^2+(bt-dy)^2 = q(d^2+a^2+b^2).$$

MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU.

4876. Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni:

$$xy + xz + yz = 14$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz = 105$$

$$xy(x+y) + xz(y+z) + yz(z+x) + 3xyz = 98.$$

ION CURCHI.

4877. Să se facă expresiunea:

$$E \equiv \frac{(p^2-q^2)\sin 2\alpha - 2pq\cos\alpha}{(p^2-q^2)\sin 2\alpha + 2pq\cos 2\alpha}$$

calculabilă prin logaritmi.

PAUL DOBRESCU.

4878. Două drepte perpendiculare, duse respectiv prin cele două focare ale unei elipse, întâlnesc tangenta la elipsă în o extremitate a axei mari în punctele T_1 şi T_2. Să se arate că celelalte două tangente din T_1 şi T_2 la elipsă sunt paralele.

Sub.-Lt. de Marină I. NICOLAU-DOBRIDOR.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu F. M. (4855, 56); *Anastasiu M. M.* (4844, 57, 62); *Apostol R.* (4834, 36, E); *Bărbieru V. V.* (4843); *Cândeiu D. G.* (4843); *Constantinescu G. G.* (3902); *Cornăţeanu Aurel* (4834, 41, 43); *Crăciun I. I.* (4834, 44); *Dobrescu P.* (4836); *Gavrilescu N. C.* (4843, 44, 62); *Goldberg Iacob* (4855, 57, 58, 60); *Huianu I.* (4843); *Jareghie V. I.* (4834, 43, 44); *Jileţcovici* (4843); *Marcovici E.* (4802, 43); *Matei D. D-tru* (4717, 78, 92, 808, 30, 43, 44, 56, 62, E); *Mihăilescu-Popa I.* (4843); *Mihalcea I. Oct.* (4821, 44, 56, 57, 61, 62); *Mironescu T. D.* (4834, 43, 44); *Pădureţ A. V.* (4843); *Pantelimon V. Const.* (4834, 44); *Pascaru I.* (4843); *Petrescu P. Benone* (4813); *Petrescu V. Achille* (4843, 44); *Popa D. M.* (4834, 43, 44); *Popovici L. R.* (4843); *Predoiescu Tr.* (4556, 681, 792, 820, 26, 28, 56, 57, 61, 62, E); *Rădulescu G. Oct.* (4809, 11, 13, 16, 20, E); *Rohr I. A.* (4834, 43, 44); *Roşculeţ N. M.* (4570, 640, 44, 843, 44, 56, 57, E); *Sacter O.* (4530, 791, 806, 84); *Şaichin O. A.* (4855, 56, 57, 60, 61, 63, 65); *Săruleşteanu I. E.* (4843); *Stănculescu Ion* (4813, 43); *Stănculescu N.* (4843); *Ştefănescu D. N.* (4834, 35, 36, 37, 42); *Streder I.* (4834, 43, 51); *Turcu R. S.* (4843, 44, 51); *Vasilescu-Ştabu Al. M.* (4726, 38, 92, 816, 36, 44, 56, 57, 60, 61, 62, 65); *Zamfirescu Gh. I. Locot.* (P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia VI . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* 1926. (Epuizată).

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50
Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. **C. D. IONESCU-ŢIU**

C. 90175

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIII

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1937

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" S.I.E.T.U.

SUMARUL

1. Considerații invariant-teoretice asupra patrulaterului (urmare) . . . . . *D. Barbilian.*
2. Aritmetica lui Gheorghe Asachi (va urma) . . . . . *V. Cazanacli.*
3. Al doilea Congres Interbalcanic al Matematicienilor . . . . . *Preduța D. Bungețeanu.*
4. Programa analitică hotărită pentru concursul „Gazetei Matematice" din anul 1938.
5. Raport pentru premiul Vasile Conta pe anul 1937.
6. Note Matematice: 11 — 15.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 271.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 2289, 2397, 3766, 3832, 4044, 4417, 4594, 4612, 4661, 4743, 4778, 4811, 4843, 4855.
12. Exerciții: 9 — 12.
13. Probleme propuse: 4829, 4879 — 4890.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1937

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **D. Stan**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1937 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4859, 66, 69, 70, 71, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

CONSIDERAȚII INVARIANT-TEORETICE ASUPRA PATRULATERULUI

(Urmare dela pag. 64).

§ 2. Omografia covariantă a unei perechi de conice.

10°. Observațiile elementare din paragraful precedent rezolvă o problemă interesantă de Algebră, în limbagiul Geometriei Proiective.

Se știe că o substituție omografică A, în trei variabile omogene:

$$x_i^* = (a_i\, x) \quad , \quad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{14}$$

admite, față de transformările ei prin alte omografii (nesingulare), doi invarianți iraționali, formând un sistem complect. Anume, câturile mutuale

$$S_1 : S_2 : S_3 \tag{15}$$

ale rădăcinilor «ecuației în S» asociate

$$\begin{vmatrix} a_{11}+S & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+S & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+S \end{vmatrix} = 0.$$

Analog, două conice, de ecuații (în scriere simbolică):

$$(px)^2 = 0 \quad , \quad (qx)^2 = 0, \tag{16}$$

au ca sistem complect de invarianți iraționali câturile mutuale ale rădăcinilor ecuației în S simultane, dată de anularea determinantului de ordinul 3

$$| p_{ij} + S\, q_{ij} | = 0, \qquad \begin{matrix} p_{ij} = p_{ji}, \\ q_{ij} = q_{ji}. \end{matrix}$$

Iată acum problema:

Ne propunem să asociem, *prin operații geometrice cu caracter proiectiv,* oricărei perechi de conice destul de generală (16), o omografie (14), așa încât «ecuațiile în S» respective să admită aceleași rădăcini (mai exact: rădăcini proporționale).

11°. In acest scop să considerăm cele două conice P, Q, în acelaș timp circumscrise patrupunctului F și înscrise patrulaterului G, din configurațiile (F, G) ale paragrafului precedent. Existența a

două şi numai a două astfel de conice (reale sau imaginare) e evidentă, întrucât printr'un punct F^0 nesituat pe dreptele (G) trec două conice distincte tangente acestora. Pe de altă parte, fiecare din conicele înscrise în G e invariantă în grupul de automorfism colineativ G_4 al figurii. Aşa dar conicele mai trec încă prin F^1, F^2 şi F^3.

Din relaţiile (10), (10'), alineatul 5°, scoatem pentru invarianţii $f_i\, g_i$ ai configuraţiei (F, G):

$$(17)\quad f_1 g_1 : f_2 g_2 : f_3 g_3 = \sqrt{\theta_1}\,(\theta_2 - \theta_3) : \sqrt{\theta_2}\,(\theta_3 - \theta_1) : \sqrt{\theta_3}\,(\theta_1 - \theta_2),$$

unde mărimile θ sunt rădăcinile ecuaţiei în S a omografiei (9), introdusă prin teorema dela sfârşitul acestui alineat.

Conicele P, Q circumscrise lui F şi înscrise în G sunt date de ecuaţiile

$$(18)\quad \sum_1^3 \sqrt{\theta_i}\,\frac{g_i}{f_i}\,x_i^2 = 0\ ,\quad \sum_1^3 \frac{1}{\sqrt{\theta_i}}\cdot\frac{g_i}{f_i}\,x_i^2 = 0,$$

cum uşor se poate verifica, în virtutea lui (17). Ecuaţia lor în S este

$$\prod_1^3 (\theta_i + S) = 0,$$

aşa dar admite rădăcini proporţionale cu

$$\theta_1 : \theta_2 : \theta_3.$$

Deci problema care ne-am pus-o e rezolvată odată cu introducerea omografiei (9) din alineatul 5°. Ţinând seama de proprietatea care defineşte omografia, avem teorema:

Fie P, Q *două conice destul de generale. Punctele* M, N *ale căror conjugate simultane* M', N' *faţă de* P, Q *sunt aşezate pe o dreaptă* M' N', *conjugată simultană a lui* MN *faţă de aceleaşi conice, se corespund într'o omografie* Θ (sau inversa acesteia) *de aceeaş ecuaţie în* S *cu perechia* P, Q *a conicelor date. Omografia* Θ *e egală cu produsul polarităţilor* P, Q.

12°. Să cercetăm cum se resfrâng proprietăţile perechiei de conice P, Q, în proprietăţile omografiei covariante Θ.

Suntem conduşi astfel la unele desvoltări, asupra omografiilor în genere, de un interes independent de problema de faţă.

Numim *omografie identic înscrisă* omografia

$$(19)\qquad x_i^* = \theta_i\, x_i\ ,\qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

de «urmă» nulă, adică omografia pentru care suma rădăcinilor ecuației în S e nulă

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0. \tag{20}$$

Omografia a cărei inversă e identic înscrisă, o numim *identic circumscrisă.*

Aceste denumiri își găsesc îndreptățirea în următoarea teoremă:

O omografie de urmă nulă admite ∞^4 *perechi de triunghiuri omoloage* (nedegenerate), *unul în altul înscrise. Reciproc, dacă o omografie admite două triunghiuri omoloage, unul în altul înscrise, e o omografie de urmă nulă, admite așa dar* ∞^4 *astfel de perechi.*

Intr'adevăr, trebue să avem, conform enunțului:

$$\sum_i \theta_i \, y_i^1 \, x_i^1 = 0 \ , \ \sum_i \theta_i \, y_i^2 \, x_i^2 = 0 \ , \ \sum_i \theta_i \, y_i^3 \, x_i^3 = 0 , \tag{21}$$

unde x^1, x^2, x^3 sunt trei puncte formând un triunghiu nedegenerat, iar y^1, y^2, y^3, laturile acestuia. Prin urmare coordonatele y_j^i sunt determinanții de ordinul doi din matricea nesingulară, cu trei linii și trei coloane

$$(x_j^i).$$

Adunând între ele relațiile (21), obținem tocmai

$$| x | (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \equiv 0. \tag{22}$$

unde $| x |$ e determinantul matricei de mai sus.

Așa dar, pentruca una din relațiile (21) să fie consecința celorlalte două, e necesar și suficient ca urma omografiei să fie nulă.

Mai rămâne să arătăm că, fiind date arbitrar două puncte x^2 și x^3 putem găsi totdeauna un punct x^1 așa încât două din relațiile (21) să fie satisfăcute. Pentru aceasta considerăm omoloagele ξ^2 și ξ^3 ale lui x^2 și x^3. Luăm ca punct x^1 intersecția dreptelor $x^2\xi^3$ și $x^3\xi^2$, care e bine determinată, câtă vreme x^2 și x^3 *nu se găsesc în același timp pe una din dreptele fixe ale omografiei.* A doua și a treia din relațiile (21) sunt astfel satisfăcute în ∞^4 moduri, prima rezultând ca o consecință.

Teorema e demonstrată. Deși am întrebuințat forma canonică (19) a omografiei, legată de condiția simplicității rădăcinilor ecuației în S, se vede ușor că demonstrația se aplică și cazului general.

Pentru omografiile de ecuații generale (14), relațiile (21) se scriu :

$$\sum y_i^1 (a_i\, x^1) = 0 \quad , \quad \sum y_i^2 (a_i\, x^2) = 0 \quad , \quad \sum y_i^3 (a_i\, x^3) = 0,$$

de unde, prin adunare, obținem ca înmulțitori ai parametrilor a_{ij}, nouă determinanți de ordinul al treilea, dintre care trei sunt egali cu $| x |$ iar restul nuli. Avem, în definitiv, relația echivalentă cu (22)

$$| x | (a_{11} + a_{22} + a_{33}) = 0,$$

în care Σa_{ii} e însăși urma omografiei (suma schimbată de semn a rădăcinilor ecuației în S). Deci teorema e generală.

13°. Să reamintim acum câteva propoziții din teoria proiectivă a unui cuplu de conice.

Două conice P, Q, pentru care suma rădăcinilor ecuației în S e nulă

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0,$$

se zic *armonic înscrise,* în ordinea P, Q. Geometricește proprietatea revine la existența unui triunghiu și, de aici, a unei serii ∞^1 de triunghiuri, înscrise lui P și conjugate lui Q.

Două conice P, Q pentru care

$$1/S_1 + 1/S_2 + 1/S_3 = 0,$$

se zic armonic înscrise, în ordinea Q, P sau, ceeace e tot una, *armonic circumscrise* în vechia ordine P, Q.

Două conice P, Q pentru care

$$\varepsilon_1 \sqrt{S_1} + \varepsilon_2 \sqrt{S_2} + \varepsilon_3 \sqrt{S_3} = 0 \quad , \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

se zic două *conice ale lui* PONCELET, înscrise în ordinea P, Q. Ele se caracterizează prin proprietatea de a avea un triunghiu (și deci ∞^1) înscris în P și circumscris lui Q.

Să facem legătura, cu ajutorul teoremei dela alineatul 11°, între aceste proprietăți binecunoscute ale conicelor și proprietățile omografiilor, stabilite la alineatul 13°. Avem aceste rezultate importante :

Condiția necesară și suficientă ca două conice P, Q *să fie* armonic înscrise *în ordinea* P, Q, *e ca omografia covariantă* Θ (*sau inversa acesteia*) *să fie* identic înscrisă.

Condiția necesară și suficientă pentruca P, Q *să fie* conice ale lui PONCELET *înscrise în ordinea* P, Q, *e ca una din cele 4 „rădăcini pătrate" ale omografiei covariante, adică omografia* $\mathcal{T}$ *determinată de relația*

$$\mathcal{T}^2 = \Theta,$$

să fie identic înscrisă.

14°. Ultima proprietate pune problema *relației dintre două configurații* (F, G) *și* ($\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$) *pentru care omografiile covariante* Θ *și* $\mathcal{T}$ *sunt una, pătratul celeilalte*

$$\Theta^2 = \mathcal{T}.$$

Se știe că există o singură cubică cu un punct dublu dat și care trece prin 6 puncte date. Să considerăm deci cubica Φ^0 circumscrisă patrulaterului complect G (care trece deci prin fiecare din cele 6 intersecții ale laturilor) cu un punct dublu în F^0.

O proprietate bine cunoscută a acestei cubice este de a avea cele două ramuri din F^0 *respectiv tangente conicelor* P, Q *înscrise patrulaterului* G *și care trec prin* F^0. Să o demonstrăm pe scurt.

Ridicând, pentru Φ^0, condiția de a trece prin intersecția 01 a dreptelor G^0, G^1, de exemplu, se găsește că Φ^0 variază într'un fascicol linear și deci tangentele în nodul F^0 se corespund involutiv. Printre elementele fascicolului, două sunt reduse la grupe de câte trei drepte. Primul e format din dreapta G^2 complectată cu dreptele care unesc pe F^0 cu punctele 30, 31; al doilea, din dreapta G^3 complectată cu dreptele care unesc pe F^0 cu punctele 20, 21.

Așa dar involuția tangentelor nodale e determinată de razele care merg din F^0 la următoarele perechi de puncte

$$(I) \quad \begin{matrix} 20 & 30 \\ 21 & 31. \end{matrix}$$

La fel, schimbând rolul punctului 01, cu 02 și 03, găsim încă două involuții în care se corespund tangentele nodale:

$$(II) \quad \begin{matrix} 30 & 10 \\ 32 & 12 \end{matrix}, \qquad (III) \quad \begin{matrix} 10 & 20 \\ 13 & 23. \end{matrix}$$

Perechia de tangente nodale a lui Φ^0 e așa dar comună tuturor acestor involuții. Altfel spus, involuția care are ca raze unite aceste

tangente nodale e permutabilă în acelaş timp cu (I), (II) şi (III). Două involuţii, (I) şi (II) de exemplu, având o singură involuţie permutabilă, proprietatea e caracteristică pentru involuţia ale cărei raze unite sunt tangentele nodale ale lui Φ^0 .

Dar perechile de raze care merg de la F^0 la punctele

$$\begin{matrix} 10 & 20 & 30 \\ 23 & 31 & 12, \end{matrix}$$

în virtutea teoremei lui DESARGUES, se corespund într'o involuţie. Verificăm uşor că (I), (II) şi (III) sunt permutabile cu această involuţie a lui DESARGUES, ale cărei raze unite se ştie că sunt tocmai tangentele în F^0 la conicele P, Q, înscrise în G. Aşa dar aceste tangente coincid cu tangentele nodale ale cubicei Φ^0. Q. E. D.

Odată această propoziţie amintită, să particularizăm sistemul nostru de coordonate proiective aşa încât

$$g_i = g, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ecuaţiile tangentelor în F^0 la conicele P şi Q se deduc imediat din ecuaţiile (18) ale acestora:

$$\mathcal{A} \equiv \sum \sqrt{\theta_i}\, x_i = 0,$$

$$\mathfrak{B} \equiv \sum \frac{x_i}{\sqrt{\theta_i}} = 0.$$

Fie

$$\mathfrak{S} \equiv (\gamma x) = 0$$

ecuaţia dreptei care, cum se ştie, conţine cele trei puncte de inflexiune ale lui Φ^0. Ecuaţia acestei cubice raportată la triunghiul $\mathcal{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{S}$ e de forma

$$(22) \qquad \boxed{\alpha \mathcal{A}^3 + \beta \mathfrak{B}^3 + \mathcal{A}\mathfrak{B}\mathfrak{S} = 0} \ .$$

Scriind că această cubică trece prin vârfurile patrulaterului complect G, găsim pentru coeficienţii α, β, γ_i:

$$(22') \qquad \boxed{\begin{aligned} &\alpha : \beta : \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 \\ &= 1 : \theta_1\theta_2\theta_3 : \sqrt{\theta_1}(\theta_2+\theta_3) : \sqrt{\theta_2}(\theta_3+\theta_1) : \sqrt{\theta_3}(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}} \ .$$

Aşa dar axa $\mathfrak{S}$ a inflexiunilor are ecuaţia

$$\Sigma \sqrt{\theta_i}(\theta_j + \theta_k)\, x_i = 0, \tag{23}$$

unde i, j, k e o ordine ciclică a indicilor 1, 2, 3.

15°. Suntem acum în măsură să răspundem la problema care ne-am pus-o în alineatul precedent. Intr'adevăr, să considerăm axele $\mathfrak{S}^i$ ale celor patru cubice Φ^i analog definite cu Φ^0. Ecuaţiile lor se obţin din (23), schimbând în toate felurile semnele termenilor.

E clar că punctele (F) asociate dreptelor ($\mathfrak{S}$) ne dau o configuraţie (F, $\mathfrak{S}$) de felul lui (F, G). Nouii invarianţi $f_i\, \gamma_i$, care înlocuesc pe $f_i\, g_i$, se obţin uşor din (22') şi din (17), în care introducem particularizarea $g_i = g$. Găsim

$$f_i\, \gamma_i = \theta_i\, (\theta_j^2 - \theta_k^2).$$

Comparând cu (17) conchidem că omografia covariantă $\mathcal{C}$ a configuraţiei (F, G) are invarianţii τ_i daţi de relaţiile simple

$$\tau_i = \theta_i^2,$$

care se rezumă în relaţia simbolică

$$\mathcal{C} = \Theta^2.$$

De aici, propoziţia:

Dacă P, Q *sunt două conice destul de generale iar* Φ^i *cubicele nodale circumscrise patrulaterului tangentelor lor comune, cu noduri în câte una din intersecţiile* F^i $(i = 0, 1, 2, 3)$, *conicele* II, χ. *din acelaş fascicol punctual, tangente însă axelor de inflexiune ale cubicelor* Φ^i, *au ca omografie covariantă pătratul omografiei covariante a primelor conice.*

De aici şi din teoremele dela sfârşitul alineatului 13°, rezultă:

Dacă P, Q *sunt armonic înscrise, conicele* II, χ. *date de construcţia de mai sus au* ∞^1 *triunghiuri respectiv înscrise şi circumscrise.*

16°. In tot ce precede am asociat unei configuraţii reale (F, G), două conice P, Q înscrise în G şi circumscrise lui F.

Vrem să arătăm că P, Q *sunt imaginar-conjugate sau reale, după cum invariantul semn* σ, *din alineatul* 1°, *corespunzător configuraţiei* (F, G), *are una sau alta din valorile*

$$\sigma = +1 \quad , \quad \sigma = -1.$$

Intr'adevăr, tangentele în F^0 la P şi Q sunt razele unite ale involuţiei lui DESARGUES, formată de dreptele care unesc pe F^0 cu vârfurile opuse ale patrulaterului complect G.

Dacă această involuţie e eliptică, razele unite sunt imaginar conjugate. Dacă e iperbolică, razele sunt reale.

Se ştie însă că, la substituţiile omografice involutive, specia «eliptică» resp. «iperbolică» coincide cu specia «directă» resp. «stângă», uşor de caracterizat prin proprietăţi topologice. Pe de altă parte o involuţie nu-şi poate schimba specia decât devenind, prin modificări continue, odată singulară.

Amintim iarăşi că o involuţie determinată de două elemente omoloage a_1, a_2 şi b_1, b_2 nu e singulară decât dacă pentru două din aceste elemente avem $a_i \equiv b_j$ $(i \neq j)$.

De aici rezultă că involuţia lui DESARGUES e singulară numai pentru punctele F^0 de pe laturile patrulaterului G.

Aplicând aceste rezultate şi ţinând seamă de cercetările topologice din primul paragraf, urmează că, pentru punctele F^0 din domeniile triunghiulare, involuţia lui DESARGUES e de o anume specie, pentru punctele din domeniile cuadrangulare, de specia opusă.

Pe de altă parte, în unul din vârfurile triunghiului diagonal IJK, aşezat, cum am văzut, într'un domeniu cuadrangular, involuţia e evident iperbolică, razele unite fiind chiar laturile triunghiului diagonal, din acel vârf. Pentru domeniile cuadrangulare avem însă $\sigma = -1$, de unde, propoziţia de mai sus.

(Va urma). D. BARBILIAN.

ARITMETICA LUI GHEORGHE ASACHI

(Urmare dela pag. 69)

După operaţiile cu numerele întregi, urmează un capitol scurt (§§ 54—73, pag. 50—67) „*De zecimale*“. Reproduc aici definiţia (§§ 54—55):

„*Cu putinţă este de a împărţi un totul (lucru intreg) în atâtea părţi câte vom voi; dar este un chip particular de a împărţi un întreg, adecă socotindu-l împărţit în zece părţi ecvale, fieşcare din aceste iar în zece părţi ecvale, şi aşa mai departe. Când un*

totul este împărțit în zece părți, fiescare din aceste părți se numește zecine: 12 bani sunt o zecine de un leu; a zecea parte a unei zecini se numește sutine, Zecinea a unei sutine se numește miine, și așa mai departe; și acest feliu de unimi se numesc în deobște zecimale".

Vedem astfel că pe vremea lui ASACHI, zecile, sutele, miile, ect., se numiau *zecimi, sutimi, miimi*, etc., iar zecimile, sutimile, miimile, etc., se numiau *zecini, sutini, miini*, etc.

Pornind dela faptul că orice cifră pusă la dreapta unei alte cifre, reprezintă unități de zece ori mai mici decât aceasta, se explică că zecimile vin după unități simple, sutimile după zecimi, etc. „*Nu rămâne alta decât a ști în ce chip se va cunoaște că țifrile ordinare rostesc zecini, sutini, miini. Pentru aceasta s'au învoit a pune o comă între țifre care rostește unimi prințipale și între acea care înseamnă zecini*". Iată cum se scriu și se citesc astfel de numere (§ 58).

„*2,04 însemnează 2 întregi, nicicum zecini, 4 sutini; și 0,12 vra să zică nicicum unimi prințipale, 1 zecine și 2 sutini, sau mai ales 12 sutini, pentrucă o zecine prețuiește (§ 55) 10 sutini*".

Iau (§ 60): „*0,237, sau două sute triizeci șepte miini; se vede că acea depe urmă țifră 7 rostește miini, sau unimi ce răspund cu mia, sau cu 1 urmat de trii 0, adică atâte câte are țifre zecimale care asemenea sânt trii la număr*".

Se explică, clar și concis, cum se schimbă un număr, când mutăm virgula cu câteva locuri la dreapta sau la stânga, se arată că putem adăuga sau suprima oricâte zeruri vrem din dreapta unui număr zecimal. Adunarea și scăderea numerelor zecimale (§§ 64—66) făcându-se la fel cu operațiile corespunzătoare cu numere întregi, nu mă opresc asupra lor. Inmulțirea (§§ 67—69) nu se definește; se dă întâiu regula (§ 67): „*Inmulțirea numerelor zecimale se face ca acea a numerelor întregi; numai după operație, se desparte, prin o comă, spre dreapta productului, atâtea țifre, câte țifre se află după comă, la înmulțit și înmulțitoriul la un loc*". Se lucrează un exemplu: $6.4 \times 5,3 = 33,92$ și se dă o explicație, e drept, nu tocmai bună (§ 68). „*Spre a înțelege rezonul acestei urmări se cuvine a-și aduce aminte că a înmulți este a lua un număr atâte ori câte unimi se află în altul, în cât a înmulți prin 1, este a lua pe înmulțitul odată, a înmulți prin*

jumătate, sau jumătate de una, este a lua pe înmulțitul o jumătate de ori, sau a-i lua jumătatea, pentru asemenea cuvânt, a înmulți prin o zecine, este a lua a zecea parte a înmulțitului; dreptaceea, dacă și înmulțitul ar fi o zecine, sau 0,1, și că ar fi a se înmulți prin o zecine, vederat este că productul ar fi o sutine, pentru că a lua a zecea parte a unei zecini, este tot aceea ca și când s'ar împărți pe înmulțitul o zecine, în zece părți ecvale, și din aceste s'ar lua una", etc., arătând că înmulțind 0,4 prin 0,3 vom căpăta 12 sutimi, adică, va trebui să despărțim printr'o virgulă 2 cifre dela dreapta. Ca exemplu, se mai fac două înmulțiri: $4{,}024 \times 2{,}12$ și $0{,}002 \times 0{,}001$.

Impărțirea (§§ 70—73) nu se definește nici ea; avem, însă, o regulă urmată de o explicație sugestivă (§ 70): „*Dacă la împărțitul sunt atâte zecimale ca și la împărțitoriul, șterge coma la una și altă parte, și operează ca la împărțire cu numere întregi: câtoriul care va ieși va fi exact; căci ștergând comile, atât împărțitul cât și împărțitoriul se face fiștecare de zece, o sută, o mie... ori mai mare, precum ar avea una, două, trii,... zecimale a lor în urmă (§ 61). Dar, făcând aceste două numere de o potrivă mai mari, raportul care era mai înainte între ele nu încetează de a fi tot acela: acest adevăr se va face mai pipăitor, dacă ne vom închipui pe împărțitul ca un vas pe care voim a dișerta cu un mai mic; îndoind, întreiind,... înzecind,... capațitaua (încăperea) acelor două vase, atunce vom găsi că acel mai mare coprinde pe acel mai mic tot acel număr de ori; că o balercă cuprinde 12 ciuture, un vas de trii ori mai mare va cuprinde asemene douăsprezece ciuture de o capațita de trii ori mai mare decât cealaltă ciutură*".

Când deîmpărțitul are mai puține zecimale decât împărțitorul, sau viceversa, se pun atâtea zeruri decâte avem nevoie. Avem câteva exemple: $42{,}45 : 2{,}21 = 19\frac{46}{221}$; $42{,}4 : 2{,}213 = 19$, restul fiind (așa zice autorul) 353, Aici (§ 71) se arată că operația se poate continua cât vrem: „*Păzind marșa urmată până acum la împărțire, ar trebui a scrie această rămășiță 353 în urma câtoriului, și a scrie dedesupt pe împărțitoriul; dar, fiindcă scoposul propus, când se întrebuințează calculul cu zecimale, este chiar acela de*

a se feri de complicație (încâncire) a unor asemenea căuri, apoi, în loc de a scrie rămășița 353 în urma de 19, mai bine este a înainti operația în chipul următori:" (se continuă cu lucrarea, ajungându-se la rezultat: 42,4 : 2,213 = 19,159; tot mersul împărțirii este explicat pe larg, iar la urmă se conchide: „*Câtoriul total 19,159 este îndestulătoriu, pentru că spre a fi acel adevărat îi lipsește numai o miine*").

In numărul viitor vom arăta ceeace spune despre fracțiile ordinare.

(Va urma). V. CAZANACLI.

AL DOILEA CONGRES INTERBALCANIC AL MATEMATICIENILOR

Anul acesta, în urma hotărîrii luate la Delfi, la ședința de închidere a primului Congres Interbalcanic al Matematicienilor, a avut loc la București cel de al doilea Congres Interbalcanic, consacrat Matematicilor, care s'a bucurat de președinția de onoare a Majestății Sale REGELE CAROL II.

De organizarea Congresului s'a îngrijit un comitet pus sub președinția D-lui Profesor G. ȚIȚEICA.

Ședința de deschidere a avut loc, Duminică 12 Septemvrie 1937, ora 11, în aula Fundației Carol I. Aici li s'a împărțit Congresiștilor câte o insignă artistic lucrată, ce reprezintă celebra teoremă a lui PITAGORA.

Prima cuvântare a ținut-o D-l I. INCULEȚ, vice președintele Consiliului de Miniștri, după care au urmat cuvântările Domnilor: Profesor G. ȚIȚEICA, Profesor D. POMPEIU, delegaților facultăților de Știință din țară, a celor două Școale Politechnice și a Președintelui Societății Române de Matematici.

După acestea s'au înșiruit salutările delegaților străini; printre aceștia s'a remarcat atenția Domnului HATZIDAKIS care și-a citit discursul în românește.

Tot în această şedinţă s'a ales şi comitetul Congresului, sub preşedinţia D-lui Profesor POMPEIU.

Lucrările propriu zise ale Congresului au început Luni 13 Septemvrie. Din cauza numărului mare de comunicări, peste 60, acestea s'au ţinut, în acelaş timp, în două săli ale Facultăţii de Ştiinţe. Şedinţele au continuat trei zile, dimineaţa şi după masă, fiind urmărite cu viu interes, de o asistenţă numeroasă. De două ori pe zi, odată dimineaţa şi o dată seara, aveau loc conferinţe cu un caracter mai general. Ultima zi a Congresului a avut o pronunţată coloratură tehnică datorită multelor comunicări susţinute de ingineri.

Şedinţa de închidere a avut loc Miercuri, 15 Septemvrie ora 19, într'o atmosferă cât se poate de călduroasă. Delegaţia sârbă prin Domnul KASCHANIN a propus ca cel de al treilea Congres Interbalcanic să aibă loc, peste doi ani la Belgrad.

In afară de lucrările ştiinţifice ale Congresului, cari au fost pe cât de frumoase şi de interesante pe atât de variate, au avut loc două banchete oferite, unul de Comitetul de organizare al Congresului şi altul de Municipiul Bucureşti.

Pentru a arăta străinilor ceva specific ţării noastre s'a organizat o excursie la rafinăria dela Brazi şi pe valea Prahovei, cu un popas mai îndelungat la Breaza unde au putut cunoaşte şi admira folklorul şi costumele româneşti. Congresiştii străini au fost încântaţi de minunăţiile văii Prahova şi Sinaei.

Ziua următoare a fost destinată vizitării lucrărilor dela Bilciureşti şi a lacurilor din jurul Capitalei.

Ne putem bucura că acest Congres Interbalcanic, ţinut la Bucureşti a fost îmbelşugat în comunicări de o deosebită importanţă şi că datorită Comitetului de organizare, atmosfera din tot timpul Congresului a fost cât se poate de cordială, oaspeţii străini arătându-se încântaţi de felul cum a decurs Congresul.

PREDUŢA D. BUNGEŢEANU.

PROGRAMA ANALITICĂ

HOTĂRÎTĂ PENTRU CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE" DIN ANUL 1938.

Clasa IV-a. Toată materia prevăzută de programa analitică.

Clasa V-a. Grupa I. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. La împărțirea cu $(x+a)$ se va face rezolvarea ecuațiilor cu rădăcini întregi și fracționare.

2. La radicale se va face raționalizarea numitorilor cari conțin radicale patrate și de indici superiori.

3. La sistemele de ecuații de gradul I se vor cere metode particulare de rezolvare și sisteme reductibile la gradul I.

4. La discuția semnului trinomului se va face generalizare în legătură cu punctul 1.

5. Transformarea expresiunilor de forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

6. Progresiuni aritmetice și geometrice.

Grupa II-a. **Geometria plană.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Fascicole de drepte paralele și de drepte concurente (teoreme directe și reciproce).

2. Omotetia (La cercuri: centre de asemănare directe și inverse).

3. Teorema lui MENELAUS și CEVA și reciprocele lor.

4. Teoremele lui PTOLOMEU pentru patrulaterele inscriptibile. Teorema lui MIQUEL. Patrulater circumscris unui cerc. Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte.

5. Puterea unui punct față de un cerc. Ax și centru radical.

6. Raportul ariilor a două poligoane asemenea.

7. Reciproca teoremei lui PITAGORA. Relația metrică a lui STEWART. Aplicație la mediane, etc.

8. Poligoane regulate circumscrise.

Clasa VI-a. Grupa I. **Geometria în spațiu.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Unghiuri diedre. Măsura lor. Unghiuri triedre și poliedre, proprietățile lor.

2. Aria şi volumul trunchiului de piramidă. Extindere la con.

3. Volumul produs de un sector poligonal plan care se roteşte în jurul unei axe, Volumul zonei, calotei, sferei.

Grupa II-a. **Trigonometria.** Toată materia prevăzută în programa analitică până la «Aplicaţiile trigonometriei la agrimensură şi statică». In plus:

1. Aria unui triunghiu în raport cu elementele date.

2. Raza cercului circumscris în funcţiune de laturile triunghiului. Razele cercurilor înscrise şi exînscrise triunghiului. Relaţiuni.

3. Identităţi trigonometrice.

4. Cazuri particulare de rezolvare la triunghiuri dreptunghice şi oarecare.

5. Determinarea distanţelor între puncte inaccesibile.

6. Problema hărţii.

Clasa VII-a. Grupa I. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică, fără «Aplicaţii la cinematică».

Grupa II-a. **Geometria descriptivă.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Diviziuni armonice, fascicole armonice. Pol şi polară în raport cu un unghiu şi în raport cu un cerc.

Teoremele lui PASCAL şi BRIANCHON. Patrulatere complete.

2. Transformări: inversiune, polare reciproce.

Clasa VIII-a. Grupa I. **Algebra.** Materia prevăzută de programa analitică.

Grupa II-a. **Geometria analitică.** Materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Schimbarea de axe.

2. Pol şi polară.

3. Clasificarea conicelor.

Grupa III-a. **Mecanica.** Materia prevăzută de programa analitică. In plus Cinematica.

* * *

Orice candidat trebue să cunoască materia respectivă a clasei precedente cu adăugirile prevăzute în prezenta programă.

RAPORT PENTRU PREMIUL VASILE CONTA
PE ANUL 1937

Redacţia *Gazetei Matematice* a primit o singură lucrare în vederea premiului V. CONTA pentru anul 1937. Este monografia D-lui T. VESCAN despre *Axiomatica numerilor întregi*, lucrare originală foarte merituoasă. Ea e în acord cu tendinţa actuală de axiomatizare a întregei matematice. D-l T. VESCAN discută sistemul cunoscut de axiome ale numerilor întregi stabilit de PEANO şi arată că acest sistem poate fi înlocuit cu un altul, care prezintă unele avantagii mai ales în ceeace priveşte inducţia recurentă. Sistemul D-lui T. VESCAN este înrâurit de principiile introduse în fizica modernă şi reprezintă o actualizare a axiomelor enunţate acum câteva decenii de creatorul axiomaticei numerilor întregi.

Lucrarea D-lui T. VESCAN dovedeşte că cercetările de logică matematică încep să preocupe tot mai mult pe tinerii matematicieni români. Din acest punct de vedere, trebuesc neapărat semnalate şi studiile recente dela Iaşi.

Credem că atât prin actualitatea ei, cât şi prin incontestabila ei valoare şi originalitate, monografia D-lui T. VESCAN merită să fie premiată cu PREMIUL V. CONTA pentru anul 1937.

COMISIA PENTRU PREMIU:
P. SERGESCU, GH. ZAPAN şi D. STAN.

Acest raport s'a citit şi s'a aprobat de Adunarea generală din 27 August 1937.

NOTE MATEMATICE

11. **Acum o sută de ani în lumea matematică.** *Date culese în biblioteca Seminarului Matematic din Iaşi din publicaţiile timpului.*

Citäm din n. 1 al articolului lui J. LIOUVILLE: „*Mémoire sur l'intégration des équations différentielles à indices fractionnaires*“, *Journal de l'Ecole Royale Polytechnique,* Paris, vingt-cinquième cahier, 1837, pp. 58—84, care constituie o importantă contribuţie

la calculul operatorilor fracţionari, tocmai în perioada iniţială a desvoltării a ceeace formează astăzi vasta teorie a operatorilor liniari. „Calculul diferenţialelor cu indici fracţionari sau chiar iraţionali şi imaginari formează o nouă ramură a analizei care merită, cred, să fie bine studiată şi ale cărei aplicaţii vor fi, în viitor, nebănuit de largi. Chiar dela începutul cercetărilor mele asupra calculului diferenţialelor cu indici fracţionari, m'am ocupat de integrarea ecuaţiilor care cuprind astfel de diferenţiale. In această direcţie nu am publicat până acum decât enunţurile teoremelor şi unele cazuri particulare. In acest memoriu îmi propun să expun pe larg câteva metode de care s'ar putea folosi în aceste cercetări aşa de delicate, care nu au atras până acum atenţia matematicianilor... In primul rând am expus teoria ecuaţiilor liniare cu indici fracţionari, deoarece aceste ecuaţii pe deoparte se prezintă des în aplicaţii, iar de alta pot servi chiar pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale obişnuite".

Deasemenea J. LIOUVILLE în articolele *„Solution d'un problème d'Analyse"*, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, v. 2, Paris, 1837, pp. 1—2, şi *„Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable"*, Ibid., pp. 16—35, demonstrează teorema de existenţă într'un caz particular pentru faimoasa *problema momentelor*, introducând astfel, pentru prima oară, un sistem infinit de ecuaţii integrale de specia I-a cu limite fixe.

12. *Asupra patrulaterului complect.* Fie D, E, F mijloacele diagonalelor AM, BN, CP ale patrulaterului complect $(Q) \equiv (ABC, \Delta)$ şi S punctul lui MIQUEL al patrulaterului. Punctele I, J, K, L ale lui S pe laturile BC, CA, AB, Δ ale patrulaterului sunt colineare şi determină dreapta lui SIMSON $\partial \equiv (I, J, K, L)$ a lui (Q), care după cum se ştie, este perpendiculară pe dreapta lui NEWTON $(\Delta_1 \equiv D, E, F)$. Avem egalităţile unghiulare

$$(BC, SM) = (CA, SN) = (AB, SP) = \varphi.$$

Dreptele ∂ şi Δ, fiind perpendiculare, rezultă, de exemplu;

$$\theta = (\Delta, \Delta_1) = 90^0 - (\Delta, \partial) = 90^0 - JSN = (CA, SN) = \varphi.$$

Rezultă deci următoarea teoremă:

Intr'un patrulater complect, una din laturi întâlneşte dreapta lui NEWTON *sub un unghiu egal şi de acelaşi sens cu unghiul pe care îl formează celelalte trei laturi cu dreptele care unesc punctul lui* MIQUEL *cu intersecţiile lor cu latura considerată.*

Dacă α, β, γ sunt unghiurile de acelaşi sens pe care laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC le fac cu diagonalele AM, BN, CP ale patrulaterului (Δ), în virtutea unei teoreme cunoscute [1]), avem relaţiunea următoare:

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}\theta$$

pe care am propus-o în *Mathesis* şi unde i s'a dat o soluţie analitică la pag. 212 a Vol. LI din 1937.

V. THÉBAULT.

13. *Asupra punctelor izotomice.*

Fie A', A'' *punctele în care un cerc, trecând prin vârful* A *al triunghiului* ABC, *taie dreapta* BC — B', C' *izotomicele punctelor în care taie dreptele* AB, AC.

Pentru ca dreptele B'C', BC *să fie antiparalele în unghiul* A *este necesar şi suficient ca* A' şi A'' *să fie izotomice.*

Dacă A' şi A'' sunt izotomice

$$(1) \qquad \overline{BA'} \times \overline{BA''} = \overline{CA'} \times \overline{CA''},$$

deci

$$\overline{AB'} \times \overline{AB} = \overline{AC'} \times \overline{AC},$$

relaţie ce arată că dreptele B'C', BC sunt antiparalele în unghiul A.

Condiţia este necesară, pentrucă antiparalelismul conduce la (1). Dacă $\overline{BA'} = x$, $\overline{A''C} = y$, $\overline{A'A''} = a$, (1) se scrie

$$x(x + a) = y(y + a)$$

sau

$$(x - y)(x + y + a) = 0, \text{ de unde } x = y.$$

C. IONESCU-BUJOR.

---

1) A. THIRD. *Procedings of the Edinburg Mathematical Society*, 1913, pag. 17—34.

14. *Asupra problemei 3914. G. M. XXXIX -327.*

Voiu da o altă soluţie şi voiu face câteva observaţii asupra problemei:

Fie triunghiul ABC *şi punctul* O *din planul său. Paralela din* O *la* BC *taie pe* AB *şi* AC *respectiv în* C_b *şi* B_c *; fie* A_c *şi* C_a, B_a *şi* A_b *punctele analoage. Considerăm intersecţiile:*

$M_1 \equiv (B_c C_a , B_a C_b)$; $N_1 \equiv (C_a A_b , C_b A_c)$; $P_1 \equiv (A_b B_c , A_c B_a)$

$M_2 \equiv (A_b B_c , C_b A_c)$; $N_2 \equiv (B_c C_a , A_c B_a)$; $P_2 \equiv (C_a A_b , B_a C_b)$.

Să se demonstreze că

1°. *Dreptele* AM_1, BN_1, CP_1 *sunt concurente.*

2°. *Dreptele* AM_2, BN_2, CP_2 *sunt deasemenea concurente.*

(CEZAR COŞNIŢĂ).

1°. Fie A_1 intersecţia (AM_1, BC) , $A' \equiv (AO, BC)$; fiind dat A' pe BC se poate ajunge la A_1, luând O arbitrar pe AA'; fie $O \equiv A'$, paralelele din A' la AB, AC taie pe AC, AB în B_a , C_a ; $M_1 \equiv (BB_a , CC_a)$; rezultă

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{C'B}{C'A} \cdot \frac{B'A}{B'C} = \left(\frac{A'B}{A'C}\right)^2$$

—A_1, B_1, C_1, fiind totdeauna cuprinse între laturi —, $AA_1 \equiv AM_1, \ldots$ *sunt concurente.*

2°. Fie $A_2 \equiv (AM_2, BC)$, A', B', C' ca la 1° şi analoagele. E imediat că

$$\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{A_2A_c}{A_2A_b} = \frac{BA_c}{CA_b} = \frac{CA}{BA} \cdot \frac{BC'}{CB'}$$

deci $AA_2 \equiv AM_2, \ldots$ *sunt concurente.*

3°. Făcând o proiecţie a figurii pe un plan în care dreapta dela infinit a primului plan să devină o dreaptă oarecare (Δ), se ajunge la concluzia că *propoziţiile problemei subsistă integral când se înlocueşte condiţia ca dreptele din* O *să fie paralele, cu restricţia de a trece prin intersecţiile* α, β, γ *ale dreptei* (Δ) *cu laturile**).

4°. Să considerăm cubicele degenerate (AB, BC, CA) şi (Oα, Oβ, Oγ) care se taie în nouă puncte pe o cubică (γ); dar trei din puncte — α, β, γ — fiind colineare, cubica se desface într'o

*) A se vedea şi observările dela finele soluţiei loc. cit.

dreaptă şi o conică. *Exagonul* $C_a\,B_a\,B_c\,A_c\,A_b\,C_b$ *este deci înscris într'o conică;* aplicând teorema PASCAL, se observă că *triunghiurile* ABC şi MNP ($B_a\,C_a$, $C_b\,A_b$, $A_c\,B_c$) *sunt omologice**).

5°. Intr'un triunghiu ABC fie C_b, B_c puncte pe AC, AB şi O, arbitrar. $B_c\,C_b$ taie pe BC în α; fie (d_b) o dreaptă variabilă dusă prin B_c şi considerăm intersecţiile succesive:

$$A_c \equiv (d_b, BC);\ \beta \equiv (OA_c, AC),\ \gamma \equiv (\alpha\beta, AB),\ A_b \equiv (O\gamma, BC);$$

se obţine dreapta $C_b\,A_b \equiv (d_c)$; razele d_b, d_c sunt în corespondenţă omografică şi intersecţia lor M, descrie o conică; dar pentru $(d_b) \equiv B_c\,C_b$, $(d_c) \equiv (d_b)$ şi conica se reduce la o dreaptă, pentru $(d_b) \equiv AC$, $M \equiv A$; pentru $(d_b) \equiv OB_c$, $M \equiv O$ deci dreapta loc geometric este AO şi revenind la problemă când O este pe $B_c\,C_b$ se regăseşte omologia triunghiurilor ABC şi MNP *cu centrul în* O.

6°. Considerând exagonul înscris în ordinea $B_a\,C_a\,A_c\,B_c\,C_b\,A_b$ şi aplicând teorema PASCAL se găseşte că *intersecţiile* $(B_a\,C_a,\ B_c\,C_b) \equiv \alpha_1$ *şi analoagele* β_1, γ_1 *sunt colineare.* De altfel triunghiurile ABC, MNP fiind omologice şi α, β, γ puncte colineare pe laturile primului, $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ taie laturile triunghiului al doilea în punctele $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ colineare pe o dreaptă Δ_1 care taie pe Δ, pe axa de omologie. $A\alpha_1$ fiind conjugata cevienei AM_1 în unghiul BAC, rezultă că $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ *taie laturile triunghiului* ABC *în puncte colineare* pe polara intersecţiei AM_1, BN_1, CP_1.

Considerând exagonul înscris în ordinea vârfurilor $C_a\,B_c\,A_b\,B_a\,C_b\,A_c$ şi aplicând iar teorema laturilor opuse, se observă că punctele M_1, M_2, O sunt colineare; analog pentru celelalte. Deci *triunghiurile* $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$ *sunt omologice de centru* O.

7°. Transformând propoziţia prin polare reciproce, se obţine: *o dreaptă* O *taie cevienele* (α), (β), (γ) ale unui punct Δ în α, β, γ, *care unite respectiv cu vârfurile* B *şi* C, C *şi* A, A *şi* B, *formează dreptele* B_c, C_b; C_a, A_c; A_b, B_a. 1°. *Dreapta* (M_1) *care uneşte intersecţiile* (B_c, C_a) *şi* (B_a, C_b) *taie pe* BC *în* m_1; *analog se obţin* n_1, p_1; m_1, n_1, p_1, *sunt colineare.* 2°. *Dreapta* (M_2) *care uneşte intersecţiile* (A_b, B_c) *cu* (C_b, A_c) *taie latura* BC *în* m_2; *analog se obţine* n_2, p_2; m_2, n_1, p_2 *sunt colineare.*

Chestiunea e departe de a fi epuizată.

N. N. MIHĂILEANU.

---

*) A se vedea şi observările dela finele soluţiei loc. cit.

15. *Asupra problemei 4760.* Soluţiile acestei probleme, rezolvată la pag. 662 Vol. XLII din *Gazeta Matematică*, se pot găsi fără a rezolva cele 10 ecuaţii de forma

$$10a + 2b = S_i \tag{1}$$

în care S_i are valorile dela 36 la 45 inclusiv. In adevăr, observând că

$$36 \leqslant 11a + 2b \leqslant 45$$

se vede că a poate fi numai 2 sau 3 şi atunci se deduce

$$a = 2 \; ; \quad b = 9,\ 8,\ 7$$

$$a = 3 \; ; \quad b = 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2$$

de unde se găsesc cele 5 soluţiuni publicate la pag. 663 Vol. XLII plus soluţiunea

$$29 = 0 + 1 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8$$

care nu a fost menţionată în soluţia dată.

G. G. GONSTANTINESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA PREGĂTITOARE DE OFIŢERI (SECŢIA GENIU)

Examenul de admitere

Prima probă (durata 4 ore)

ARITMETICA

1. Să se calculeze expresia:

$$E = \frac{21}{10} \times \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}}{2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}} : \frac{\left(3 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{10} + \frac{1}{3}\right)}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

2. Să se afle două numere A şi B cunoscând cel mai mare comun divizor $D = 20$ şi cel mai mic comun multiplu $m = 420$.

3. Să se calculeze valoarea numărului $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ cu o aproximaţie de $\frac{1}{100}$.

GEOMETRIE PLANĂ

4. Intr'un triunghiu dreptunghic ABC, ipotenuza BC este împărţită în trei părţi egale de punctele D şi E.

Să se demonstreze că suma patratelor laturilor triunghiului ADE este egală cu două treimi din patratul ipotenuzei.

GEOMETRIE ANALITICĂ

5. Se consideră o parabolă şi un punct P pe axa ei. Prin P ducem o secantă care taie parabola în punctele A şi B. Tangentele în A şi B la parabolă se taie într'un punct M. Se cere:

a) Să se găsească unghiul pe care-l fac între ele cele două tangente.

b) Care este condiţia ca acest unghiu să fie drept.

c) Să se găsească locul punctului M, când secanta AB variază trecând necontenit prin P. Să se explice rezultatul geometric.

A doua probă (4 ore)

ALGEBRĂ, TRIGONOMETRIE, MECANICĂ

1. Ce relaţiune trebue să existe între p şi q pentruca rădăcinile ecuaţiei $x^2 + px + q = 0$, să fie într'un raport dat m?

2. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresiunea:

$$\frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\sin b}$$

3. Se dă funcţiunea:

$$y = \frac{3x^2 + 2x - 33}{\sqrt{q - x^2}}$$

Se cere:

a) Să i se studieze variaţia şi să i se facă graficul.

b) Din studiul acestei variaţii să se deducă natura rădăcinelor ecuaţiei:

$$(3x + 11)^2 (x - 3) - a^2 (x + 3) = 0.$$

c) Fie M, m, A punctele unde funcţiunea dată este maximă, minimă şi taie axa Ox. Să presupunem că în O acţionează trei forţe dirijate după segmentele OM, Om şi OA şi ale căror intensităţi sunt proporţionale cu lungimile acestor segmente. Se întreabă după ce direcţie şi cu ce intensitate trebue să lucreze o forţă în O ca să echilibreze sistemul format de forţele date (O este origina axelor).

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXIV. Fascicola III. Septembrie 1937. Sistemele de inecuaţii lineare şi aplicaţiile lor la studiul corpurilor convexe de F. LA MENZA. Ortogonalitatea fără pondere. Problema HERMITTE de F. L. GASPAR.

Idem. Suplemento. *Homenaje a la memoria del ingeniero* GUILLERMO MARCONI.

Boletin Matematico. Anul X. Nr. 2. Aprilie 1937. Buenos Aires. O teorie generală a numărului complex de L. GUTIÉRREZ NOVOA. Proprietăţi ale numerelor de A. MOESSNER.

Idem. Nr. 3. Septemvrie 1937. Buenos Aires. DARMOIS-LEVI-CIVITA—TERRADAS. Asupra triunghiurilor pitagorice de R. NOGUERA. Paranteze de ordin superior de B. I. BAIDAFF.

Idem. Nr. 4. Septemvrie 1937. Buenos Aires.

Bulletin Of the American Mathematical Society. Vol. XLIII, Nr. 8. August 1937. Menasha. Metode moderne de analiză în teoria potenţialului de G. C. EVANS. Existenţa curbelor plane algebrice de T. R. HOLLCROFT. Neegalităţile IENSEN de E. I. MC SHANE. Funcţionale bilineare în câmpul funcţiunilor bornate, măsurabile de H. H. GOLDSTINE. Asupra spaţiilor metrisabile compacte locale de H. E. VAUGHAN. Asupra unei teoreme pentru metoda EULER de sumare a seriilor, de YOSHITOMO OKADA. Notă asupra continuităţii funcţiei ergodice de M. H. MARTIN. Forme trilineare, real canonice, binar simetric de R. OLDENBURGER. Câteva neegalităţi asupra funcţiunilor de tip exponenţial de R. I. DUFFIN şi A. C. SCHAEFFER.

Notă asupra relaţiei între continuitate şi gradul aproximaţiei polinomiale în domeniul complex de I. L. WALSH şi W. F, SEWELL. Convoluţiuni bornate de F. R. VAN KAMPEN şi AUREL WINTNER. Asupra unei teoreme de inaltă reciprocitate de A. WHITEMAN. Cea mai generală transformare plană care transformă cercuri în cercuri de C. CARATHÉODORY. Notă asupra determinanţilor de M. H. INGRAHAM. O nouă definiţie a integralei STIELTJES de A. H. COPELAND. Asupra postulatelor din Algebra BOOL de S. HOBERMAN şi I. C. MC KINSEY.

Idem. Nr. 9. Septemvrie 1937. Menasha Wisconsin.

Deutsche Mathematik editat de TH. VAHLEN. Anul II, caietul I. Aprilie 1937.

Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii. Anul IV, Nr. 1. 1 Octomvrie 1937. Bucureşti.

Idem. Nr. 2. 1 Noemvrie 1937. Bucureşti.

Journal de Mathématiques élémentaires. Publicat de H. VUIBERT. An 62. Nr. 1. 1 Octomvrie 1937. Paris. Asupra unei construcţii generale a conicelor de M. D'OCAGNE.

Idem. An 62. Nr. 2. 15 Octomvrie 1937 Paris.

Mathesis. Tom LI. Nr. 7. Iulie 1937. Asupra geometriei tetraedrului de N. ALTSHILLER-COURT. Cercetarea grupelor de colineaţii păstrând o suprafaţă cubică de S. PISCADOR. Asupra centrului instantaneu de similitudine de

R. DEAUX. Colineații și puncte infinit vecine de P. LIBOIS. Asupra sistemului de ecuații algebrice considerat de indieni de G. LORIA și A. SINGH. Asupra unor triple de curbe plane de R. GOORMAGHTIGH. Asupra câtorva ecuații diofantiene ne cuprinzând patrate și bipatrate de A. GLODEN. Asupra integralelor infinit vecine ale ecuațiilor diferențiale de J. MORANT. Cercurile CHASLES și problema 2971 de AD. MINEUR.

Pitagora. Anul III. No. 1. 15 Octomvrie 1937. Colegiul național „Carol I" Craiova. Despre sumarea puterilor asemenea ale primelor *n* numere consecutive de V. POSTOLACHE.

Revista Matematică din Timișoara. Anul XVII. Nr. 8. 15 Octomvrie 1937. Timișoara. Articol de trigonometrie de N. N. MIHĂILEANU.

Sphinx, revue mensuelle des questions récréatives. Anul VII. No. 11. Noemvrie 1937. Bruxelles.

Știință și Progres, revista științifică a liceelor militare. Anul IV. Nr. 5. 10 Octomvrie 1937. Târgu-Mureș.

The mathematical Gazette. Vol. XXI. Nr. 245. Octomvrie 1937. London.

Universidad nacional de la Plata. *Primera reunion anual de caminos.* 1937.

G. G. CONSTANTINESCU. *Sur la flexion des pièces droites* (extras din „Bulletin de l'Ecole Polytechnique"). București.

A. GLODEN. *Formules générales pour des chaines trigrades* (extras din „The Tôhoku Mathematical Journal").

C. IONESCU-BUJOR. *Sur deux classes de courbes* (extras din „Bulletin de l'Ecole Polytechnique"). Timișoara.

J. GONZALEZ PERERA. *Concepto de àngulo.* San Josè.

V. THÉBAULT. *Sur une une nouvelle sphère associée au tétraèdre* (extras din „Annales dela Société Scientifique). Bruxelles.

V. THÉBAULT. *Sur une application du dernier théorème de* FERMAT (extras din „l'Eneseignement Mathématique") Genève.

V. THÉBAULT. *La sphère de* LONGCHAMPS (extras din „l'Enseignement Mathématique") Genève.

THÉOPHILE VESCAN. *Considérations sur le problème des deux corps dans le cas des masses variables* (extras din „Bulletin de l'Ecole Polytechnique") Timișoara.

TEOFIL VESCAN. *Probleme de capacitate din 1937* (extras din „Știință și Progres"). Tg. Mureș.

AD. MINEUR. *Géométrie Vectorielle:* I. Algèbre vectorielle IV-ème édition. Bruxelles. Albert Vauderlinden, Libraire éditeur.

Cartea începe cu o biografie omagiu a lui JUNIUS MASSAU, profesor de mecanică al autorului la şcoala normală de ştiinţe, biografie urmată de o listă a publicaţiilor lui JUNIUS MASSAU.

Capitolul I este destinat definiţiilor, adunării şi scăderii vectorilor. Pentru a da o idee de grija pe care o pune D-l AD. MINEUR în ciselarea amănuntelor definiţiilor, notaţiilor, numirilor, vom cita:

« Vectori echipolenţi. 1. *Se zice că doi vectori sunt echipolenţi în următoarele trei cazuri:* 1° *când coincid;* 2° *când au aceeaşi linie de acţiune şi unul din ei poate să coincidă cu celălalt, lunecând pe această linie;* 3° *când sunt laturile opuse ale unui paralelogram ale cărui celelalte două laturi opuse unesc respectiv originile şi extremităţile lor. Echipolenţa vectorilor* $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ *se arată prin formula* $\overline{AB} = \overline{CD}$, *în care semnul* $=$ *se citeşte «echipolent cu» sau «egal cu» şi se zice că această formulă este* **o echipolenţă** *sau* **„o egalitate vectorială“.**

Claritatea, mersul progresiv al materialului şi neomiterea elementelor de importanţă minoră fac volumul preţios pentru acel ce se iniţiază în calculul vectorial.

Tot în Cap. I se introduc noţiunile de *monom geometric, polinom geometric,* iar ca final, sub formă de amplu exerciţiu este tratată problema *centrului distanţelor proporţionale.*

Capitolul II dă teoremele obişnuite referitoare la proiecţii, apoi cercetează coordonatele unui punct.

In *Capitolul III* se studiază produsul scalar a doi vectori, câteva aplicaţii geometrice şi trigonometrice, cosinusul unghiului a doi vectori, lucrul unui vector.

Se introduce forma cuadratică

$$\psi f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos(yz) + 2zx \cos(zx) + 2xy \cos(xy),$$

care permite exprimarea simplă a multor rezultate.

Capitolul IV cercetează coeficienţii directori ai axelor şi chestiunile anexe. De asemenea, pentru conciziunea rezultatelor se introduce forma cuadratică $\omega(\xi, \eta, \zeta)$ al cărei discriminant este determinantul reciproc al discriminantului funcţiunei ψ. Capitolul se încheie cu calculul sinusului triedrului a trei axe, teorema lui APPELL relativă la triedrele trirectangulare, volumul tetraedrului.

Capitolul V prezintă produsul vectorial, vectori reciproci, momentul unui vector într'un punct, iar în *Capitolul VI* se desăvârşeşte studiul acesta, se definesc coordonatele unui vector $\overline{AB}$ într'un punct O prin 2 vectori $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ daţi de echipolenţele $\overline{OC} = \overline{AB}$, $\overline{OD} = M_0\overline{AB}$., se demonstrează teorema lui VARIGNON, se numesc coordonatele unei axe şi unei drepte, respectiv prin coordonatele vectorului director B al unui vector aşezat pe dreaptă.

Capitolul VI se încheie prin studiul invarianţilor unui sistem de vectori.

In *Capitolul VII* se operează cu sistemele de vectori, iar în următorul se defineşte câmpul de momente.

Ultimele două capitole ale volumului cercetează momentele relative ale vectorilor, axelor, dreptelor, sistemelor de vectori şi funcţii lineare de vectori.

Studiul funcţiunilor lineare este amplu făcut şi se introduc rezultate relativ recente cum este următorul, al D-lui P. LIBOIS: *«Dacă* φ'_1, φ'_2 *sunt funcţiunile conjugate pentru două funcţiuni lineare* φ_1, φ_2 *dintre care a a doua, cel puţin, este de primul gen şi dacă* $\overline{1x}$, $\overline{1y}$, $\overline{1z}$ *sunt vectorii directori ai muchiilor unui triedru tridreptunghiu* $Oxyz$, *pentruca funcţiunea lineară* $\theta = \varphi_1 \varphi_2^{-1}$ *să fie simetrică este necesar şi suficient ca*

$$\sum_{x,y,z} M \varphi'_1(\overline{1x}) \varphi'_2(\overline{1x}) = 0^*.$$

Algebra vectorială a D-lui AD. MINEUR credem că reprezintă cristalizarea didactică a calculului vectorial. Este necesară studentului anului I de matematici şi utilă elevilor claselor ştiinţifice ale liceelor, cel puţin pentru o bună şi nefalsificată însuşire a elementelor.

C. IONESCU-BUJOR.

PAUL APPELL. *Traité de Mecanique rationelle.* Tome IV. Fasc. II. Ed. II. Gauthier-Villars. Paris. 1937,

In această fascicolă de 292 pagini rectorul onorar al Universităţii din Paris, cu concursul D-lui ALEX. VÉRRONET, astronom la observatorul din Strassbourg, expune rezultatele obţinute până acum în studiul *figurile de echilibru ale unei masse eterogene în rotaţie,* precum şi pe cele obţinute asupra *formei pământului şi a planetelor.* Ea formează a doua fascicolă a volumului IV, din care prima apărută în anul 1920, se ocupă de *figurile de echilibru ale unei masse lichide omogene în rotaţie sub atracţia newtoniană a particulelor sale.*

După ce, în capitolul I, se face o expunere istorică a lucrărilor şi rezultatelor, din antichitate şi până azi, se trece, în *Partea I,* la studiul *condiţiunilor generale ale echilibrului hidrodinamic.* Expunerea conţine 4 capitole care se ocupă cu: ecuaţia fundamentală a hidrodinamicii; echilibrul relativ; mişcarea permanentă şi mişcarea zisă *permanent-relativă.*

In *Partea II* se face *studiul general şi evoluţia formei unei masse eterogene;* ea conţine 4 capitole tratând despre: studiul general al formelor elipsoidale; evoluţia generală a figurilor de echilibru; elipsoizi de revoluţie omofocali şi omotetici; limitarea unei masse eterogene prin doi elipsoizi omogeni.

Remarcabilă teorema lui M. HAMY care demonstrează că *în echilibrul relativ straturile de aceeaşi densitate ale unei masse eterogene nu pot fi elipsoidale.*

De asemenea interesantă proprietatea că *forţa de atracţie este totdeauna superioară forţei centrifuge, atât în interiorul cât şi la suprafaţa unei masse fluide eterogene, ale cărei suprafeţe de nivel sunt elipsoizi de revoluţie, oricare ar fi repartiţia densităţilor şi viteza de rotaţie.* De aci rezultă imposibilitatea *fracţionării planetelor,* căreia i se atribue deobiceiu naşterea sateliţilor.

Partea III se ocupă cu *Forma pământului,* şi conţine 4 capitole: proplema lui CLAIRAUT şi ipoteza suprafeţelor de nivel elipsoidale; relaţiuni între densitate şi turtiri; problema lui POINCARÉ; calculele în a doua aproximaţie.

Sunt interesante de urmărit limitele determinate de matematicieni pentru inversul turtirii pământului, şi de comparat cu cele obţinute prin măsurătorile geodezice din acele timpuri. Este uimitor cum calculele matematice, servindu-se de unele valori cunoscute din fizică şi de măsurători astronomice, au permis restrângerea acestor limite. Avem de exemplu:

$$297{,}10 < 1 : e < 297{,}39,$$

limite ce depăşesc cu mult precizia măsurătorilor geodezice. Aceste două limite au fost stabilite: prima, de H. POINCARÉ în 1889 iar a doua de ALEX. VÉRRONET în 1912. Totuşi aceste valori limite au nevoie de oarecare corecţiuni, iar calculele în a doua aproximaţie au condus la reducerea valorii medii cu aproape o unitate. Ca limite mai restrânse chiar decât cele de mai sus, obţinute prin calculele de a doua aproximaţie, citâm pe cele stabilite de ALEX. VÉRRONET pe baza unor calcule numerice şi practice

$$296{,}44 < 1 : e < 296{,}48,$$

ce nu diferă decât cu 0,04.

Partea IV conţine următoarele capitole: variaţia greutăţii şi turtirea pământului; aplicarea diferitelor legi de densitate acestei probleme; alte ipoteze decât a lui CLAIRAUT; vitezele interne şi deplasările la suprafaţă; Jupiter şi Saturn, forma exterioară şi constituţia lor internă.

Se încearcă o explicaţie a cutremurelor de pământ şi a deplasării polilor şi continentelor; cutremurele ar avea, după calcule, o frecvenţă maximă în jurul paralelelor de 35°.

Pentru Jupiter şi Saturn inversele turtirilor, care sunt aproximativ 1 : 15 şi 1 : 10, nu pot fi explicate decât admiţând că aceste planete posedă un sâmbure central şi că legea de variaţie a densităţilor în raport cu adâncimea prezintă o inflexiune bine marcată în vecinătatea acestui sâmbure. Aceleaşi concluzii şi pentru Soare. Se mai examinează condiţiile mecanice pentru formarea inelului lui Saturn.

Cartea în întregime este foarte interesantă, în special pentru studenţii ce se ocupă cu probleme de *Mecanică cerească*. O expunere foarte sistematică şi un bogat material istoric uşurează studirea ei. Studiul necesită însă cunoştinţe temeinice de analiză şi mecanică.

ULPIU FLORESCU.

CERERI

271. In un document din 18/I 1800 se vorbeşte de hartă topografică la o hotărnicie. Se pomeneşte de asemenea hărţi de hotărnicii cu mult mai înainte?

I. I.

DIVERSE

Societatea română de Ştiinţe, Secţia Matematică în şedinţa din *21 Decemvrie 1937* s'a ales pentru anul 1937 următorul Comitet: N. CIORĂNESCU preşedinte, CR. MATEESCU vice-preşedinte, GH. TH. GHEORGHIU şi PREDUŢA BUNGEŢIANU secretari, TH. DUMITRESCU casier, I. IONESCU, D. GERMANI, M. GHERMĂNESCU şi G. SUDAN membri în comitet, G. ŢIŢEICA, V. VÂLCOVICI, D. POMPEIU, O. ONICESCU şi D. BARBILIAN drept comitet al Buletinului.

Societatea a ţinut următoarele şedinţe:

18 Ianuarie 1937 au comunicat D-nii: ALEX. FRODA, *Problema aditivităţii mulţimilor nemăsurabile* şi D. BARBILIAN, *Involuţii lineare în interpretare spaţială.*

1 Februarie 1937 au comunicat D-nii: O. ONICESCU, *Reprezentarea unor funcţii armonice din spaţiu* şi M. NICOLESCU, *Proprietăţi de medie ale funcţiunilor armonice definite într'un semi-plan sau într'un unghiu drept.*

15 Februarie 1937 au comunicat D-nii: GH. EM. FILIPESCU, *Metoda reţelelor în studiul plăcilor plane,* ALEX. PANTAZI, *Asupra triţesuturilor exagonale rectilinii* şi N. CIORĂNESCU, *Contribuţii la problema deformării plăcilor elastice.*

1 Martie 1937. D-l P. SERGESCU *face comemorarea lui* P. DUBEM şi E. GOURSAT.

15 Martie 1937 au comunicat D-nii: I. IONESCU: *Un caz de transmitere excentrică de eforturi,* N. TEODORESCU, *Asupra polinoamelor areolare* şi GH. TH. GHEORGHIU, *Asupra funcţiunilor generatoare ale polinoamelor lui* KUMMER.

29 Martie 1937 au comunicat D-nii: M. NICOLESCU, *Funcţiuni poliarmonice într'un semi-plan* şi N. CIORĂNESCU, *Asupra produsului a două funcţiuni analitice reale.*

12 Aprilie 1937 au comunicat D-nii: G. ŢIŢEICA, *Reprezentarea conformă şi congruenţe* şi AL. GHIKA, *Asupra unei desfăşurări în serie a funcţiilor analitice în domenii infinite.*

19 Aprilie 1937 a comunicat D-l VÁCLAV HLAVATÝ, profesor la Universitatea din Praga, *Algebra şi analiza tensorială.*

20 Aprilie 1937 a comunicat D-l VÁCLAV HLAVATÝ, *Normala afină şi cuadricele lui* DARBOUX.

11 Mai 1937 a comunicat D-l MAURO PICONE, profesor la Universitatea din Roma, *Vederi unitare asupra integrărei ecuaţiilor lineare cu derivate parţiale.*

17 Mai 1937 a comunicat D-l W. SIERPINSKI, profesor la Universitatea din Varşovia, *Problema măsurii.*

31 Mai 1937 au comunicat D-nii: ALEX. PANTAZI, *Caracterizări proiective a unor ţesuturi plane* şi N. TEODORESCU, *Forma invariantivă a ecuaţiilor cu derivate parţiale lineare.*

Sporirea Bibliotecii.

H. IACOB. Elemente de geometrie pentru clasa III secundară de băieți. Ediția I. București 1911.
Idem Ediția II. București 1915.

H. IACOB. Elemente de geometrie pentru clasa III secundară de fete. Ediția I. București 1912.
H. IACOB. Geometria în spațiu pentru clasa IV secundară de băieți. Ediția I. București 1913.
H. IACOB. Geometria în spațiu (Corpurile rotunde) pentru clasa IV secundară de fete. Ediția I. București 1914.
Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

Procedeele industriale de sudură de CORNEL MIKLÓSI și CONSTANTIN C. TEODORESCU. Vol. I, ediția II-a.
Donat de Institutul Român de Energie No. 105.

Idem. Vol. II.
Donat de I. R. E. No. 106.

Blitschutz von elektrischen Anlangen de D. MÜLLER-HILLEBRAND.
Donat de I. R. E. No. 109.

Le nombre de pôles dans le projet d'une machine à courant continu de CESAR PARTENI ANTONI și PAUL ȘTIUBEI.
Donat de I. R. E. No. 110.

Gurile Dunării de GRIGORE C. VASILESCU.
Donat de I. R. E. No. 111.

Disjoncteurs sans huille et a faible volume d'huile de G. M. BLANC.
Donat de I. R. E. No. 112.

Beitrag zur Rechnerischen Ermitllung der Wertbestimmung einer Flusstrecke de ROBERT JACOBI.
Donat de I. R. E. No. 113.

Amenajarea căderilor de apă în România de DORIN PAVEL.
Donat de I. R. E. No. 114.

Mișcarea aluviunilor în cursurile de apă ei la lucrările de derivare de D. GERMANI.
Donat de I. R. E. No. 115.

Problema energetică în România și raporturile și cu noua lege administrativă de C. I. BUDEANU.
Donat de I. R. E. No. 116.

Organizarea națională a producțiunii de energie de C. IANCULESCU.
Donat de I. R. E. No. 117.

Contribuţiuni la studiul umidităţii cărbunilor româneşti de E. COLEV.
Donat de I. R. E. No. 118.

Elektrizität in der Landwistschaft de FRIEDRICH BROCK.
Donat de I. R. E. No. 119.

Power resources of Roumania. Their developement und utilisation. Prezentată la a treia conferinţă de Energie. Washington 1936 de DORIN PAVEL şi EUGEN BODEA.
Donat de I. R. E. No. 120.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2289. *Să se rezolve un patrulater* ABCD, *cunoscând trei laturi consecutive* DA, AB, BC *şi unghiurile* A *şi* B.

E. N. BARISIEN.

Problema se reduce la problema clasică a rezolvărei unui triunghiu când se cunosc două laturi şi unghiul cuprins între ele. In adevăr din datele enunţului în triunghiul ABC se cunosc laturile AB, BC şi unghiul B şi se deduc unghiurile CAB, ACB şi latura AC, deci în triunghiul DAC se cunosc laturile DA, AC şi unghiul DAC, ca diferenţă între unghiul dat A şi unghiul calculat DAC.

In anul 1915 când s'a propus problema şi în anul următor 1916, s'au primit foarte bune soluţiuni dela: V. ANASTASIU, I. APRIHĂNEANU, A. ARNOLD, R. AUGUSTIN, R. BELIAN, H. BERLINBLUM, E. BROŞTEANU, C. BULGĂREANU, V. CEAUŞOGLU, H. CUŞUTĂ. M. DAVIDESCU, GH. DUMITRESCU, D. GEORGESCU, M. GHERMĂNESCU, S. GOROVEI, S. GRÜNBERG, L. HAHN, N. HAIM, IONESCU D. I., I. KIWOWICZ, D. LĂZĂRESCU, I. M. LĂZĂRESCU, AL. MANOLIU, P. MELAS. C MITESCU, N. NEAMŢU, ST. NEGOESCU, C. NICOLAU, ST. NICULESCU, O. ORĂNESCU, I. PANTOLEON, V. PINTILESCU, N. POPP, G. ROSENBERG, S, ŞTEFĂNESCU, L. TEODORIU, AL. TRIANDAF, R. TUDORAN, ST. URZICEANU, A. VELLAN, W. WARENBERG şi N. ZAHAREANU.

Anul acesta s'a primit o foarte bună soluţiune dela D-l G. G. CONSTANTINESCU.

PROBLEMA 2397. *Să se studieze natura seriei :*

$$1+\frac{2}{p}+\frac{3}{p^2}+\frac{5}{p^3}+\frac{8}{p^3}+\ldots,$$

şi să se însumeze în caz de convergenţă.

AL. PANTAZI.

Se observă că numărătorul termenului general v_n al seriei, este termenul general u_n al şirului lui FIBONACCI, aşa că seria este :

$$\frac{u_1}{1}+\frac{u_2}{p}+\frac{u_3}{p^2}+\ldots+\frac{u_n}{p^{n-1}}+\ldots$$

Pentru a studia natura acestei serii, să aplicăm teorema raportului, avem :

$$(1)\qquad \lim_{n=\infty}.\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{p}\lim_{n=\infty}.\frac{u_{n+1}}{u_n}\ .$$

Insă între doi termeni consecutivi ai şirului lui FIBONACCI, există relaţia :

$$(2)\qquad u_{n+1}^2-u_n\,u_{n+1}-u_n^2+(-1)^n=0$$

(*Gazeta Matematică*, Vol. XXII, pag. 253).

Din (2) deducem, privind pe u_{n+1} ca necunoscută :

$$u_{n+1}=\frac{u_n\pm\sqrt{u_n^2+4u_n^2-4(-1)^n}}{2}\ .$$

De aci deducem :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{5-\frac{4(-1)^n}{u_n^2}}\right],\ \text{căci}\ u_{n+1}>u_n\ ,$$

deci :

$$\lim_{n=\infty}.\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

şi relaţia (1) devine :

$$\lim_{n=\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2p}(1+\sqrt{5}).$$

Dacă:

$$(2) \qquad \frac{1}{2p}(1+\sqrt{5}) < 1 \text{ , adică: } p > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

seria dată este convergentă, iar dacă

$$p < \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

seria dată e divergentă.

Ne rămâne acum a calcula suma S a seriei date, în cazul (2), când ea este convergentă.

Pentru aceasta, ţinând seamă de relaţia:

$$u_n = u_{n+1} - u_{n-1},$$

ce există între numerile lui FIBONACCI, putem scrie succesiv:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{p^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{p^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-1}}{p^{n-1}} =$$

$$p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{p^n} - \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-1}}{p^{n-2}} = p\left(S - \frac{u_1}{p^0}\right) - \frac{1}{p}(+ pu_0).$$

Cum, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, avem:

$$S = p(S-1) - \frac{S}{p} \cdot$$

De aci deducem cu uşurinţă:

$$S = \frac{p^2}{p^2 - p - 1},$$

care este suma seriei date.

Foarte bune soluţii analoage au fost date de D-nii: BLEIWEISS PAUL, BRÜLL LEON, CIORĂNESCU I. N., GHEORGHIU TH. GHEORGHE, GHERMĂNESCU MIHAIL, KATZ PINCU, POPESCU D. GH., POPOVICIU TIBERIU şi VASILIU C. ION.

Problema fiind veche, s'au ocupat de ea, după cum se vede din şirul numelor rezolvitorilor, unii din actualii colegi dela G. M. pe când erau elevi de liceu şi studenţi.

V. A.

PROBLEMA 3766. *Să se demonstreze identitatea*

$$\sum_0^n \frac{(-1)^i}{m+i} C_n^i = \frac{(m-1)!}{A_{m+n}^m}$$

unde A_m^i *şi* C_n^i *sunt simbolurile aranjamentelor şi combinărilor.*

S.-LT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

Soluţia 1-a.

Integrând ambii membri ai identităţii:

$$x^{m-1} - C_n^1 x^m + C_m^2 x^{m+1} + \ldots + (-1)^n C_m^n x^{m+n-1} \equiv x^{m-1}(1-x)^n$$

între 0 şi 1 se obţine:

$$\sum_0^n \frac{(-1)^i}{m+i} C_n^i = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n \, dx.$$

Ori

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n \, dx = \frac{n}{m} \int_0^1 x^m (1-x)^{n-1} \, dx$$

$$= \frac{n(n-1)}{m(m+1)} \int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-2} \, dx = \ldots$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots 2 \cdot 1}{m(m+1)\ldots(m+n-1)} \int_0^1 x^{m+n-1} \, dx = \frac{n(n-1)\ldots 2 \cdot 1}{m(m+1)\ldots(m+n)}.$$

Ultima valoare a membrului 2 se transformă astfel:

$$\frac{n(n-1)\ldots 2 \cdot 1}{m(m+1)\ldots(m+n)} = \frac{(m-1)(m-2\ldots n(n-1)\ldots 2 \cdot 1}{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+1)\, m(m-1)\ldots n+1}$$

$$= \frac{(m-1)!}{A_{m+n}^n}.$$

Q. E. D.

GH. TH. GHEORGHIU
(Student Matematici).

Soluţia 2-a.

Să descompunem fracţiunea $\frac{n!}{m(m+1)\ldots(m+n)}$ în fracţiuni simple. Avem atunci:

$$\frac{n!}{m(m+1)\ldots(m+n)} = \frac{A_0}{m} + \frac{A_1}{m+1} + \ldots + \frac{A^n}{m+n}$$

şi metoda obişnuită, de a determina constantele $A_0, \ldots A_n$ dă imediat

$$A_0 = C_n^0 \quad A_1 = -C_n^1 \quad A_2 = (-1)^2 C_n^2 \ldots \quad A_i = (-1)_i C_n^i.$$

Q. E. D.

PETRE I. GHIŞOIU
(Şc. Politehnică Buc.).

Soluția 3-a.

Dacă în formula (din AUBERT-PAPELIER: Exercices d'Algèbre t. II pag. 17).

$$f_n(x) = f[x+nh] - C_n^1 f[x+(n-1)h] + \ldots + (-1)^n C_n^n f(x)$$

în care avem

$$f_n(x) = f_{n-1}(x+h) - f_{n-1}(x) \ldots f_i(x) = f_{i-1}(x+h) - f_i(x) \ldots$$

facem $f(x) = \frac{1}{x}$ și apoi $x = m$ și $h = 1$, obținem:

$$\frac{1}{m+n} - \frac{C_n^1}{m+n-1} + \frac{C_n^2}{m+n-2} - \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{m} = (-1)^n \frac{n!}{m(m+1)\ldots(m+n)}.$$

Impărțind cu $(-1)^n$ și ținând seamă că $C_n^i = C_n^{n-i}$, obținem:

$$\frac{C_n^0}{m} - \frac{C_n^1}{m+1} + \frac{C_n^2}{m+2} - \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{m+n} = \frac{n!}{m(m+1)\ldots(m+n)} = \frac{(m-1)!}{A_{m+n}^n}.$$

VALERIU NOVACU (Student fizico-chimice)
MARIUS MARGULIUS (București).

Generalizare.

1°. *Prima generalizare* a acestei identități se poate considera, cea stabilită de D-l Prof. TH. ANGHELUȚĂ în G. M. Vol. XXXV, pag. 310, cu ocazia rezolvirii problemei 3163:

$$\sum_0^n (-1)^i \frac{C_n^i}{a+(n-i)r} = \frac{(-1)^n n! r^n}{a(a+r)\ldots(a+nr)} \qquad (1)$$

din care se deduce; pentru $r = -1$ și $a = m+n$.

2°. *O a 2-a generalizare* se obține prin derivarea relației (1) de p ori

$$\frac{d^p}{dx^p} \sum_0^n \frac{(-1)^i C_n^i}{a+(n-i)r} = \sum_0^n \frac{(-1)^{p+i} C_n^i (n-i)^p}{[a+(n-i)r]^p}.$$

Se are atunci:

$$\sum_0^n (-1)^i \frac{C_n^i (n-i)^p}{[a+(n-i)r]^p} = (-1)^{n+p} \frac{n!}{a} r^{n-p} \frac{P_p}{[(a+r)\ldots(a+nr)]^p}$$

în care P_{n-p} este un polinom de grad $n-p$ în r.

Relaţia de recurenţă a polinoamelor P_p este

$$P_{i+1} = rAP'_i + P_i \times [(n-i)A - (i+1)rA'] \qquad (2)$$

unde $A = (a+r)\ldots(a+nr)$ şi A' este derivata 1^a a lui A, în raport de r.

Valoarea se poate calcula din aproape în aproape:

$P_0=1$ $P_1=nA-rA'$ $P_2=rA[(n-1)A'-rA'']+(nA-rA')[(n-1)A-2rA']$.

CPT. M. I. F.

PROBLEMA 3832. *Care numere din şirul lui* FIBONACCI *se termină cu o anumită cifră?*

I. MURĂROIU.

In nota Nr. 32 din *Gazeta Matematică* Vol. XXXVIII, pag. 247 s'a demonstrat că pentru şirul

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21\ ^1), \ldots$$

termenii u_{15t-1} se termină cu zero. Dacă însă se consideră şirul

(1) $\qquad u_0 = 0\ ;\ u_1 = 1\ ;\ u_2 = 1\ ;\ u_3 = 2\ ;\ldots$

cu recurenţa

(2) $\qquad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

atunci termenii care se vor termina cu zero vor fi termenii u_{15t}. Deci dacă α este un număr de o cifră şi m un întreg, în şirul (1) vom avea

(3) $\quad u_{15t-1} = 10m + \alpha\ ;\ u_{15t} = 10m\ ;\ u_{15t+1} = 10m + \alpha$

ceeace se deduce din recurenţa (2).

Observ că:

1^0. α *nu poate fi pereche* pentru că din (3) ar rezulta că începând dela u_{15t-1}, toţi termenii şirului (1) sunt perechi ceeace nu este adevărat, după cum se poate verifica uşor calculând pe u_{14}, u_{15}, şi u_{16}.

2^0. α *nu poate fi 5* pentru că ar rezulta că începând dela u_{15t-1} toţi termenii să se termine alternativ numai cu 0 şi 5.

Rezultă că α nu poate fi decât 1, 3, 7 sau 9 şi că deci α se va repeta cel mult după $t = 4$, adică cel mult cu începere dela u_{60}. Vom avea deci cel mult cu începere dela u_{60} perioade consecutive de termeni u_n în care ultima cifră se repetă. In raport cu indicele termenului de la care încep aceste perioade se stabilesc imediat termenii care încep cu o anumită cifră.

---

1) A se vedea şi articolul *Asupra şirului lui* FIBONACCI de la pag. 168 Vol. XXXVIII.

Se construeşte foarte uşor un tabel al terminaţiunei şirului (1) până la u_{60} şi se deduc terminaţiunile începând de la u_{60}, de unde aceste terminaţiuni se repetă.

Avem astfel:

$$u_{60} = 10m \; ; \; u_{61} = 10m + u_1 \; , \; u_{62} = 10m + u_2 , \ldots$$

Rezultă deci că ultima cifră a termenilor şirului (1) este dată de tabelul următor:

Cu cifra	se termină următorii termeni ai şirului (1):
0	u_{15t}
1	u_{60t+1} , u_{60t+2} , u_{60t+8} , u_{60t+19} , u_{60t+22} , u_{60t+28} , u_{60t+41} , u_{60t+59}
2	u_{60t+3} , u_{60t+17} , u_{60t+36} , u_{60t+54}
3	u_{60t+4} , u_{60t+7} , u_{60t+13} , u_{60t+26} , u_{60t+44} , u_{60t+46} , u_{60t+47} , u_{60t+53}
4	u_{60t+9} , u_{60t+12} , u_{60t+18} , u_{60t+51}
5	u_{60t+5} , u_{60t+10} , u_{60t+20} , u_{60t+25} , u_{60t+35} , u_{60t+40} , u_{60t+50} , u_{60t+55}
6	u_{60t+21} , u_{60t+39} , u_{60t+42} , u_{60t+48}
7	u_{60t+14} , u_{60t+16} , u_{60t+17} , u_{60t+23} , u_{60t+34} , u_{60t+37} , u_{60t+43} , u_{60t+56}
8	u_{60t+6} , u_{60t+24} , u_{60t+27} , u_{60t+33}
9	u_{60t+11} , u_{60t+29} , u_{60t+31} , u_{60t+32} , u_{60t+38} , u_{60t+49} , u_{60t+52} , u_{60t+58}

Notă. 1°. D-l LT. C. D. IONESCU-ŢIU, pe când era elev în şcoala militară de geniu a rezolvat problema dând rezultatele exacte, dar fără *a demonstra* că ultima cifră se repetă pe perioade dela un termen oarecare.

2°. Asupra cifrelor cu care se termină un număr din şirul lui FIBONACCI s'au mai publicat probleme în *Gazeta Matematică*. Astfel sunt: problema 2519 a D-lui S. KAUFMANN rezolvată la pag. 189 Vol. XXIII unde se cer numerele u_n care se termină cu un zero şi problema 2608 a D-lui M. GHERMĂNESCU, rezolvată la pag. 186 Vol. XXXV unde se cer numerele u_n care se termină cu n zeruri.

Pentru problema 2608 să se consulte şi nota D-lui I. B. FLORESCU de la pag. 247 Vol. XXXVIII.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4044. *Să se aşeze un dreptunghiu de mărime dată cu vârfurile pe două cercuri date. Discuţiune.*

O. N. ŢINO.

Soluţiune dată de Domnul MIRCEA MĂNESCU (Elev cl. VI Lic. Mihail Eminescu).

Fie cercurile date O şi O' de raze R şi r ($R \geqq r$) şi dreptunghiul dat ABCD de lungime $\overline{AD} = L$ şi lăţime $\overline{AB} = l$.

In primul rând, observăm că nu putem aşeza un dreptunghiu ABCD cu vârfurile pe două cercuri date, decât aşezând câte două vârfuri pe fiecare cerc. In adevăr, dacă am presupune că aşezăm trei din vârfurile unui dreptunghiu ABCD, de exemplu A, B, C pe unul din cercuri, fie pe O, urmează că diagonala AC în această aşezare este un diametru al cercului O (unghiul ABC fiind un unghiu drept) şi în acest caz al patrulea vârf al dreptunghiului, vârful D, trebue neapărat să fie pe cercul O (unghiul ADC fiind asemenea unghiu drept). Acest lucru este posibil dacă cele două cercuri O şi O' sunt date tangente (în interior sau exterior) şi dacă avem

$$2r \leqslant \frac{L}{l} < 2R, \text{ sau } L;\ l < 2r. \text{ In cazul } 2r \leqq \frac{L}{l} < 2R,$$

dreptunghiul are două aşezări posibile simetrice în raport cu diametrul punctului de contact, aşezând unul din vârfurile dreptunghiului în acest punct de contact. (Bineînţeles în această aşezare a dreptunghiului nu ţinem seamă de notarea vârfurilor dreptunghiului, căci altfel numărul aşezărilor posibile depinde şi de numărul vârfurilor

dreptunghiului). In această aşezare a cercurilor şi a dreptunghiului faţă de ele, dreptunghiul este înscris propriu zis în un acelaşi cerc O. Acelaşi lucru în cazul când l; $L < 2r$, însă numărul soluţiunilor este sporit cu acela al dreptunghiurilor ce pot fi aşezate înscrise în cercul O' şi având un vârf în punctul de contact al celor două cercuri. Problema mai are aşezări de acest fel (pseudo-aşezări) şi în cazul când cercurile date sunt secante, subt aceleaşi condiţiuni pentru L şi l.

Prin urmare, pentru a avea o soluţiune propriu zisă a problemii, trebue să considerăm că două vârfuri ale dreptunghiului le-am aşezat pe cercul O, iar celelalte două pe O'. Fie, de exemplu, vârfurile A şi B aşezate pe cercul O, deci vârfurile C şi D pe cercul O'. Perpendiculara dusă din centrul O pe coarda AB, fiind perpendiculară la mijlocul laturei $\overline{AB}$ a dreptunghiului ABCD, este perpendiculară şi de latura opusă $\overline{CD}$ la mijlocul ei, deci trece prin O' centrul cercului O' în care $\overline{CD}$ este coardă. Aşa dar, în aşezarea dreptunghiului cu vârfurile pe cele două cercuri, *două laturi opuse ale dreptunghiului sunt perpendiculare pe dreapta centrelor, celelalte două fiind deci paralele cu dreapta centrelor* OO'.

Se observă însă în acest caz că pentru ca problema să fie posibilă, trebue ca $AB = \overline{CD} = l$ să fie mai mică sau cel mult egală cu diametrul cercului O', adică $l \leqq 2r$. (I). In acelaş timp însemnând cu d distanţa centrelor $\overline{OO'}$, avem, presupunând cercurile exterioare unul altuia şi $l < 2r$, patru drepunghiuri corespunzătoare coardei date $\overline{AB}$, deci L nu poate fi arbitrar pentru ca problema să fie posibilă, ci astfel ca să avem:

$$L - d = \pm \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} \pm \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} \quad (II)$$

sau încă:

$$\left[(L-d)^2 - \left(R^2 + r^2 - \frac{l^2}{2}\right)\right]^2 - 4\left(R^2 - \frac{l^2}{4}\right)\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right) = 0 \quad (II').$$

Aşa dar, dacă $l \leqq 2r$ şi L o rădăcină a ecuaţiei (II') unde $d \geqq R + r$, problema admite o aşezare posibilă pentru dreptunghiul dat (neţinând seamă de notarea vârfurilor) corespunzătoare rădăcinii ecuaţiei (II') cu care este egală L.

In cazul când cercurile O şi O' sunt secante în punctele M şi N, adică $R - r < d < R + r$, avem în general patru cazuri posibile

pentru această aşezare, cu excepţia cazului când $\overline{MN} = l$ în care avem o *singură aşezare propriu zisă,* alte două fiind pseudoaşezări.

Dacă $l > \overline{MN}$, condiţiunile de posibilitate sunt $l < 2R$ şi L o soluţiune a ecuaţiei (II'); dacă $l < \overline{MN}$, condiţiunile pentru L devin:

$$L-d = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} \pm \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}\ ;\ L+d = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} + \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}\ ;$$

$$L - d = -\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} + \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}\ \text{(III)}.$$

In cazul când cercul O' este interior cercului O, adică când $0 < d \leqq R - r$ avem ca şi în primul caz patru aşezări posibile, însă condiţiunile de posibilitate pentru L, devin:

$$L - d = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} \pm \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}\ ;$$

$$L + d = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} \pm \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}\ \text{(IV)}.$$

In cazul când cercurile O şi O' sunt concentrice ($d = 0$), cele patru aşezări corespunzătoare unei coarde $\overline{AB} = l$ dau două dreptunghiuri distincte, iar condiţiunile de posibilitate pentru L se deduc din cele generale făcând pe $d = 0$. Deoarece direcţia OO' este neterminată, sunt o infinitate de aşezări, care se deduc prin rotirea direcţiei OO' în jurul lui O dintr'o poziţiune oarecare construită.

Dacă $l = 2r$, relaţiunile de condiţie pentru L, devin:

$$L - d = \pm \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} \begin{cases} \text{când } R + r \leqq d \\ \text{sau } R - r < d < R + r. \end{cases}$$

şi

$$L - d = +\sqrt{R^2 - r^2},\ L + d = +\sqrt{R^2 - r^2} \text{ când } d \leqq R - r,$$

Dacă $d = 0$, avem un singur dreptunghiu ce se poate pune cu vârfurile pe cele două cercuri pe o direcţie oarecare OO', în două poziţiuni. Şi o infinitate de aşezări pentru toate direcţiile. Dacă ambele lungimi l şi L sunt mai mici ca $2r$, atunci poate fi reexaminată când luăm o coardă $\overline{AD} = L$ în cercul cel mic, şi deducem condiţiunile la care trebue să satisfacă l, permutând, în condiţiunile din cazul precedent, pe l şi L între ele. Vom obţine astfel în cazul cercurilor date O şi O' exterioare, condiţiunile:

$$l;\ L < 2r \text{ şi } \left[(l-d)^2 - \left(R^2 + r^2 - \frac{L^2}{4}\right)\right]^2 - 4\left(R^2 - \frac{L^2}{4}\right)\left(r^2 - \frac{L^2}{4}\right) = 0.$$

Când aceste condiţiuni vor fi îndeplinite vom avea o aşezare a dreptunghiului dat cu vârfurile pe cele două cercuri date. Construirea acestei poziţiuni a dreptunghiului dat este imediată, rezultând din examinarea de mai sus.

Observare. Soluţiunea trimeasă de Domnul MIRCEA MĂNESCU acum câţiva ani este şi singura soluţiune primită la această problemă simplă, la care dacă ar putea fi considerată o dificultate, ea ar fi în sistematizarea discuţiunii.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4417. *Se cere un patrat perfect având o singură cifră pereche (zero exceptat) aşa ca numărul răsturnat să fie tot un patrat perfect.*

V. THÉBAULT.

Soluţiune dată de Domnii: GHEORGHE MIHĂILESCU, G. G. CONSTANTINESCU.

Deoarece patratul căutat nu poate avea decât o singură cifră pară şi aceea diferită de zero, el va fi terminat cu unul din numerele: *25, 21, 29, 41, 49, 61, 69, 81, 89, 16, 36, 56, 76, 96* terminaţiuni de două cifre de patrate perfecte. De altă parte, observând că nici una din terminaţiunile de două cifre ale unui patrat nu este formată de două cifre impare, deci, dacă $N \equiv a_1 a_2 \ldots a_{n-1}\, a_n$ este patratul căutat, una din cifrele a_{n-1}, a_n este pară şi ca urmare cifrele a_1, a_2 trebue să fie ambele impare, iar numărul inversatul lui N, anume $N' \equiv a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1$, câtă vreme $n \geqq 4$, nu poate fi patrat perfect. Aşa dar, în primul rând patratele perfecte N cu mai mult de trei cifre nu pot fi soluţiuni ale problemii; în al doilea rând chiar dacă socotim $N \equiv a_1 a_2 a_3$ de trei cifre, a_3 nu poate fi o cifră pară, căci în acest caz a_2 urmând să fie impară, trebue neapărat ca a_1 să fie o cifră pară pentru ca N' să poată fi patrat perfect. Numărul căutat N este deci unul din patratele de trei cifre terminat cu o cifră impară. Formând numerele de trei cifre satisfăcând condiţiunilor de mai sus, avem şirul:

525; 121; 921; 129; 929; 141; 941; 149; 949;

161; 961; 169; 969; 181; 981; 189; 989

şi înlăturând din acestea numerele care sunt $\mathcal{M}3$ şi nu $\mathcal{M}9$ şi pe

acelea de forma $\mathcal{M}3+2$ care nu pot fi patrate perfecte rămân ca soluţiuni probabile:

121; 949; 961; 169; 181; 981; 189.

Din acest şir sunt pătrate numai: *121; 169; 961* şi cum răsturnatele lor formează acelaşi şir, rezultă că toate trei sunt soluţiuni ale problemii.

S'au primit soluţiuni incomplete dela Domnii: PETRU P. COJOCARU (Lic. Militar Iaşi); MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU (Lic. «Fr. Buzeşti», Craiova); P. DOBRESCU, NĂSTASE MARIN (Lic. mil. N. Filipescu).

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4594. *Fie* B', C' *picioarele înălţimilor vârfurilor* B *şi* C *ale triunghiului* ABC.

Cercul trecând prin A *şi prin simetricele punctelor* B', C' *faţă cu mijloacele laturilor respective, taie latura* BC *în* A', A''. *Condiţia necesară şi suficientă ca* A, A' *să fie reale este:*

$$4a^2 - bc\cos A \geqslant 0.$$

C. IONESCU-BUJOR.

Soluţie dată de D-nii: AURELIAN CĂLINESCU (Roşiori) şi MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila);

Fie B'', C'' simetricele punctelor B', C' în raport cu mijloacele laturilor AC, AB. Avem următoarele egalităţi:

(1) $\overline{BC''} = \overline{AC'} = b\cos A$, $\overline{CB''} = \overline{AB'} = c\cos A$.

Scriind puterile punctelor B, C faţă cu cercul AB''C'', obţinem

(2) $\overline{CA'} \cdot \overline{CA''} = bc\cos A$, $\overline{BA'} \cdot \overline{BA''} = bc\cos A$,

deci

$$\overline{CA'} \cdot \overline{CA''} = \overline{BA'} \cdot \overline{BA''}$$

sau

(3) $$\overline{BA'}(a - \overline{CA''}) = \overline{CA''}(a - \overline{BA'})$$

$$\therefore \frac{\overline{BA'}}{\overline{CA''}} = \frac{a - \overline{BA'}}{a - \overline{CA''}} = 1,$$

deci

$$\overline{CA''} = \overline{BA'}.$$

Inlocuind una din formulele (2) $\overline{BA'} = x$, avem

$$x(a - x) = bc \cos A$$

sau

$$x^2 - ax + bc \cos A = 0.$$

Condiţia ca rădăcinile acestei ecuaţii să fie reale este:

$$a^2 - 4bc \cos A \geqslant 0$$

condiţia care exprimă şi realitatea punctelor A', A".

D-l V. ECKSTEIN a soluţionat problema folosind coordonate baricentrice, iar D-l V. I. C. WISSARION a folosit coordonate carteziene.

C. I. B.

PROBLEMA 4612. *Să se arate că o ecuaţiune cu rădăcinile în progresiune aritmetică se poate rezolva, fără a utiliza relaţiunile între coeficienţi şi rădăcini în două feluri: utilizând expresiunea raţiei sau folosind o ecuaţiune care să dea rădăcinile extreme.*

PROBLEMA 4661. *Să se găsească valoarea lui* m *şi apoi să se rezolve ecuaţia:*

$$x^5 - 25x^4 + mx^3 - 950x^2 + 1689x - 945 = 0.$$

ştiind că are rădăcinile în progresiune aritmetică.

LOCOT. C-DOR GH. NICULESCU.

Soluţia problemei 4612. Să însemnăm cu:

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

o ecuaţie care are rădăcinile în progresiune aritmetică, cu raţia:

$(r)\ldots, (x-2r), (x-r), x, (x+r), (x+2r), \ldots$ $(n = 2k+1)$

$(2r)\ldots, (x-3r), (x-r), (x+r), (x+3r), \ldots$ $(n = 2k)$

Observăm că independent de paritatea lui n, avem [1]):

(1) $$x = -a_{n-1} : na_n$$

şi este suficient a cunoaşte pe r pentru a găsi restul rădăcinilor.

---

1) LT. C-DOR. GH. NICULESCU: „Asupra ecuaţiunilor cu rădăcinile în progresie aritmetică" G. M. Vol. XLI, pag. 378.

Ori valoarea lui r este dată în funcţie de primii coeficienţi,

$$(2)\begin{cases} r^2 = 12\,\dfrac{(n-1)(a_{n-1}/a_n)^2 - 2n(a_{n-2}/a_n)}{n^2(n^2-1)} = 12\,\mathcal{M}\ (n=2k+1) \\ r^2 = 3\mathcal{M}\ (n=2k) \end{cases}$$

încât egalităţile (1) şi (2) constituesc primul mijloc de a rezolva ecuaţia $F(x)=0$. Pentru al doilea fel, folosim ecuaţia:

$$(3)\quad n^2(n+1)x^2 + 2n(n+1)(a_{n-1}/a_n)x + (7n^0 - 3n^2 - 2)(a_{n-1}/a_n)^2 + 6n(n-1)(a_{n-2}/a_n) = 0$$

care ne dă pe x_1 — prima rădăcină — şi pe x_n — ultima rădăcină — a ecuaţiei $F(x)=0$:

$$(3')\quad x_{1,n} = -(a_{n-1} : na_n) \pm \sqrt{3\,\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{n^2}\,[(n-1)(a_{n-1}:a_n)^2 - 2n(a_{n-2}:a_n)}$$

$$x_{1,n} = -(a_{n-1} : na_n) \pm (n-1)\sqrt{3\mathcal{M}} = -[x] \pm (n-1)\sqrt{3\mathcal{M}}$$

în care $[x]$ înseamnă valoarea lui x din (1) adică rădăcina din mijloc pentru o ecuaţie $F(x)=0$ în care $n=2k+1$ şi semisuma rădăcinilor extreme pentru o ecuaţie $F(x)=0$ în care $n=2k$.

In afară de ecuaţia (3) mai putem scrie:

$$(4)\begin{cases} x_n = [x] + r(n-1) : 2 \text{ şi } x_1 = [x] - r(n-1) : 2;\ r = (x_n - x_1) : (n-1) \\ x_n = x + r(n-1) \text{ şi } x_1 = x - r(n-1);\ 2r = (x_n - x_1) : (n-1)\ (n=2k) \end{cases}$$

astfel că egalităţile (3) şi (4) constituesc al doilea fel de a rezolva ecuaţiunea $F(x)=0$ şi cu acestea s'a răspuns la cerinţele problemei 4612.

Dar din cele de mai sus scoatem în evidenţă că:

— *Ecuaţiunile cu rădăcinile în progresiune aritmetică se pot rezolva cunoscându-li-se numai coeficienţii* a_n, a_{n-1} şi a_{n-2}.

Domnul OCTAVIAN S. IANCULESCU (Timişoara) urmând calea arătată în „G. M." Vol. XLI, pag. 378, a calculat:

$$r = f(n,\ a_{n-1} : a_n,\ a_{n-3} : a_n)$$

$$(5)\begin{cases} r^2 = 4\,\dfrac{(n-1)(n-2)(a_{n-1}:a_n)^3 - 6n^2(a_{n-3}:a_n)}{n^2(n^2-1)(n-2)(a_{n-1}:a_n)} = 4\mathfrak{T}\ (n=2k+1) \\ r^2 = \mathfrak{T} \qquad\qquad (n=2k) \end{cases}$$

şi din eliminarea lui r^2 din (2) şi (5) a găsit o relaţie între coeficienţii a_n , a_{n-1} , a_{n-2} şi a_{n-3} şi gradul n:

$$(6)\begin{cases} a_{n-2}:a_n = \dfrac{(n-1)(n-2)(a_{n-1}:a_n)^3 + 3n^2(a_{n-3}:a_n)}{3n(n-2)(a_{n-1}:a_n)} \\ a_{n-2} = \dfrac{(n-1)(n-2)\,a_{n-1}^3 + 3n^2 a_{n-3}}{3n(n-2)a_{n-1}} \qquad (a_n = 1) \end{cases}$$

cu ajutorul căreia a eliminat pe a_{n-2} din (3) obţinând ecuaţia:

$$(7)\quad n(n+1)(n-2)(a_{n-1}:a_n)x^2 + 2(n+1)(n-2)a_{n-1}:a_n)^2x$$
$$+(n-2)(3-n)(a_{n-1}:a_n)^3 + 6n(n-1)(a_{n-3}:a_n) = 0$$

care dă rădăcinile extreme în funcţie de $a_{n-1}:a_n$ şi $a_{n-3}:a_n$ în loc de $a_{n-1}:a_n$ şi $a_{n-2}:a_n$. În cele din urmă a scris ecuaţiunile:

$x^2 - 2[x]x + [x]^2 - p^2r^2 = 0 \qquad p = 1, 2, \ldots, k \qquad (n = 2k+1)$

$x^2 - 2[x]x + [x]^2 - (2p+1)^2r^2 = 0 \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, (k-1) \qquad (n = 2k)$

cari dau rădăcinile simetrice. Din ceeace ne-a trimis D-nul OCTAVIAN S. IANCULESCU, formulele din (5) şi (6) le-am întâlnit pentru prima oară şi este posibil ca ele să fie *noui* dar singură relaţia (6) prezintă importanţă căci permite a se enunţa:

Teoremă. Ecuaţiunile cu rădăcinile în progresiune aritmetică se pot rezolva cunoscându-li-se numai coeficienţii a_n , a_{n-1} şi a_{n-3}.

Observaţiune. 1°. Calea urmată de D-l O. S. I. (T) este prea lungă şi a cerut multe calcule. Relaţia (6) se putea obţine direct sau din $F^{(2k-2)}_{([x])} = 0$ dacă $F(x)=0$ are gradul $n=2k+1$ sau din $F^{(2k-3)}_{([x])} = 0$ dacă $F(x) = 0$ are gradul $n = 2k$, sprijinindu-ne tocmai pe cele stabilite la pag. 378 şi 379 din „G. M." Vol. XLI, unde s'a arătat că $[x]$ sunt rădăcini ale lui $F^{(2n-2)}(x) = 0$ şi $F^{(2n-3)}(x) = 0$. Apoi eliminând pe a_{n-2} între (6) şi (2) obţinem (5), pe o cale mult mai uşoară.

2°. Tot D-l O. S. I. (T) a observat că ecuaţia (3) sau ec. (7) este suficientă pentru a da pe rând toate rădăcinile lui $F(x) = 0$. Intr'adevăr prin împărţirea lui $F(x) = 0$ la produsul $(x - x_1)(x - x_n)$ se obţine o ecuaţiune tot cu rădăcinile în progresie aritmetică, de grad $(n-2)$, ale cărei rădăcini extreme le obţinem tot cu ajutorul ec. (3) sau al ec. (7) şi a. m. d. Operaţia este lungă, mai ales că relaţiile (4) ne dau imediat pe r.

3°. Rezolvând ecuaţia (7) obţinem:

$$(7')\begin{cases} x_{1,x} = (a_{n-1}:na_n) \pm \sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}\left[\dfrac{n-1}{n^2}\left(\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 \dfrac{6}{n-2} \cdot \dfrac{a_{n-3}}{a_{n-1}}\right]} \\ \quad = [x] \pm \sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}\left[(n-1)[x]^2 - \dfrac{6}{n-2} \cdot \dfrac{a_{n-3}}{a_{n-1}}\right]} \end{cases}$$

ajutorul lui (3') şi (7') obţinem:

$$(8)\quad \begin{cases} x_n - x_1 = 2\sqrt{3\dfrac{n-1}{n+1}\left[(n-1)[x]^2 - \dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{a_{n-2}}{a_n}\right]} \\ \qquad\qquad = 2(n-1)\sqrt{3M} \\ x_n - x_1 = 2\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}\left[(n-1)[x]^2 - \dfrac{6}{n-2}\cdot\dfrac{a_{n-3}}{a_{n-1}}\right]}\,. \end{cases}$$

4°. Dacă ecuaţia $F(x) = 0$ are numai rădăcini întregi, atunci $a_n = 1$ şi pentru această valoare obţinem simplificări pentru toate formulele şi ecuaţiile în care figurează a_n. O astfel de simplificare s'a arătat sub (6). Tot în cazul $a_n = 1$ putem în mod concentrat, enunţa:

Ecuaţiunile

$$F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

cu rădăcini (întregi) în progresiune aritmetică se pot rezolva cunoscându-li-se sau numai coeficienţii a_{n-1} şi a_{n-2} sau numai coeficienţii a_{n-1} şi a_{n-3}.

5°. O consecinţă imediată a celor enunţate este:

Orice coeficient al unei ecuaţiuni

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

cu rădăcinile în progresiune aritmetică se poate scrie în funcţie de primii trei: a_n, a_{n-1} şi a_{n-2} sau în funcţie de primii doi şi al patrulea a_n, a_{n-1} şi a_{n-3} sau în funcţie cu primii patru coeficienţi: a_n, a_{n-1}, a_{n-2} şi a_{n-3} ai ecuaţiunii.

6°. Este evident că atunci când nu se dă ecuaţia $F(x) = 0$ trebue să i se dea gradul ei, pe lângă coeficienţii arătaţi ca *necesari* şi cari sunt şi *suficienţi*, în urma celor arătate. Astfel dacă $a_n = 1$ atunci doi coeficienţi: a_{n-1} şi a_{n-2} sau a_{n-1} şi a_{n-3} sunt *necesari* şi *suficienţi* pentru a rezolva ecuaţia $F(x) = 0$.

Soluţia problemei 4661. Fiind o ecuaţie de grad impar, rădăcina din mijloc este dată de (1):

$$[x] = 25 : 5 = 5.$$

Valoarea lui m o găsim făcând $x=5$ în ecuaţia dată. Obţinem

$$m = 230.$$

Valoarea lui m o mai găsim introducând în (6):

$$a_n = 1,\ a_{n-1} = 25\ ;\ a_{n-2} = m\ ;\ a_{n-3} = 950.$$

In fine valoarea lui m o mai putem găsi făcând $x = 5$ în derivata a doua a ecuaţiei date, simplificând din calcule.

Introducând în (2):

$$a_n = 1 \ ; \ a_{n-1} = 25 \ ; \ a_{n-2} = m = 230$$

sau în (5):

$$a_n = 1 \ ; \ a_{n-1} = 25 \ ; \ a_{n-3} = 950$$

obţinem:

$$r^2 = 4 \quad r = \pm 2$$

încât rădăcinile ecuaţiei date sunt:

$$1; \ 3; \ 5; \ 7 \text{ şi } 9.$$

Observaţie: 1°. Teorema enunţată în corpul soluţiei pr. 4612, ca rezultat al relaţiei din (5) stabilită de D-l OCTAVIAN S. IANCULESCU, arată că nu mai era nevoie de valoarea lui *m*, pentru a rezolva ecuaţia.

2°. Unii corespondenţi au calculat raţia cu ajutorul ultimului termen, (— 945), al ecuaţiei date, care este produsul rădăcinilor. In felul acesta au găsit pentru raţie şi valoarea $r = \pm \sqrt{109}/2$ şi au afirmat că ecuaţia dată ar avea şi rădăcinile: $5 ; 5 \pm \sqrt{109}/2 ; 5 \pm \sqrt{109}$, fără a cercceta dacă ele verifică ecuaţia.

3°. A rezolvat complet problema No. 4612 D-l O. S. IANCULESCU (Timişoara). Soluţie bună dela Domnul TILICĂ C. ŞTEFAN (elev cl. VII R. Liceul „Traian", T.-Severin), D-l MATEI D. DUMITRU, (Lic. internat Iaşi) a rezolvat numai partea I-a a problemei.

4°. Au rezolvat problema No. 4661 D-nii: AMĂRĂŞTEANU F. MARCEL (bacalaureat Craiova); IANCULESCU S. OCTAVIAN (Timişoara); MATEI D. DUMITRU, care a găsit $m = 480$!; TILICĂ C. ŞTEFAN (Lic. „Traian" Iaşi) care a găsit $m = 125$! deşi ambii au găsit bine rădăcinile; POPOVICIU GAVRIL (bacalaureat).

Au mai trimis soluţii D-nii: BUZINCU IOAN, COJOCARU P. P., FLORESCU L. V., GAVRILESCU N. CONSTANTIN, GRUMĂZESCU MIRCEA (S-LT.), LEVCO ION, MARCOVICI E., MAVRODIN D., MOISOVICI ŞT., POPOVICIU GRIGORE, SĂNDULACHE C., ŞTEFĂNESCU D. N., VISSARION C. I. V., VIŞA EUGEN.

GH. V. N.

PROBLEMA 4743. *Dacă suprafaţa unui patrulater, de laturi* a, b, c, d, *este dată de formula:*

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4},$$

suma a două unghiuri opuse ale lui este 90°.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluție geometrică. Se cunoaște formula

$$(1) \qquad S = \frac{1}{4}\sqrt{4\delta^2\delta'^2 - (a^2 - b^2 + c^2 d^2)^2}$$

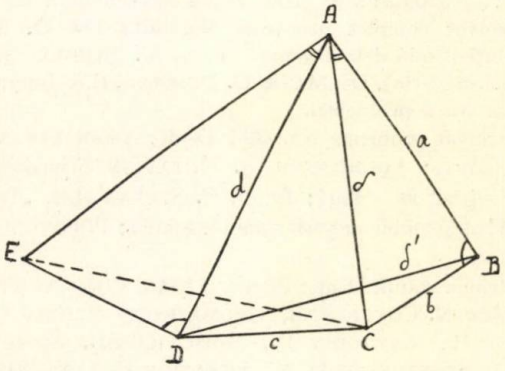
care dă aria unui patrulater oarecare, în funcție de laturile a, b, c, d și diagonalele δ, δ'. (A se vedea de ex. „Formular de matematici" de V. COMAN și N. MALLA).

Pentruca relația (1) să se reducă la cea din enunț trebue să avem:

$$(2) \qquad \delta^2\delta'^2 = a^2c^2 + b^2d^2 .$$

Să construim pe latura AD a patrulaterului ABCD, triunghiul ADE asemenea cu triunghiul ABC, având

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC \quad \text{și} \quad \sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA.$$



Se știe că în figura astfel construită segmentele: CD, DE și CE sunt proporționale respectiv cu produsele: ac, bd și $\delta\delta'$. (A se vedea d. ex. „Traité de géometrié" par E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE, pag. 159 t. I).

Deci relația (2) tradusă geometric ne dă:

$$\overline{EC}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DC}^2$$

care arată că triunghiul CDE este dreptunghic având $\sphericalangle CDE = 90^0$.

Insă: $\sphericalangle CDE = \hat{D} + < ADE = \hat{D} + \hat{B} = 90^0$.

q. e. d.

Soluție dată de D-nii: D. MAVRODIN, S-LT. M. GRUMĂZESCU, MIRCEA A. NEGREA (Brăila), ADOLF DEUTSCH, ȘTEFAN C. TILICĂ (lic. „Traian" T.-Severin) și VICTOR FLORESCU (lic. militar „N. Filipescu").

Calculăm aria patrulaterului socotind-o ca sumă a ariilor triunghiurilor ABC și ACD:

$$(1) \qquad S = \frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin D .$$

Egalând patratul diagonalei AC, calculată din cele două triunghiuri, obținem:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D .$$

Sau:

$$(2) \quad \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = \frac{1}{2} ab\cos B - \frac{1}{2} cd\cos D .$$

Ridicăm relațiile (1) și (2) la patrat și le adunăm. Avem:

$$S^2 + \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{16} = \frac{a^2b^2 + c^2d^2}{4} - \frac{1}{2} abcd\cos(B + D)$$

$$\therefore \quad S = \frac{1}{4}\sqrt{2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4 - 8abcd\cos(B + D)} .$$

Pentru ca formula aceasta, care dă aria unui patrulater oarecare, să se reducă la cea din enunțul problemei trebue ca să avem:

$$\cos(B + D) = 0$$

adică $B + D = 90^0$ sau $B + D = 270^0$, în care caz însă avem evident $A + C = 90^0$, așa încât în orice caz suma a două unghiuri opuse ale patrulaterului este 90^0.

PROBLEMA 4778. *d_a, d_b, d_c fiind distanțele dela centrul cercului circumscris la laturile unui triunghiu, să se stabilească relația:*

$$2S(a^2 + b^2 + c^2 - 6R^2) = a^3d_a + b^3d_b + c^3d_c ,$$

(celelalte notațiuni fiind cele obișnuite).

LT. C. IONESCU-ȚIU.

Soluţie dată de D-nii: S.-LT. GRUMĂZESCU MIRCEA şi MATEI D. DUMITRU (bacalaureat, Iaşi).

Folosim pe rând relaţiile

$$2S = ad_a + bd_b + cd_c\,,\quad d_a = R\cos A,\ldots\ a = b\cos A + c\cos B,\ldots\ abc = 4RS$$

şi avem:

$$2S\,(a^2 + b^2 + c^2 - 6R^2) = \Sigma\, a^3 d_a + \Sigma\, ab\,(bd_a + ad_b) - 12R^2S\,.$$

Relaţia propusă devine

$$\Sigma\, ab\,(bd_a + ad_b) = 12R^2S$$

sau

$$R\,\Sigma\, ab\,(b\cos A + a\cos B) = 3Rabc = 12R^2S\,.$$

Observaţiuni: 1°. D-l VICTOR L. FLORESCU foloseşte relaţiile:

$$d_a = R\cos A,\ \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\,,\quad abc = 4RS \text{ şi } 16S^2 = 2\,\Sigma\, a^2b^2 - \Sigma\, a^4.$$

2°. D-l D. MAVRODIN dă soluţie servindu-se de relaţiile:

$$a = 2R\sin A,\ d_a = R\cos A,\ S = 2R^2\sin A\sin B\sin C\,,$$

$$\Sigma\,\sin 2A = 4\sin A\sin B\sin C\,,\ \Sigma\,\sin 4A = -4\sin 2A\sin 2B\sin 2C\,,$$

şi

$$\Sigma\,\sin^2 A = 2 + 2\cos A\cos B\cos C\,.$$

3°. D-l AL. POPESCU-ZORICĂ înlocueşte totul în funcţie de raza R şi laturile a, b, c.

4°. Alte soluţii au dat D-nii: VIRGIL ECKSTEIN şi TR. PREDOIESCU.

5°. D-l M. F. AMĂRĂŞTEANU foloseşte şi relaţiile:

$$\Sigma\, a^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr\,,\quad \Sigma\, a\,.\,b = p^2 + r^2 + 4Rr\,;$$

iar D-l MIRCEA NEGREA mai foloseşte relaţia:

$$\Sigma\,(b^2 + c^2)\,\sin 2A = 12S\,.$$

6°. D-l SLT. I. PAREPEANU dă soluţie punând relaţia din enunţ sub forma:

$$8pr\,\Sigma a^3 d_a = (a^2 + b^2 + c^2)\,a^4 + b^4 + c^4) - 2\,(a^6 + b^6 + c^6)\,;$$

iar D-l ADOLF DEUTSCH mai întrebuinţează şi teorema lui PTOLOMEU la patrulaterul înscris într'un cerc.

In ultimul timp s'a primit o soluţie bună dela D-l RADU APOSTOL (Lic. militar Târgovişte).

C. I. Ţ.

PROBLEMA 4811. *Prin* H *se duce o dreaptă* Δ *care taie laturile triunghiului* ABC *în* a, b, c. *Perpendicularele duse prin* H *pe* Aa, Bb, Cc *taie laturile triunghiului* ABC *în* α, β, γ. *Să se arate ca* Aα, Bβ, Cγ *sunt paralele.*

THEODOR G. COCEA.

Soluţiune dată de D-nii: RADU APOSTOL, VICTOR FLORESCU, OCTAVIAN GH. RĂDULESCU (Lic. mil. „N. Filipescu").

Fie A', B', C' picioarele înălţimilor AH, BH, CH ale triunghiului ABC. Observăm că în triunghiul $A\alpha\alpha$, punctul H fiind intersecţia înălţimilor AA' şi αH este ortocentrul triunghiului, deci aH fiind a treia înălţime urmează că $A\alpha$ este perpendiculară pe Δ. In acelaşi fel, observând că H este ortocentru şi pentru triunghiurile $Bb\beta$, $Cc\gamma$, rezultă că dreptele $B\beta$, $C\gamma$ sunt drepte perpendiculare pe Δ, de unde rezultă proprietatea enunţată.

Observare. O soluţiune geometrică mai puţin simplă am primit dela Domnul M. AL. VASILESCU-ŞTABU (Lic. „Mihai Viteazul" Alba Iulia); iar o soluţiune prin geometria analitică dela Domnul S.-LT. MIRCEA GRUMĂZESCU.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4843. *Să se construiască un triunghiu cunoscând mijloacele a două din laturi şi piciorul înălţimii pe a treia latură.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: BĂDESCU F. CONST., BĂRBIERU V. VICTOR, BOGDAN GR. IOAN, BOIAN D. EMIL, BOTEZATUL C. FILIP, BOTEZ D. ROMEO, CÂNDEIU Ş. GH., CETĂŢIANU STELIAN, CHIRIŢĂ GH, CIOC I. DUMITRU, CONSTANTINESCU G. G., CONSTANTINESCU VASILE, CORNĂŢEANU AUREL, COTULBEA I. CONST., DOGVAN V. GH., FILIP C. B., FLOREA I. ADRIAN, FLORESCU VICTOR, GAVRILESCU N. CONST., GOIAZDOMORSCHI E. ROMULUS, GOLDBERG IACOB, GRĂTIANU I. RADU, GRIGORE M. ION, GRUMĂZESCU M. LOCOT., HUIANU IULIAN, HUREZEANU E. CONST., ILIESCU GR. ROMULUS, IONESCU B. N. GH., IONESCU D. STELIAN, IONESCU-FULGER M. CORNELIUS, JAREGHIE V. IOAN, JILETCOVICI ALEX., MARCOVICI EUG., MATEI D. DUMITRU, MATEI D. VASILE, MIHĂILESCU-POPA IOAN, MIHALCEA I. OCTAV, MIRONESCU TR. DINU, NEDELCU V. NICOLAE, NEGOIŢĂ M. V. PANAIT LOCOT., PĂDUREŢ VASILE, PANTELIMON P. CONST., PAPARISU I. GABRIEL, PARAIPAN N. CONST., PAŞOI V. MIRCEA, PETRESCU V. ACHILLE, POPA D. MIRCEA, POPESCU-BISCA AL., POPESCU-ZORICA ALEX., POPOVICI L. R., PREDOIESCU TR., PUŞCARU IOAN, ROHR I. ALEX., ROŞCULEŢ N. MARCEL, ŞAICHIN O. ADOLF, SĂRULEŞTEANU I., SECU V. ADRIAN,

STĂNCULESCU I., STREDER I., TĂNĂSESCU V. VENERA, TĂTARU N. NICOLAE, TONI C. MIRCEA, TURCU R. SANDU, VASILESCU-STABU AL. ST., şi VLAD I. C. MIHAI LOCOT.

Fie B' şi C' mijloacele date ale laturilor AC şi AB. Se ştie că dreapta B'C' este paralelă cu BC şi trece pe la mijlocul înălţimii AA_1. De aci rezultă construcţia: unim B' cu C' şi din A_1 dat ducem o perpendiculară pe dânsa, care taie în I. Luăm pe acea perpendiculară $IA = IA_1$, de partea opusă lui A_1 şi obţinem un vârf A al triunghiului căutat. Celelalte se găsesc la intersecţiile dreptelor AB' şi AC' cu perpendiculara pe AA_1 în A.

Problema nu e posibilă dacă A_1 este pe B'C'.

PROBLEMA 4855. *Care este prima grupă de 1000000 de numere consecutive care nu conţine nici un bipatrat?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU (Elev Inginer), N. D. ŞTEFĂNESCU (Liceul militar, „N. Filipescu"), REISCHER L. HERMAN (Liceul Internat, Iaşi), ADOLF O. SAICHIN (Clasa VIII Liceul Matei Basarab, Bucureşti).

Trebuiesc găsite două bipatrate n^4 şi $(n+1)^4$ astfel ca:

$$(n+1)^4 - n^4 > 1000000,$$

$$\therefore \quad 4n^3 + 6n^2 + 4n > 999999,$$

$$\therefore \quad n^3 + 1{,}5n^2 + n > 250000.$$

De aci se vede că n este mai mic ca rădăcina cubică a lui 250000, care este sub 63. Pentru $n = 62$ prima parte a neegalităţii precedente devine $244156 < 250000$. Deci între bipatratele lui 63 şi 64 avem prima dată peste 1000000 de numere. Deci grupa căutată este dela $(63^4 + 1)$ la $(63^4 + 1 + 1000000)$, adică dela *15752962* la *16752962*.

EXERCIŢII

9. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sum_{n=1}^{m} (x + n\alpha)^3 = 0, \text{ unde } m \neq 0.$$

O. S. IANCULESCU.

R. Ecuaţiunea dată se poate scrie:

$$(x+\alpha)^3 + (x+2\alpha)^3 + (x+3\alpha)^3 + \ldots + [x + (m-1)\alpha]^3 + (x+m\alpha)^3 = 0 \quad (1)$$

Desfăcând parantezele şi adunând, avem:

$$mx^3 + 3\alpha S_1 . x^2 + 3\alpha^2 S_2 . x + \alpha^3 S_3 = 0, \quad (2)$$

unde am notat:

$$\begin{cases} S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + m = \dfrac{1}{2} m . (m+1) \\ S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 = \dfrac{1}{6} . m . (m+1)(2m+1) \\ S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + m^3 = \left[\dfrac{1}{2} m . (m+1)\right]^2 . \end{cases} \quad (3)$$

Ţinând seamă de Nota 21 din G. M. Vol. XL pag. 172, anume: *Suma cuburilor a* n *numere consecutive este divizibilă prin suma lor,* relaţiunea (2) devine:

$$(mx + \alpha . S_1)\left(x^2 + \frac{2\alpha}{m} . S_1 . x + \alpha^2 . S_1\right) = 0. \quad (4)$$

Această ecuaţiune este echivalentă cu următoarele două:

$$mx + \alpha . S_1 = 0 . \quad (5)$$

$$x^2 + \frac{2\alpha}{m} . S_1 . x + \alpha^2 . S_1 = 0. \quad (6)$$

Din (5), avem:

$$x_1 = -\frac{\alpha}{m} . S_1 = -\frac{\alpha}{2} . (m+1),$$

iar din (6) avem:

$$x_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2\alpha}{m} . S_1 \pm \sqrt{\frac{4\alpha^2}{m^2} . S_1^2 - 4\alpha^2 S_1}\right) = \frac{\alpha}{2}\left[-(m+1) \pm \sqrt{1-m^2}\right].$$

Pentru $m^2 \leqslant 1$, $x_{2,3}$ este real.

Observaţii. Analog se rezolvă şi următoarele ecuaţiuni:

$$\sum_{n=1}^{m} (\alpha + n . x)^3 = 0 \quad , \quad \sum_{n=1}^{x} (\alpha + n . m)^3 = 0.$$

10. Să se găsească condiţiile ce trebue să le satisfacă coeficienţii ecuaţiei

$$p^2x^4 + 2pqx^3 + q^4x^2 + r = 0$$

ca rădăcinile ei să fie reale; să se rezolve apoi ecuaţia în cazul:

$$p = 2, \quad q = 3, \quad r = -100.$$

T. STOICESCU.

R. Ecuaţia dată poate fi scrisă succesiv:

$$x^2\left(x^2 + \frac{2q}{p}x + \frac{q^4}{p^2}\right) + \frac{r}{p^2} = x^2\left(x + \frac{q^2}{p}\right)^2 + \frac{r}{p^2} = 0$$

adică:

$\left[x\left(x + \frac{q^2}{p}\right)\right]^2 = -\frac{r}{p^2}$ din care reese prima condiţie de realitate: $r < 0$;
rezolvarea ecuaţiei se face astfel:

$$x\left(x + \frac{q^2}{p}\right) = \pm\sqrt{\frac{r}{p^2}} \quad \therefore \quad px^2 + q^2x \mp \sqrt{r} = 0.$$

$$x_{1,2,3,4} = \frac{-q^2 \pm \sqrt{q^4 \pm 4p\sqrt{r}}}{2p}$$

de unde deducem a II-a condiţie: $q^4 \pm 4p\sqrt{r} \geqq 0$. In cazul aplicaţiei:

$4x^4 + 36x^3 + 81x^2 - 100 = 0$ are ca rădăcini -2; $-\frac{5}{2}$; $\frac{-9 \pm \sqrt{181}}{4}$.

11. Pe laturile unui triunghiu oarecare ABC ca diametru se descriu cercuri. Notăm cu T_a lungimea tangentei la cercurile descrise pe laturile AB şi AC, cuprinsă între punctele de contact — în mod analog avem T_b şi T_c.

Să se demonstreze relaţia:

$$T_a^2 \cdot T_b^2 + T_b^2 \cdot T_c^2 + T_c^2 \cdot T_a^2 = S^2.$$

MIRCEA ADAM.

R. Relaţia propusă este o extindere a observaţiei II dela Prob. 4757 (G. M. XLIII. pag. 47).

Se stabileşte uşor:

$$T_a^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{(b-c)^2}{4} = (p-b)(p-c) \text{ etc.}$$

de unde

$$T_a^2 \cdot T_b^2 = S^2\frac{p-c}{p} \text{ etc.}$$

Relaţia propusă mai poate fi pusă şi sub forma:

$$\frac{1}{T_a^2} + \frac{1}{T_b^2} + \frac{1}{T_c^2} = \frac{1}{r^2}.$$

12. Să se stabilească relaţia:

$$\Sigma\left(m_a^2 - \beta c\right)\operatorname{cosec}^2 A = 3R^2,$$

notaţiile fiind cele obicinuite, iar α, β, γ fiind proiecţiile lui a, b, c respectiv pe b, c, a.

DUMITRU D. MATEI.

R. Avem: $\alpha = a\cos C$, $\beta = b\cos A$, $\gamma = c\cos B$.

Din relaţiile: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, etc., scoatem: $b\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ etc.

Deci: $\beta = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$, $\gamma = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$, $\alpha = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$.

Apoi se ştie că $m_a^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$, etc., de unde reese că:

$$m_a^2 - \beta c = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} - \frac{c(b^2+c^2-a^2)}{2c} = \frac{2(b^2+c^2) - a^2 - 2(b^2+c^2-a^2)}{4},$$

sau: $m_a^2 - \beta c = \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{4R^2\sin^2 A}{4} = R^2\sin^2 A$. Atunci: $\left(m_a^2 - \beta c\right)\operatorname{cosec}^2 A = R^2$.

Analog, scoatem: $\left(m_b^2 - ra\right)\operatorname{cosec}^2 B = R^2$, etc. De aici lesne se vede că

$$\Sigma\left(m_a^2 - \beta c\right)\operatorname{cosec}^2 A = 3R^2$$

c. c. t. d.

PROBLEME PROPUSE

4829 *). Intre unghiurile oricărui triunghiu avem:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} - \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)\sin A + \left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} - \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right)\sin B + \left(\operatorname{tg}\frac{C}{2} - \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)\sin C = -2.$$

GH. VASILIU.

*) Problema de faţă înlocueşte problema cu acelaş număr publicată în G. M. pag. 560 Vol. XLII; aceea problemă făcând obiectul exerciţiului 25 din No. 6. Vol. XL. D-nul TR. PREDOESCU-TÂNŢĂRENI atrage atenţia că membrul al doilea al egalităţiii este $pr\,(1 \pm i)$ şi nu $\dfrac{p}{r}(1 \pm i)$ cum greşit s'a publicat. Observaţia e justă.

4879. Un creion nou exagonal, de 8 mm grosime, este ascuțit conic pe 15 mm lungime. Gaura lui cilindrică are 3 mm diametru, iar vârful iese afară din lemn cu 3 mm. Care este volumul lemnului îndepărtat prin ascuțire?

I. IONESCU.

4880. Se scrie de trei ori în șir un număr de două cifre; dacă numărului de șase cifre astfel format i se adaugă 1, se obține un patrat. Care este numărul inițial?

ULPIU FLORESCU.

4881. Să se demonstreze că numerele:

$$5.10^n + p.q_n + 4 \quad \text{și} \quad 4.10^n - p.q_n + 5$$

sunt unul inversatul celuilalt, pentru toate valorile lui p, care fac pozitiv pe ultimul din ele. Numărul q_n înseamnă numărul de n cifre $qq \ldots q$.

G-L GH. BUICLIU.

4882. O societate compusă din șapte membri A, B, C, D, E, F, G trebue să țină ședințe cel puțin de trei ori pe lună și cel mult odată pe săptămână. In darea de seamă dela sfârșitul anului se constată că A a luat parte la $100^0/_0$ din ședințe, B la $91{,}66^0/_0$, C la $83{,}33^0/_0$, D la $75^0/_0$, E la $41{,}66^0/_0$, F la $33{,}33^0/_0$ și G la $25^0/_0$ din numărul ședințelor. Câte ședințe au fost și la câte au luat parte fiecare.

P. SERGESCU.

4883. Fie I centrul cercului înscris triunghiului ABC ; B', C' picioarele bisectoarelor, B_1, C_1 punctele unde paralelele din I la AB, AC taie pe AC, AB; fie încă $\beta\gamma$ o paralelă la BC—β pe AC,... —βI, γI taie pe AB, AC în γ', β'. Dreptele $\beta'\gamma'$, B'C', B_1C_1 și paralela din I la BC, se întâlnesc pe tangenta în A la cercul circumscris.

N. N. MIHĂILEANU.

4884. Se dă triunghiul ABC și un punct P, care împarte bisectoarea vârfului A în raportul

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PL}} = \frac{b+c}{a}$$

(L fiind piciorul bisectoarei). Prin P se duce o dreaptă oarecare Δ şi se înseamnă cu Δ_a, Δ_b, Δ_c lungimile proiectantelor punctelor A, B, C pe Δ. Să se arate că avem relaţia:

$$a \cdot \Delta_a + b \cdot \Delta_b + c \cdot \Delta_c = 0,$$

a, b, c fiind laturile triunghiului.

Ce devine această relaţie când Δ nu trece prin P?

N. N. ALDEA.

4885. In triunghiul ABC, fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor şi O centrul cercului circumscris. Să se arate că există egalităţile:

$$\frac{(\overline{OA_1}^2 - \overline{OA}^2) \cdot \cos A}{\cos(B-C)} = \frac{(\overline{OB_1}^2 - \overline{OB}^2) \cdot \cos B}{\cos(C-A)} = \frac{(\overline{OC_1}^2 - \overline{OC}^2) \cdot \cos C}{\cos(A-B)}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

4886. Se dă:

$$u = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Să se exprime $\sin x$ şi $\cos x$ în funcţiune de u, deducându-se apoi valoarea expresiunii:

$$\frac{1 - \sin x}{\cos x}.$$

COL. GH. I. LITEANU.

4887. Să se găsească relaţia de recurenţă, care să permită calculul din aproape în aproape al sumelor:

$$S_m^k = 1^k (C_m^1)^2 + 2^k \cdot (C_m^2)^2 + 3^k \cdot (C_m^3)^2 + \ldots + m^k \cdot (C_m^m)^2.$$

Să se efectueze acest calcul pentru $k = 1, 2, 3, 4$.

GH. D. SIMIONESCU.

4888. Să se demonstreze că expresia:

$$2x(x-1)\ldots(x-n+1) - 2C_{2n}^1(x-1)\ldots(x-n+1)(x-2n+1)$$
$$+ 2C_{2n}^2(x-2)\ldots(x-n+1)(x-2n+1)(x-2n+2) + \ldots$$
$$+ 2C_{2n}^p(-1)^p(x-p)\ldots(x-n+1)(x-2n+1)\ldots(x-2n+p) +$$
$$\ldots + (-1)^n C_{2n}^n (x-n+1)\ldots(x-2n+n)$$

este independentă de x, apoi să i se calculeze valoarea.

G. CĂLUGĂREANU.

4889. Se consideră funcţiunea y de variabila x definită de ecuaţia:

$$4xy^2 = a(x^2 + y^2). \qquad (1)$$

1°. Să se studieze variaţia lui y şi a derivatei lui y şi să se construiască curbele reprezentative.

Din reprezentarea grafică a derivatei să se deducă numărul de tangente la curba (1), paralele cu o dreaptă dată de coeficient unghiular m, după diferitele valori ale lui m.

2°. Să se demonstreze că rădăcinile derivatelor succesive ale lui y formează o progresie aritmetică.

3°. O dreaptă oarecare $y = mx + n$, taie curba (1) în trei puncte M_1, M_2, M_3. Să se determine n în funcţiune de m astfel ca două din dreptele OM_1, OM_2, OM_3 să fie perpendiculare.

Să se arate că în acest caz dreapta $y = mx + n$ rămâne tangentă la o parabolă când m variază şi să se examineze intersecţia acestei parabole cu curba (1).

D. V. IONESCU.

4890. Să se arate că proprietatea unei curbe, de a avea costant raportul ariilor triunghiurilor formate de trei tangente oarecare şi de punctele de contact ale acestora, caracterizează parabola (în câmpul curbelor analitice).

Să se dea o caracterizare analoagă a curbelor raţionale normale, osculatoare spaţiului dela infinit, aparţinând unui spaţiu linear cu un număr oarecare de dimensiuni [1]).

D. BARBILIAN.

ERATĂ. La pag. 694, Vol. XLII la *Tabla de Materii* se înlocuieşte NR din dreptul problemei 4795 prin 554, pagina la care a fost rezolvită această problemă, şi se şterge 554 din dreptul problemei 4796.

---

1) Reciproca problemei elementare propusă la examenul de bacalaureat din *Sibiu*, Iunie 1937.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Apostol G. Nicolae (4862); *Apostol Radu* (4726, 78, 86, 833, 58, 78); *Bodnărescu M. H.* (4857); *Bogdan Gr. Ioan* (4527, 792, 816, 29, 33); *Boian Emil* (4833, 45, 56); *Botezatu F.* (4833); *Brătan M.* (4857); *Călin Ion C. D-tru* (4458); *Cioc I. D-tru* (4833, 34, 42, 45, 52, 62, 65, 73, 75); *Ciupag St. H.* (4833, 57); *Cojocaru P.* (4786); *Constantinescu G. G.* (N); *Constantin V. P.* (4786, 833, 45); *Cornățeanu I. A.* (4828, 33, 45, 56, 57, 62, 68), *Crăciun I. I.* (4833, 57, 75); *Deciulescu G.* (4786, 862); *Diaconescu D. Ion* (4875); *Diaconescu G. I.* (4862, 76); *Dimitriu C. I. Călin* (4507, 802, 16); *Dorgan Gh.* (4845); *Eckstein Virgil* (4697, 724, 43, E); *Florescu L. Victor* (4786, 800, 08, 36, 56, 62, 63, 65); *Gavrilescu N. C.* (4833); *Goiazdomorschi E. R.* (4833, 45); *Goldberg Iacob* (4856, 65, 67, 68, 74, 75, 76); *Gruia L.* (4857); *Grumăzescu Mircea Subloc.* (4731, 844, 47, 56, 57, 64, 68, 72); *Hâncu I. M.* (4857); *Ionescu B. N. Gh.* (4856, 57, 68); *Ionescu Stelian* (4845); *Jareghie V. I.* (4786, 822); *Lascu B.* (4786); *Lipu I. Emil* (4877); *Mănescu Mircea* (P); *Marcovici Eug.* (4815, 51, 52); *Marian N. M.* (4868); *Marteș Gr. Subloc.* (4378, 595, 788, 800, 02, 14, 16, 61, 63); *Mihalcea N. N.* (4786); *Mironescu Tr. Dinu* (4868, 75); *Modâlcă S. Emil* (4862, 68, 75, 76); *Nedelcu V. N.* (4844); *Negoiță Panait Subloc.* (4868, 77); *Nicolae D. Traian* (4857); *Pădureț A. V.* (4845, 57, 61, 62); *Pantelimon C.* (4822, 24, 57, 67, 75, 76); *Paparizu I. G.* (4857); *Paraipan N. Const.* (4845); *Parepeanu C. I. Subloc.* (4786); *Pascaru I.* (4833); *Petrescu Achille* (4786, 820, 22, 33, 45, 57); *Petrescu B.* (4833); *Popa D. M.* (4786, 820, 22, 24, 45, 56, 61, 62, 63, 68, 75, 76); *Pop D. M.* (4857); *Popescu Ad. Subloc.* (4857); *Popescu-Zorica Alex.* (4520, 24, 642, 778, 86, 92, 810, 29, 30, 34, 61, 62, E, N, P); *Preciado I. Theodor* (4856); *Predoiescu Tr.* (4621, 25, 78); *Rădulescu Oct.* (4786, 815); *Reischer L. Herman* (4856, 57, 61); *Rohr I. Al.* (4857); *Romașcan Georgeta* (4861), *Roșculeț Marcel* (4634, 833, 45, 68, 75, 76, E); *Rosenblatt S. M.* (4856, 57; 62, 74); *Șaichin O. Adolf* (4827, 30, 33, 34, 42, 52, 68, 75, 77); *Secu A.* (4845, 57); *Segal J.* (4792); *Staicu I. N.* (4857, 68); *Stănculescu I.* (4856); *Stănescu St. V.* (4857); *Ștefănescu D. N.* (4856, 57, 58, 60, 65, 68, 76, 77, 78); *Stoenescu D. Mirel* (4844, 57); *Streder I.* (4828, 33, 57, 61, 68, 75); *Tănăsescu Venera* (4844, 56, 57, 61, 62); *Theodorescu N. D.* (4407, 70, 876); *Țițeica I. I.* (4786); *Turcu R. S.* (4786, 822, 24, 45, 57, 61, 62, 68, 76, 75); *Turtoiu F.* (4857); *Vasilescu-Stabu A. M.* (4702, 86, 98, 808); *Vijelie C. Virgiliu* (4868); *Vijelie Gh. Eugen* (4844); *Vlad C. I. Mihai Locot.* (4780, 818, 57, 61); *Thébault V.* (A, N, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

Colecţiunea *„Gazetei Matematice"* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII-ştiinţifică,* Ediţia VI . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* 1926. (Epuizată).

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. **C. D. IONESCU-ŢIU**

C. 90648

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIII

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1937

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

SUMARUL

1. † Gh. Em. Filipescu . . . . . *D. Stan*
2. Din viața și activitatea lui Descartes . . . . . *G. Țițeica*
3. Cărți vechi de matematică . . . . . *I. Ionescu*
4. Considerații invariant-teoretice asupra patrulaterului (urmare și sfârșit) . . . . . *D. Barbilian*
5. Raport pentru premiul Ing. H. Capriel.
6. Note Matematice: 16—21.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 272.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1178, 3524, 4301, 4365, 4438, 4465, 4466, 4491, 4503, 4709, 4828, 4862.
11. Exerciții: 13—16.
12. Probleme propuse: 4891—4902.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1937

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „**Gazeta Matematică**", având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **D. Stan**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1937 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4859, 71, 79, 83, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 900, 01, 02.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

† GH. EM. FILIPESCU *)

Intristată Adunare,

Pe lângă nenumăratele mărturii de adâncă prețuire îndurerată ce se aduc astăzi aci, pentru omul eminent, pentru inginerul desăvârșit, pentru omul de știință și pentru profesorul incomparabil, — membrii îndoliați ai Societății *Gazeta Matematică* m'au însărcinat să exprim și imensele lor regrete pentru dispariția atât de timpurie a marelui lor coleg GH. FILIPESCU.

Este sfâșietor să spui „cel ce-a fost", în fața blândului chip neînsuflețit ce avem înainte, când din ochii și inima noastră nu putem încă smulge imaginea prodigioasei activități, a necontenitelor realizări în atâtea domenii diferite și-a uluitoarei energii, — neîntrecute de cât de bunătatea și modestia lui, —, cu care ne deprinsese, până în ultima lui clipă, cel ce ne părăsește atât de brusc.

Pentru *Gazeta Matematică*, de aproape 30 ani încoace, FILIPESCU a fost sprijin prețios și entuziast; în tot acest timp el nu i-a precupețit nici-o clipă, o părticică din munca lui neobosită și din inima lui atât de generoasă. De altfel, dacă această săracă Societate cu activitate pur științifică, a reușit să-și aibă casa ei proprie, în bună parte o datorește lui GHEORGHE FILIPESCU.

Ce gol de neîmplinit a lăsat el la Școala Politecnică, la Academia Română, la Societatea Politecnică, la Societatea de Științe, la A. G. I. R., la Societatea Comunală de Tramwaie și în atâtea alte instituții importante unde a ocupat un loc de frunte, o știm cu toții și o vom simți mereu cu toții.

Pentru golul ce lasă la *Gazeta Matematică*, un colțișor din sufletul membrilor acestei Societăți, va sângera întotdeauna.

Cu pietate și cu inimile adânc îndoliate, ne adunăm în jurul familiei sdrobite, rugând Cerul să-i hărăzească tăria de-a suporta negrăita ei durere și fie ca lacrimile celor atât de mulți cari, ca noi, l'au admirat și iubit să le aducă puțină mângâiere.

Iar bunului și neobositului meu profesor, să-i fie țărâna ușoară!

---

*) Cuvântare ținută la înmormântarea lui GH. EM. FILIPESCU de D-l Ing. D. STAN.

DIN VIAȚA ȘI ACTIVITATEA LUI DESCARTES

In anul 1637 a apărut la Leyda vestita lucrare a lui DESCARTES: *Discours de la méthode.* Titlul complet al cărții era: *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. Plus, la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des essais de cette méthode.*

Se poate spune, prin urmare, că se împlinesc 300 de ani de când a fost creată de către DESCARTES Geometria analitică sau carteziană.

Cu această împrejurare s'a ținut la Paris un congres special închinat cugetării lui DESCARTES și în toată lumea s'a comemorat cele trei veacuri care au trecut dela apariția „Discursului despre metodă".

* * *

DESCARTES
1596–1650

DESCARTES s'a născut la 31 Martie 1596, pe vremea lui Mihai Viteazu, în comuna La Haye, căreia îi zice astăzi La Haye-DESCARTES, în Touraine. Casa în care s'a născut, biserica în care a fost botezat și actul de botez se păstrează cu sfințenie, ca amintiri scumpe.

La vârsta de opt ani RENÉ DESCARTES a fost trimis intern la Colegiul Iezuiților din comuna vecină La Flèche, una din cele mai bune școli de pe vremea aceea. In această școală a primit DESCARTES și o învățătură temeinică și o educație aleasă.

După opt ani de pregătire serioasă el părăsește școala, stă câtva timp acasă, se duce apoi la Paris, unde leagă prietenie cu fostul său coleg de școală, Părintele MERSENNE, cu care a avut toată viața corespondență.

O boală de piept din copilărie, moştenită dela mamă-sa, îl sileşte să fie cu băgare de seamă şi să nu facă sforţări prea mari. Totuşi, în urma stăruinţelor tatălui său, care-i cere să-şi facă o carieră, DESCARTES, care avea dela părinţi şi ceva avere şi un mic titlu de nobleţă, se înscrie ca voluntar în armata principelui de Nassau din Olanda, care lupta în contra armatelor spaniole.

Ajuns acolo, luptele încetaseră, încât DESCARTES n'a luat parte la lupte şi i-a rămas timpul liber. Imprejurarea a făcut să intre în legături de prietinie cu un tânăr medic olandes ISAAC BEECKMAN, om cu o cultură întinsă. Acesta a avut cea mai mare înrâurire asupra lui DESCARTES, scoţându-i la iveală şi cunoştinţele temeinice căpătate în şcoală şi pătrunderea neobişnuită pentru un tânăr de vârsta lui.

Constatarea făcută de folosul călătoriei în Olanda îl îndeamnă să pornească mai departe, în Germania, în Boemia, în Italia, având astfel împrejurarea să vadă multe obiceiuri, să vorbească cu multă lume, să mediteze în privinţa multor lucruri, preocupându-se mai ales să găsească o metodă generală şi sigură de a desprinde şi recunoaşte adevărul. Revenind mai târziu la Paris, prietenii şi cunoscuţii şi-au dat seama de valoarea deosebită a cugetării lui DESCARTES şi l-au îndemnat să le publice.

In acest scop el pleacă din nou în Olanda, unde se simţise altă dată aşa de bine şi pregăteşte un studiu despre univers. Condamnarea lui GALILEU la Roma îl împiedică de a da la lumină o lucrare, care ar fi fost şi ea condamnată. De aceea se hotărăşte să publice ideile lui despre metodele de cercetare a adevărului, care a şi apărut în anul 1637, sub titlul pe care l-am dat mai sus.

De aci încolo, preocupări ştiinţifice, filosofice, o corespondenţă întinsă îi ocupă toată viaţa.

După multe stăruinţi ale reginei CHRISTINA a Suediei, DESCARTES se duce la Stocholm, unde viaţa nepotrivită cu temperamentul său, pe care e silit s'o ducă, îl duce la boală şi apoi în mormânt, la vârsta de 54 de ani.

Iată pe scurt, lăsând la o parte o mulţime de amănunte interesante, viaţa acestui mare gânditor francez.

* * *

Ce e acea metodă vestită, metoda carteziană, care a străbătut trei veacuri şi e admirată şi astăzi?

Insemnătatea metodei carteziane stă în faptul că ea a fost sâmburele metodei stiinţifice, care a dat, mai ales în veacul al XIX-lea, rezultate strălucite.

Ea pornea dela bunul simţ. Iată, de altfel, cum începe Discursul despre metodă:

„Bunul simţ e lucrul cel mai răspândit, căci fiecare se crede aşa de bine împărtăşit, încât chiar aceia care în alte lucruri sunt greu de mulţumit, nu doresc mai mult decât au".

Iar mai departe el adaugă:

„Căci nu e de ajuns să avem mintea bună, ci lucrul de căpetenie e s'o întrebuinţăm bine".

De aceia e nevoie de metodă, pe care el o dă în cele patru reguli cunoscute.

„Prima regulă era de a nu socoti nimic ca adevărat înainte de a recunoaşte până la evidenţă că e aşa, adică de a mă feri cu toată grija de pripire şi de prejudecată şi de a nu cuprinde, în judecata mea nimic altceva decât ce mi se va înfăţişa aşa de limpede şi de neted în minte încât să n'am niciodată împrejurarea de a-l pune la îndoială.

A doua era de a împărţi fiecare din greutăţile ce avem de eercetat în atâtea părţi cât era mai potrivit spre a putea fi deslegate.

A treia, de a urma o ordine, începând cu lucrurile cele mai simple şi cele mai uşor de cunoscut, pentru a mă ridica treptat până la cunoaşterea celor mai compuse, punând ordine chiar în acele lucruri care nu vin în chip natural unele după altele.

In fine, a patra, de a face totdeauna numărătoare deplină şi privire aşa de generală asupra împrejurărilor încât să fiu sigur de a nu fi lăsat nimic la o parte".

* * *

DESCARTES a fost creatorul filosofiei moderne, dar tot el a pus temelia solidă pentru Matematica modernă.

Pentru DESCARTES ştiinţa matematică se reduce la Algebră, petrucă Algebra dă o metodă generală, o metodă abstractă de calcul. El întroduce sistematic calculul cu litere şi găseşte teorema privitoare la numărul rădăcinilor pozitive şi al rădăcinilor negative, după semnele coeficienţilor unei ecuaţii date.

Iar Geometria analitică este tot o metodă algebrică de a rezolva problemele de geometrie.

Se mai cunosc dela el *ovalele* şi *folium* care-i poartă numele.

DESCARTES s'a ocupat şi de fizică şi de medicină şi scopul pe care-l urmărea era să găsească o sinteză a cunoştinţelor omeneşti întemeiată pe o aceeaşi metodă.

Fără îndoială DESCARTES, prin cunoştinţele, prin preocupările, prin lucrările şi cercetările sale şi mai ales prin metodele întrebuinţate, a fost unul din cele mai mari genii universale ale omenirii.

G. ŢIŢEICA.

CĂRŢI VECHI DE MATEMATICĂ

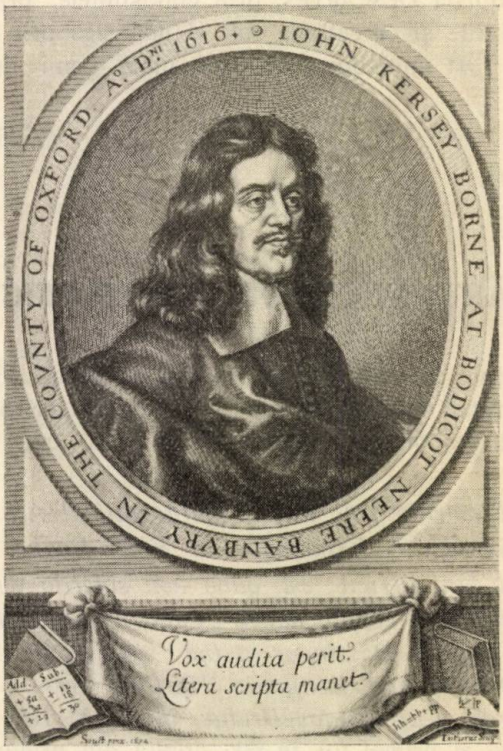
D-l Inginer M. PORTOCALĂ a donat Societăţii „*Gazeta Matematică*“ un tratat de *Algebră* tipărit la Londra în 1673, în 4 părţi grupate în 2 volume, cu pagini de 31 × 20 cm. Cartea este intitulată:

„*The* | *Elements* | *of that* | *Mathematical Art* | *commonly called* | ALGEBRA, | *Expounded in Four Books.* | By JOHN KERSEY. | *Nil tam difficile est, quod non solertia vincat.* | *Dimidium facti, qui benè coepit, hanet.* | *London* | *Printed by William Godbid, for Thomas Passinger at the* | *sign of the Three Bibles of London-Bridge, and Benjamin Hurlock over-* | *against St. Magnus Church, near London-Bridge. MDCLXXIII* | “.

Pe verso al primei foi, în faţa titlului din primul volum, este un portret al autorului pe care-l reproducem aici, spre a se vedea ce importanţă îşi dădeau pe atunci autorii la prezentarea unor asemenea portrete odată cu opera lor. Pe pag. 5 sunt numeroase dedicaţii pe care le reproduc aci:

„*To* ALEXANDER DENTON, *of Hillesdom in the County of Bucks, Esquire, and Mr.* EDMUND DENTON, *his Brother; The hopeful Blossoms and only Osspring of the Truly Just and Vertuous* EDMUND DENTON *Knt. A faithful Patriot, and eminent Sufferer in our late Intestine Wars, for his Loyalty to his late*

Majesty King CHARLES *First, of Ever-Blessed Memory:* JOHN KERSEY, *in testimony of his Gratitude, for signal Favours conferred om him by that truly Noble Family; Which also gave both Birth and Nourishment to his mathematical Studies,* HUMBLY DEDICATES *his Labours in this Treatise of the Elements of the Algebraical Art*".



In Prefață autorul arată că Aritmetica și Geometria sunt dintre artele și științele umane cele ce au căpătat cea mai mare evidență și siguranță, că adevărurile lor se deduc numai cu mintea și că ele conduc la găsirea adevărului. Arată că sunt și utile în practică, că chiar studiul filosofiei cere cunoștința lor. Arată cum s'a ajuns la algebră și cine sunt întemeietorii ei. Prefața e datată 15 Aprilie 1673.

Cartea I începe cu natura, scopul și felurile de algebră. Scopul ei este căutarea de teoreme, de canoane (reguli) și de

demonstraţiuni. Algebra este *numerică* şi *literală;* vorbeşte de puteri şi rădăcini; nu utilizează exponenţi. După cum se vede în josul portretului, teorema lui PITAGORA este indicată prin $hh=bb+pp$. Cunoaşte însă exponenţii, căci de exemplu la pag. 5 spune că $5bbb$ se mai scrie $5b^3$.

Ca notaţiuni găsim semnul + al *afirmaţiei,* semnul — al *negaţiei;* când însă e vorba de o diferenţă la care nu i se ştie *a priori* sensul, pune în loc de — semnul ~. Ca semn pentru înmulţire e semnul actual ×. Utilizează parantezele, dar uneori le înlocuieşte cu o linie dreaptă pe deasupra cantităţilor ce ar trebui să intre în paranteze. Pentru rădăcini patrate se pune semnul $\sqrt{\ }$ dar şi $\sqrt{}(2):b+c$ în loc de $\sqrt{(b+c)}$. Pentru rădăcini cubice scrie $\sqrt{}(3):$, pentru cele bipatrate $\sqrt{}(4):$, etc. Pentru proporţii se scrie de exemplu $2.4 :: 6.12$. Progresiile le notează cu semnul : : pus însă la sfârşitul lor. In locul semnelor de azi > şi < găsim semnele $\overline{\llcorner}$ şi $\overline{\lrcorner}$. La fracţii se întrebuinţează linia orizontală, ca şi azi.

Operaţiunile algebrice sunt mai sumar tratate, pe exemple. Urmează apoi fracţiile algebrice, proporţiile, extragerea de rădăcini, ecuaţiile şi reducerea lor, probleme de ecuaţii de gradul I. Ecuaţiile de gradul II au o desvoltare mare, după care vin progresiile aritmetice.

Cartea II se ocupă cu puterile şi extragerea rădăcinilor patrate şi cubice ale numerelor şi a polinoamelor, după care vin progresiile geometrice. Un capitol tratează găsirea divizorilor numerelor şi polinoamelor, altul despre teoria radicalelor, altul despre găsirea rădăcinilor ecuaţiilor dând metodele lui STEVIN, VIETA, RENATES DES CARTES, şi în fine se ocupă cu ecuaţiile de gradul III. Ultimele două capitole se refer la sisteme de ecuaţii şi la chestiunile care sunt capabile de nenumărate răspunsuri. (Analiza nedeterminată).

Primele două cărţi au 323 pagini.

Volumul II este tipărit în 1674. Titlul este acelaşi cu schimbarea citatului latin în: *„Si quid novisti rectius istis, Candidus imperti; si non, his utere mecum“.*

Cartea III conţine probleme, alese din opera lui DIOPHANTE, cu adaose după BACHET şi FERMAT, din Comentariile asupra lui DIOPHANTE tipărite la Tuluza în 1670.

Cartea IV arată uzul artei algebraice la deslegarea şi compunerea problemelor geometrice plane ce se pot trata cu rigla şi cu compasul. Se enunţă 29 axiome. Printe ele găsim unele ca acestea: „*Ceeace este dublul uneia din două cantităţi egale este dublul şi al celeilalte*“, sau ca „*toate unghiurile drepte sunt egale între ele*“ care azi se demonstrează ca consecinţă a altor axiome. Urmează o teorie a rapoartelor şi un studiu al geometriei plane după care o serie de probleme care sunt tratate cu ajutorul algebrei, ca înscriere de triunghiuri şi dreptunghiuri în patrat, înălţimea turnului cu picior inaccesibil, construirea triunghiului dreptunghic cunoscând ipotenusa şi suma catetelor, probleme ce conduc la ecuaţii de gradul II, desfacerea unui triunghiu în două părţi de raport dat prin o dreaptă dusă prin un punct dat în interiorul lui, a cărei tratare şi discuţie ţin 7 pagini.

Cartea III şi IV conţin 416 pagini; ea se încheie cu cuvintele: «SOLI DEO GLORIA».

I. IONESCU.

CONSIDERAŢII INVARIANT-TEORETICE ASUPRA PATRULATERULUI

(Urmare dela pag. 120).

§ 3. Metricile intrinsece ale patrulaterului.

Legătura cu geometria lui BOLYAI-LOBACEFFSKY *şi cu geometria diferenţială proiectivă de pe suprafaţa lui* KLEIN.

17⁰. Materia primelor paragrafe e destul de elementară. Cu acest al treilea paragraf atingem un tărâm matematic mai ridicat.

Publicul de tineri corespondenţi ai *Gazetei Matematice* e rugat să lase la o parte rezultatele şi demonstraţiile din această parte a articolului nostru (care numai în continuarea primelor paragrafe, introductive, îşi are rostul) mulţumindu-se cu învăţătura ce se desface din această alăturare: anume că, matematicele elementare nu sunt un canton izolat al vreunei Elveţii matematice. Pentru spiritul neobosit există o trecătoare dincolo de orizontul natal.

Cercetarea din acest paragraf are ca punct de plecare suprafaţa de ordinul al treilea cu patru noduri reale, cercetată mai ales de FELIX KLEIN [1]), cu al cărui nume o arăt aici. Această suprafaţă nu poartă, într'adevăr, un nume special, deoarece a fost studiată mai mult sub formă dual ă: ca *suprafaţă a lui* STEINER [2]), de ordinul 4.

18⁰. Să considerăm un tetraedru H format din planele H^i ($i = 0, \ldots 3$). — Spaţiul proiectiv e o varietate topologică închisă, care diferă mult de planul proiectiv. Mai întâiu are trei dimensiuni, apoi e orientabilă, deci prin această proprietate mai aproape de dreapta proiectivă decât de planul proiectiv. De aceea trebue să ne aşteptăm ca împărţirea în domenii a spaţiului proiectiv tăiat de patru plane să difere de împărţirea în domenii, cercetată în primul paragraf, a planului proiectiv tăiat de patru drepte. —

Se recunoaşte uşor că spaţiul proiectiv e împărţit de planele (H) în opt domenii, toate tetraedrale, egal îndreptăţite din punct de vedere proiectiv. E cu putinţă totuşi o repartiţie a celor opt tetraedre în două clase, fiecare formată numai din patru tetraedre aderând două, câte două dealungul câte unei perechi de muchii.

Dacă luăm pe H ca reper al unui sistem de coordonate proiective x_i ($i = 0, \ldots 3$), fiecare domeniu e caracterizat prin numele coordonatelor de acelaşi semn. Împărţirea în clase a domeniilor e dată de neegalităţile

$$x_0 x_1 x_2 x_3 < 0 \quad , \quad x_0 x_1 x_2 x_3 > 0.$$

Prin schimbarea punctului-unitate, clasele pot fi permutate între ele. Aşa încât invariantă e numai proprietatea a două domenii de a aparţine aceleeaş clase.

19⁰. Suprafaţa lui KLEIN poate fi definită ca transformata unui plan, neincident vârfurilor tetraedrului de referinţă, — aşa dar de ecuaţie reductibilă la forma

$$X_0 + X_1 + X_2 + X_3 = 0, \tag{24}$$

---

1) FELIX KLEIN. Gessammelte Math. Abhandlungen, Bd. II, S. 14. A se vedea, de asemenea, articolul meu »Exkurs über die Dreiecke", Bul. Math. de Soc. rom. des Sc. Bd. 38 (2), 1937.

2) G. DARBOUX. Soc. Phil. B. 10 (1873); C. R. 1877.

WEIERSTRASS. J. f. Math. 64 (1865).

SOPHUS LIE de asemenea şi-a legat numele de această suprafaţă, printr'o anume teoremă.

prin mijlocirea uneia din inversiunile tetraedrale ale acestuia. Trecerea dela o inversiune, la alta, are de efect o colineație a suprafeței, fără însemnătate într'un studiu proiectiv. De aceea vom presupune ecuațiile inversiunei tetraedrale reduse la

$$X_i = \frac{1}{x_i} , \qquad i = 0, 1, 2, 3. \tag{25}$$

Ecuația suprafeței lui KLEIN se scrie atunci

$$\sum_{0}^{3} x_1 x_2 x_3 = 0. \tag{26}$$

E clar că prin mijlocirea inversiunei (25) *suprafața lui* KLEIN, *din care excludem muchiile tetraedrului, admite ca hartă* (adică: reprezentare bicontinuă și biunivocă) *planul* (24) *din care excludem laturile patrulaterului*

$$X_0 = 0 , X_1 = 0 , X_2 = 0 , X_3 = 0. \tag{27}$$

Această observație e fundamentală pentru ceeace urmează.

Să facem o aplicație la determinarea înfățișerii topologice a suprafeței lui KLEIN, prin acest nou mijloc al hărții plane, care simplifică și întărește riguarea cercetării întreprinsă prima oară de KLEIN (loc. cit.).

Pânzele suprafeței se găsesc numai în 7 din cele 8 domenii tetraedrale, așa încât avem trei pânze de o anume clasă și patru, de cealaltă clasă. Primele corespund pe hartă domeniilor cuadrangulare; ultimele, domeniilor triunghiulare ale patrulaterului complect.

Intr'adevăr, se citește pe (24) că mărimile (X) nu pot avea toate același semn. Prin urmare suprafața (26) trimite pânze numai în trei din domeniile de a doua clasă, ale tetraedrului, anume în acelea în care două coordonate sunt de un semn și două de altul. Raportând planul (24) la triunghiul diagonal al patrulaterului (27), se recunoaște că expresia Ω relativă la acest patrulater și la punctul X (alineatul 1°) e tocmai

$$- X_0 X_1 X_2 X_3 .$$

Deci pânzele de a doua clasă ale suprafeței sunt transformatele domeniilor quadrangulare ($\sigma = -1$), fiindcă în virtutea lui (25) produsele $x_0 x_1 x_2 x_3$ și $X_0 X_1 X_2 X_3$ au același semn. E clar că pânzele din domeniile tetraedrale de prima clasă rămân să corespundă câte unuia din domeniile triunghiulare ale patrulaterului.

Se vede uşor că fiecare din cele 7 pânze sunt suprafeţe continue, simplu conexe, deschise. Cercetând modul lor de comportare pentru poziţiile lui X din vecinătatea laturilor şi vârfurilor patrulaterului, conchidem că aceste pânze se învecinează în spaţiul proiectiv, două, câte două dealungul câte unei muchii a tetraedrului. Adăogând şi aceste muchii întregei figuri, pânzele de aceeaşi clasă se complectează până la forma unei varietăţi cu două dimensiuni, unilatere, închise.

Aşa dar suprafaţa lui KLEIN *constă din două varietăţi topologice închise: de „prima" şi a „doua clasă", aderând numai în vârfurile tetraedrului.*

20°. Să ne ocupăm de liniile asimptotice ale suprafeţei lui KLEIN (mai scurt: suprafaţa K).

Considerăm unul din planele ei tangente

$$(28) \qquad (ux) = 0.$$

El taie suprafaţa K după o cubică nodală Ψ, cu nodul în contactul $\bar{x}$ al planului tangent. Transformarea (25) ne arată că harta acestei cubice pe planul (24), e tot o cubică Φ, dată de ecuaţiile

$$(28') \qquad \sum_0^3 u_0 X_1 X_2 X_3 = 0 \quad , \quad \sum_0^3 X_0 = 0.$$

Cum transformarea bicontinuă şi biunivocă (25), în jurul lui $\bar{x}$, păstrează contactele, e clar că suprafaţa cubică şi planul (28') vor fi deasemeni tangente în transformatul $\bar{X}$ al lui $\bar{x}$. Deci transformata Φ a lui Ψ e o cubică circumscrisă patrulaterului complect (27), cu un nod în $\bar{X}$: coincide aşa dar cu cubica Φ asociată punctului $\bar{X}$, prin cele convenite la alineatul 14°. Razele ei nodale sunt, evident, harta direcţiilor asimptotice ale suprafeţei K, în punctul $\bar{x}$.

Aşa dar urmează (alineatul 14°) că direcţiile liniilor asimptotice ale suprafeţei K au ca reprezentare pe harta din planul patrulaterului, tangentele la conicele P, Q înscrise în patrulaterul G şi care trec prin $\bar{X}$. Dar curbele integrale ale acestor direcţii din planul hărţii sunt evident aceste ∞^1 conice înscrise în G, de felul lui P şi Q. Incât avem harta liniilor asimptotice ale suprafeţei K, sub forma simplă a acestui fascicol tangenţial de conice.

Cum transformarea (25), care face reprezentarea lui K pe planul patrulaterului, e algebrică, conchidem că *liniile asimptotice*

ale lui K *sunt algebrice* [1]). *Ceva mai mult, ele rezultă curbe de ordinul 6, cu câte un punct de înapoiere în fiecare din vârfurile tetraedrului.*

Din reprezentarea plană a acestor linii asimptotice şi din condiţia dată în alineatul 16⁰, pentru realitatea conicelor P, Q, conchidem la această remarcabilă proprietate a suprafeţei K:

Punctele părţii conexe de prima clasă a suprafeţei K (vezi alineatul precedent) *sunt eliptice; punctele părţii conexe de a doua clasă sunt iperbolice. Excepţie fac numai punctele de pe muchiile tetraedrului, care sunt parabolice.*

Regăsim astfel, pe o cale mai sistematică, propoziţia dată pentru prima oară de F. KLEIN, prin consideraţii de *geometrie intuitivă.*

De aci înainte e natural să înlocuim denumirea: «partea de prima» şi «de a doua clasă», prin *partea eliptică* şi *partea iperbolică* a suprafeţei K.

21⁰. Să adâncim mai mult legătura între secţiunea prin plan tangent Ψ a suprafeţei K şi imagina ei Φ din planul patrulaterului.

Fie u, v un sistem de coordonate curbilinii în planul reprezentării. Luându-le drept coordonate curbilinii şi pe suprafaţa K, e clar că secţiunea prin plan tangent Ψ are *aceeaş ecuaţie* în u, v ca imagina ei Φ.

Dar primul membru al lui Ψ, mărginit la infiniţii mici de ordinul 2 şi 3, după desvoltarea în jurul punctului de contact:

$$\Psi = 3\mathfrak{F}_2 + \Psi_3,$$

(unde $\mathfrak{F}_2$ şi Ψ_3 sunt două forme binare: pătratică şi cubică, în du, dv), conduce la formele fundamentale ale lui FUBINI, în raport cu care, cum se ştie, se desvoltă întreaga geometrie proiectivă diferenţială, a suprafeţei.

---

1) Acest rezultat e virtualmente cuprins în proprietatea găsită de DARBOUX (Soc. Phil. B. 10. (1873) pag. 37) a algebrismului liniilor asimptotice pe suprafaţa lui STEINER Σ. Am spus că suprafeţele Σ şi K sunt polar reciproce şi se ştie că liniile asimptotice se păstrează prin dualitate.

De altfel, raţionamentul nostru de mai sus seamănă cu al lui DARBOUX, care foloseşte harta plană a lui Σ, dată de WEIERSTRASS. E însă mai simplu.

E clar, din cele arătate, că formele $\mathfrak{F}_2$ şi Ψ_3 sunt identice cu formele F_2 şi Φ_3 rezultate din desvoltarea ecuaţiei lui Φ în jurul nodului $\bar{X}$. Deci *cubicele* Φ *pot fi luate ca bază a întregei geometrii diferenţiale pe suprafaţa* K, *în locul cubicelor din spaţiu* Ψ.

Să arătăm care e procedeul lui FUBINI pentru a defini măsura proiectivă, pe o suprafaţă. Punând

$$\Phi = 3F_2 + \Phi_3$$

se înlocueşte mai întâiu Φ_3 cu *apolara* F_3 a lui F_2 din familia lineară:

$$F_3 = \Phi_3 - \frac{3}{2} d\, F_2 + (h\,du + k\,dv)\, F_2 .$$

Noua formă F_3 e bine determinată. Deci perechia de forme F_2, F_3 e ea însăşi determinată, în afara unui *factor comun arbitrar*. Pentru a exclude acest arbitrar, FUBINI normează cele două forme F_2, F_3 aşa încât invariantul simultan următor să ia valoarea numerică -1:

$$J = \frac{\begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{221} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}{(a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22})^2} = -1,$$

unde a_{ijk} şi a_{ij} sunt coeficienţii lui F_3 şi F_2.

Formele astfel normate, care se notează cu φ_2 şi φ_3, sunt invarianţi absoluţi faţă de toate transformările proiective ale suprafeţei şi faţă de toate schimbările de coordonate curbilinii pe suprafaţă.

FUBINI introduce pe suprafaţă o primă metrică, riemanniană, cu ajutorul elementului linear

$$ds^2 = \varphi_2 . \tag{29}$$

O altă metrică (de tip mai general, studiate mai ales în ultima vreme şi numite metrice ale lui FINSLER) se introduce cu ajutorul elementului linear

$$ds = \frac{\varphi_3}{\varphi_2} . \tag{30}$$

Rezumând, enunţăm teorema importantă, următoare:

Planul proiectiv, în care ne dăm un patrulater absolut, poate fi metrizat fie în prima manieră (29) *fie în a doua manieră* (30), *a lui* FUBINI, *prin mijlocirea cubicelor nodale* Φ *circumscrise patrulaterului complect. Planul devine astfel o varietate cu 2 dimensiuni proiectiv-aplicabilă,* — în prima sau a doua manieră, — *pe suprafaţa lui* KLEIN.

22°. **Teoremă.**

Prima geometrie a lui FUBINI ($ds^2 = \varphi_2$) *limitată la una din faţetele eliptice a suprafeţei* K *sau, ceeace e tot una, la unul din domeniile triunghiulare ale patrulaterului, coincide cu geometria lui* BOLYAI-LOBACEFFSKY (mai bine zis: cu un model a acesteia). *Limitată însă la o faţetă iperbolică, sau,* — *în planul reprezentării,* — *la un domeniu cuadrangular, coincide cu geometria lui* LOBACEFFSKY *concepută dual* (prin permutarea rolurilor punctului şi distanţei, respectiv cu ale dreptei şi unghiului).

Să luăm, în planul reprezentării, în locul coordonatelor proiective x_1, x_2, x_3, coordonate eliptice, definite în raport cu fascicolul tangenţial de conice înscris în patrulaterul G (ale cărui laturi au ecuaţiile $\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3 = 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$).

Ecuaţia generală a fascicolului este

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2}{(a_j - a_k)(a_i - u)} = 0.$$

De aici rezultă formulele de schimbare de coordonate

$$(31) \quad x_i = (a_j - a_k)\sqrt{(a_i - u)(a_i - v)}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

unde i, j, k e o ordine ciclică a indicilor 1, 2, 3.

Un calcul asupra căruia nu insist, ne dă pentru parametrii θ_i ai punctului F^0 (de coordonate eliptice u, v) introduşi prin ecuaţiile (17) (în care s'a pus $g_i = g$):

$$(32) \qquad \theta_i = \frac{a_i - u}{a_i - v}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Inlocuind în ecuaţia (22), (22') a cubicei Φ^0 din alineatul 14° mărimile θ_i, prin expresiile (32) iar coordonatele curente x_i, prin expresiile (31), — în care dăm lui u şi v creşterile du şi dv, —

după un calcul ce se poate conduce cu simetrie, obţinem ecuaţia cubicei Φ^0, mărginită la infiniţii mici de ordinul 2 şi 3:

$$(33)\quad \Phi \equiv \frac{du^3}{U^2} + H\,du^2\,dv + K\,du\,dv^2 - \frac{dv^3}{V^2} - \frac{u-v}{UV}\,du\,dv = 0,$$

unde H şi K sunt coeficienţi necalculaţi, care până la urmă se elimină, iar U, V, următoarele polinoame:

$$(34)\quad U \equiv (a-u)(b-u)(c-u)\ ,\ V \equiv (a-v)(b-v)(c-v).$$

Avem deci pentru formele F_2 şi Φ_3 din teoria generală a aplicabilităţii proiective:

$$F_2 = -\frac{1}{3}\,\frac{u-v}{UV}\,du\,dv,$$

$$\Phi_3 = \frac{du^3}{U^2} + H\,du^2\,dv + K\,du\,dv^2 - \frac{dv^3}{V^2}\ .$$

In virtutea procedeului de apolorizare, forma Φ_3 se înlocuieşte cu

$$F_3 = \frac{du^3}{U^2} - \frac{dv^3}{V^2}\ .$$

Incât avem pentru cel de al doilea element linear al lui FUBINI, din (30):

$$(33')\quad ds = -3\,\frac{\dfrac{1}{u-v}\left[\dfrac{V}{U}\,du^3 - \dfrac{U}{V}\,dv^3\right]}{du\ dv}\ .$$

Ţinând seamă că, în cazul când formele primitive F_2 şi F_3 sunt de tipul de mai sus, formele normate se prezintă astfel:

$$\varphi_3 = \beta\gamma\,(\beta du^3 + \gamma dv^3)\ ,\ \varphi_2 = 2\,\beta\gamma\,du\,dv,$$

găsim imediat pentru primul element linear al lui FUBINI

$$(35)\quad \boxed{ds^2 = -2\,\frac{36}{(u-v)^2}\,du\,dv}\ .$$

Când punctul F aparţine unuia din domeniile triunghiulare ale patrulaterului, am văzut (alineatul 16°) că u şi v sunt imaginar conjugate

$$u = p + iq\ ,\quad v = p - iq.$$

Forma elementului linear (35) devine

$$(35') \qquad ds^2 = 18\,\frac{dp^2 + dq^2}{q^2}\,.$$

Recunoaştem aşa dar elementul linear al geometriei lui BOLYAI-LOBACEFFSKY, în modelul lui POINCARÉ, în care liniile drepte sunt reprezentate de jumătăţile de cercuri din semiplanul superior, ortogonale axei $q=0$. Curbura negativă, constantă, a acestei geometrii, are aici valoarea numerică $-1/18$.

Intr'unul din domeniile cuadrangulare, însă, elementul linear are valoarea ce rezultă din (35') după transformarea $q^* = iq$, adică

$$35'') \qquad ds^2 = 18\,\frac{dq^2 - dp^2}{q^2}\,,$$

unde p şi q sunt reali. Dar se ştie că geometria (35') admite un model proiectiv în interiorul conicei reale

$$p^2 + q^2 - r^2 < 0.$$

Deci (35'') admite un model proiectiv în domeniul

$$p^2 - q^2 - r^2 < 0$$

al unei alte conice reale, cum ne putem încredinţa aplicând mai întâiu transformarea $q^* = iq$ şi hotărînd apoi, într'un caz particular, care din domeniile conicei e cel bun. Dar domeniul obţinut e exteriorul conicei reale

$$-p^2 + q^2 + r^2 = 0.$$

Prin polaritate în raport cu această conică, putem da punctelor din exterior, ca reprezentante, coarde din interiorul cercului, iar dreptelor nesecante cercului, puncte. Totuşi coardele trebuesc concepute *ca dublu acoperite*, unul din exemplare corespunzând complementului său din porţiunea exterioară cercului. Cu această convenţie, putem spune că (25'') e elementul linear al planului $\mathfrak{B}.\ \mathfrak{L}.$, considerat dual.

Incât teorema e demonstrată.

23°. Geodeticele acestor geometrii ale patrulaterului se obţin numaidecât. In planul coordonatelor p, q (sau u, v) ele sunt jumătăţi de cercuri, ortogonale axei $q = 0$ (sau $u - v = 0$). Incât ecuaţia lor e de forma

$$A\,uv + B\,(u+v) + C = 0$$

sau, în coordonate proiective x:

$$E_1 x_1^2 + E_2 x_2^2 + E_3 x_3^2 = 0.$$

Aşa dar geodeticele în prima metrică a patrulaterului sunt date de familia ∞^2 *a conicelor conjugate triunghiului diagonal. Pe suprafaţa* K, *geodeticele primei metrice a lui* FUBINI *sunt, cum uşor putem verifica aplicând inversiunea* (25), *curbe strâmbe de ordinul 6.*

24°. Pentru a pune mai bine în lumină rezultatele din alineatul 22°, va trebui să spun un cuvânt în legătură cu unele cercetări ale mele, din acest timp [1]).

Mi-am pus problema metrizării planului în care e dată o curbă algebrică $\Omega = 0$, aşa încât această metrizare să aibă un caracter invariant proiectiv, cât mai simplu. Metoda întrebuinţată e următoarea: iau în fiecare punct x, al planului, polara de ordinul $n-2$ (unde n e ordinul lui Ω) a punctului x faţă de curba Ω. Această polară e o conică, în general nedescompusă. Atribui punctului x elementul linear pe care l-ar avea în metrica lui CAYLEY (de curbură constantă dată) faţă de această conică luată ca absolut—şi obţin *spaţiul cuantic* $\{\Omega\}$.

Se arată simplu că, pentru Ω redusă la laturile unui triunghiu, geometria cuantică rezultată coincide cu geometria euclidiană [2]). In schimb, pentru o curbă Ω redusă la laturile unui patrulater, rezultatul obţinut pe această cale nu mai e aşa de simplu [3]).

Se înţelege acum interesul cercetării din acest paragraf. Am văzut că există un alt mijloc proiectiv, simplu, de a metriza planul în care e dat un patrulater, anume: cu ajutorul cubicelor Φ şi formei corespunzătoare φ_2, a lui FUBINI. Geometria intrinsecă a patrulaterului coincide atunci, în domeniile triunghiulare ale acestuia, cu geometria neeuclidiană iperbolică.

In cât avem în aceste metrice intrisece, destul de naturale, ale unor figuri aşa de elementare ca triunghiul şi patrulaterul, modelele a două geometrii clasice.

---

1) Un rezumat al acestor cercetări „Die von einer Quantik induzierte Riemannsche Metrik" a apărut în Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936, Tome II.

2) Mai greu se arată că triunghiul e singurul spaţiu cuantic cu două dimensiuni, de curbură totală nulă.

3) Geometria cuantică a patrulaterului e aplicabilă pe următoarea suprafaţă din spaţiul euclidian (x, y, z, coordonate ortogonale):

$$e^{y+z} + e^{z+x} + e^{x+y} = 1.$$

Problema nu e încă epuisată. Cazul unui patrulater G cu două laturi reale şi două imaginar-conjugate, cazul unui patrulater cu amândouă perechile de laturi imaginar-conjugate, şi al suprafeţelor K asociate, cred că sunt încă mai instructive de analizat din punct de vedere topologic şi axiomatic. Iată deci un oarecare câmp de cercetări deschis tinerilor colaboratori ai Gazetei.

Un alt aspect mult mai important, al problemei, e următorul: HILBERT a arătat [1]) că suprafeţele de curbură constantă negativă (diferenţiabile de un număr suficient de ori) din spaţiul ordinar au neapărat singularităţi (exemplu: suprafaţa de revoluţie a tractricei, sau «pseudosfera»).

Cercetarea de mai sus deschide problema pentru suprafeţele adâncite în spaţiul proiectiv şi metrizate cu primul element al lui FUBINI. Exemplul suprafeţei K pare să îndreptăţească părerea că, chiar astfel modificată, problema lui HILBERT primeşte un răspuns încă negativ.

25⁰. **Teoremă.**

Liniile lui DARBOUX *şi liniile lui* SEGRE *ale suprafeţei* K *sunt algebrice* (în reprezentarea plană, curbe de ordinul 12).

Această proprietate e un fel de corespondent al teoremei lui DARBOUX, redemonstrată mai sus, privitoare la liniile asimptotice pe suprafeţele Σ şi K, de natură însă ceva mai ascunsă.

Prin definiţie, liniile lui DARBOUX sunt liniile dealungul cărora al doilea element linear al lui FUBINI se anulează. Liniile lui SEGRE sunt conjugatele acestora.

Rezultă aşa dar din (33′) că ecuaţia diferenţială comunală globală a acestor linii este

$$(36) \qquad \frac{du}{\sqrt[3]{U^2}} = j\frac{dv}{\sqrt[3]{V^2}} \quad , \quad j^6 = 1.$$

Nu putem spune *a priori* că integrala unei astfel de ecuaţii e algebrică, întrucât integrantul din fie care membru corespunde unei transcendente abeliene, în aparenţă de gen mai mare ca 1. Avem însă un caz de reducţiune la transcedente eliptice [2]).

Metoda naturală de cercetare a ecuaţiei (36) e următoarea:

---

1) Transactions of the Americain Math. Society, Vol. 2, 1901.

2) A se vedea APPEL şi GOURSAT „Théorie des fonctions algébriques" Tome I, pg. 450—451.

Observăm că integrandul

$$(37) \qquad \frac{du}{\sqrt[3]{U^2}}$$

e un invariant diferențial al transformărilor omografice

$$u^* = \frac{Au+B}{Cu+D} \quad , \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0.$$

Intr'adevăr, verificăm ușor că pentru o astfel de tranformare (37) se înmulțește numai cu factorul Δ. Deci pentru o transformare omografică, aplicată simultan lui u și v, ecuația (36) nu se schimbă.

Să profităm de această împrejurare pentru a atribui parametrilor a, b, c valorile (diferite între ele)

$$\infty \ , \ i, -i.$$

Ecuația (36) devine

$$(36') \qquad \frac{du}{\sqrt[3]{(1+u^2)^2}} = j \frac{dv}{\sqrt[3]{(1+v^2)^2}} \ .$$

Să punem

$$u = \wp'(x) \quad , \quad v = \wp'(y)$$

unde $\wp(x)$ e funcțiunea dublu periodică a lui WEIERSTRASS, de invarianți $g_2 = 0$, $g_3 = 1$. Rezultă imediat, din formulele clasice

$$1 + u^2 = 4\wp^3(x).$$

Avem deasemeni, în cazul de față :

$$du = \wp''(x)\, dx = 6\wp^2(x)\, dx.$$

Ținând seamă de toate aceste transformări, (36') se scrie

$$(37) \qquad \boxed{dx - j\, dy = 0} \qquad j^3 = 1.$$

S'ar părea că numai pentru $j = \pm 1$ integrala lui (37) se poate pune sub formă algebrică. Nu trebue uitat însă că funcțiunile eliptice introduse aparțin cazului echianarmonic și deci *admit o înmulțire complexă, algebrică, tocmai prin factorul j.*

De altfel, presupunând $j = \pm 1$, construind integrala algebrică a lui (37) și apoi dând unuia dintre radicali o determinație

arbitrară obţinem, datorită analiticităţii soluţiei, integrala tuturor ecuaţiilor concentrate în (37). Avem aşa dar pentru integrala generală

$$\begin{vmatrix} C & \sqrt[3]{1+C^2} & 1 \\ u & \sqrt[3]{1+u^2} & 1 \\ \pm v & \varepsilon\sqrt[3]{1+v^2} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \varepsilon^3 = 1;$$

sau, sub formă rezolvată, punând $\sqrt[3]{1+C^2} = C'$:

$$\left\{\frac{u \pm v}{\sqrt[3]{1+u^2} - \varepsilon\sqrt[3]{1+v^2}}\right\}^2 - \sqrt[3]{1+u^2} - \varepsilon\sqrt[3]{1+v^2} = C', \quad (\varepsilon^2 = 1).$$

Pentru a găsi ordinul acestor linii e de ajuns să considerăm una din ele ($j = -1$). Ea admite, în coordonate eliptice, următoarea reprezentare parametrică:

(38) $\qquad u = \wp'(w+a) \quad , \quad v = \wp'(w-a).$

Trecând dela coordonate eliptice, la coordonate punctuale şi introducând (38) în ecuaţia (făcută raţională în u şi v) a unei drepte, obţinem o funcţiune dublu peridiodică de ordinul 12. Deci ordinul curbelor în discuţie e 12.

Intreaga teorie desfăşurată în acest paragraf putea fi prezentată plecând numai dela elementul linear al reţelei plane constituită de conicele înscrise patrulaterului absolut. Legătura cu suprafaţa lui KLEIN ar fi fost însă pierdută.

D. BARBILIAN.

RAPORT PENTRU PREMIUL ING. H. CAPRIEL

In conformitate cu prevederile regulamentului fondului Ing. H. CAPRIEL, urmează să se publice în G. M. No. 4 din Decemvrie a. c. raportul Comisiunei pentru decernarea premiului pe anii 1935—1936.

Intru cât nu s'a primit nici o lucrare până la 1 Mai a. c., avem onoare a vă aduce la cunoştinţă că n'avem pe cine recomanda Onor. Adunării pentru decernarea premiului.

COMISIUNEA:
GH. ŢIŢEICA, AL. BUNESCU
şi MIRON NICULESCU.

Acest raport s'a citit şi s'a aprobat în şedinţa Adunării Generale din 27 August 1937.

NOTE MATEMATICE

16. *Asupra problemei 4191.* Prin această problemă rezolvată la pag. 639 Vol. XLII se cereau patratele de 8 cifre *abcdefgh*, ale căror rădăcini să difere cu 1 de *cdef*. S'au găsit soluțiunile

$$\mathbf{3367}^2 = 11\mathbf{336689} \quad , \quad \mathbf{5618}^2 = 31\mathbf{561924}$$

$$\mathbf{0099}^2 = 0000\mathbf{9801} \quad , \quad \mathbf{0101}^2 = 0001\mathbf{0201}.$$

D-l V. THÉBAULT autorul problemei 4191 a mai propus una analoagă în *Mathesis* cerând ca *cdef* să fie chiar rădăcina exactă a patratului *abcdefgh*. La pag. 160 Vol. XLIX al acelei reviste s'au găsit soluțiile

$$\mathbf{3792}^2 = 1437\mathbf{9264} \quad \text{și} \quad \mathbf{7600}^2 = 5776\mathbf{0000}.$$

Se pot căuta, fie pe calea dată la rezolvarea problemei din *Gazeta Matematică*, fie pe calea dată în *Mathesis*, patratele *abcdefgh* ale căror rădăcini diferă în general cu un număr dat de *cdef*.

G-L GH. BUICLIU.

17. *Asupra problemei No. 353 din revista „Știință și Progres", Anul IV No. 5.*

Se arată că suma:

$$S_3 = 11^3 + 12^3 + \ldots + 20^3$$

este divizibilă cu *775*, făcându-se toate calculele și găsindu-se câtul *53*.

Divizibilitatea se poate însă dovedi și fără să fie nevoe de făcut toate calculele. In adevăr, cum $775 = 5^2 . 31$, constatăm că suma:

$$S_1 = 11 + 12 + \ldots + 20 = 5 . 31.$$

Ori se știe că: *suma cuburilor termenilor unei progresii aritmetice este divizibilă cu suma termenilor*, adică:

$$MS_3 = S_1 = M31.$$

Chiar dacă n'am ține cont de cele de mai sus, putem grupa termenii extremi ai sumei, doi câte doi și ne dă *31*, ori suma a două cuburi este divizibilă cu suma rădăcinilor cubice.

Divizibilitatea cu *25* se poate dovedi, eliminând pe 15^3 şi 20^3 din sumă, care sunt divizibile cu 5^3, şi făcând grupările: (11^3+14^3), (12^3+13^3) cari se divid cu *25*, apoi cum $18^3=(M25-7)^3$ şi $19^3=(M25-6)^3$, avem:

$$16^3+17^3+18^3+19^3=16^3-6^3+17^3-7^3+M25=M25.$$

MAIOR I. LINTEŞ.

18. *Asupra unei sume.*

Suma

$$S_k=1^k C_m^1+2^k C_m^2+\ldots+m^k C_m^m,$$

calculată de D-l GH. D. SIMIONESCU în Nota 7 dela pag. 83 este cunoscută.

Astfel de sume se pot însă calcula direct, observând că

$$(1+e^t)^m=1+C_m^1 e^t+C_m^2 e^{2t}+\ldots+C_m^m e^{mt}$$

şi că suma S_k ne obţine derivând de k ori în raport cu t şi făcând apoi $t=0$. Obţinem deci rezultate directe şi mai precise pe această cale.

M. G.

19. *Asupra problemei 4437.* Nu ştiu pentru ce motiv s'a lăsat la o parte soluţia dată de $xy'-y=0$, adică dreptele $y=cx$, deoarece şi ele verifică condiţia din enunţ ($O=0^2$). Apoi, trebuia observat că integrala singulară $y^2+4x=0$ este şi soluţie a problemei, diferită de drepte, nu numai a ecuaţiei problemei.

M. G.

20. *O problemă de geometrie în spaţiu.*

In *Suplimentul Gazetei Matematice*, Anul III No. 9, am publicat problema VI. 283 cu următorul enunţ:

Pe laturile unui triunghiu ABC *ca diametre se construesc trei sfere. Fie* M *şi* N *punctele comune celor trei sfere. Să se calculeze volumul solidului* ABCMN *în funcţiune de elementele triunghiului* ABC. *Care este suprafaţa laterală a solidului?* (S'a înlocuit în enunţul iniţial cuvântul *laturile* cu *elementele* pentru a se putea da rezultatele sub o formă mai condensată).

Soluţia acestei probleme conduce la unele rezultate interesante; neştiind dacă ele sunt cunoscute şi deoarece S. G. M. dispune de un spaţiu prea restrâns pentru unele soluţii mai lungi, cum e cea de faţă, am preferat publicarea ei sub forma de *Notă*.

Să notăm cu X, Y, Z distanţele punctului M la vârfurile A, B, C, şi fie h înălţimea tetraedului de bază ABC şi cu vârful în M. Este evident, pe bază de simetrie, că punctele M şi N sunt simetrice în raport cu planul triunghiului ABC, şi deci volumul tetraedului ABCM este jumătatea volumului cerut ABCMN.

Mai observăm că planul radical a câte două sfere din enunţ conţine înălţimea triunghiului ce pleacă din vârful comun celor două sfere; de exemplu, sferele ce trec prin vârful A, trec şi prin piciorul A_1 al înălţimii dusă din A pe BC, căci intersecţia lor cu planul ABC este dată de cele două cercuri de diametre AB şi AC, ce trece prin A_1. Rezultă că dreapta MN trece prin ortocentrul triunghiului, căci ea fiind conţinută în toate planurile radicale a câte două sfere, trebue să întâlnească toate înălţimile.

Să mai notăm cu x, y, z distanţele ortocentrului la vârfurile A, B, C ale triunghiului.

Dreapta MN fiind perpendiculară pe planul ABC (planul centrelor sferelor), triunghiurile MHA, MHB, MHC sunt dreptunghice şi putem scrie:

$$\text{I}\begin{cases} h^2 = X^2 - x^2 \\ h^2 = Y^2 - y^2 \\ h^2 = Z^2 - z^2 \end{cases}$$

$$3h^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \qquad (1)$$

[Am utilizat acest artificiu al sumării ecuaţiilor din (I) pentru a nu pierde avantajul pe care-l oferă formulele simetrice].

Să calculăm acum valorile sumelor care intră în (1).

Triunghiurile AMB, BMC, CMA, sunt dreptunghice, căci AB, BC şi CA sunt diametre în sferele respective, şi avem

$$\text{II}\begin{cases} X^2 + Y^2 = c^2 \\ Y^2 + Z^2 = a^2 \\ Z^2 + X^2 = b^2 \end{cases}$$

$$2(X^2 + Y^2 + Z^2) = a^2 + b^2 + c^2 \qquad (2)$$

$$\therefore \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \qquad (2')$$

Scăzând din (2') ecuațiile sistemului II se pot afla, ca deobicei, valorile lui X, Y, Z

$$X = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}}, \text{ etc...},$$

pe care le vom utiliza la partea doua a problemei.

Să trecem acum la cealaltă sumă din (1).

Avem relațiile:

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos(\pi - C) = c^2,$$

sau

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos C = c^2$$

și analog

$$y^2 + z^2 + 2yz\cos A = a^2$$

$$z^2 + x^2 + 2zx\cos B = b^2$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 2\Sigma xy\cos C = a^2 + b^2 + c^2 \qquad (3)$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \Sigma xy\cos C. \qquad (3')$$

Ținând seamă de relațiile (2') și (3'), relația (1) devine:

$$3h^2 = \Sigma xy\cos C. \qquad (4)$$

Avem însă relațiile

$$x\sin C = c\cos A$$

$$y\sin C = c\cos B$$

care prin înmulțire dau:

$$xy\sin^2 C = c^2\cos A\cos B$$

$$\therefore \quad xy = \frac{c^2\cos A\cos B}{\sin^2 C}.$$

Deci relația (4) devine:

$$3h^2 = \Sigma xy\cos C = \Sigma\frac{c^2\cos A\cos B\cos C}{\sin^2 C} = \cos A\cos B\cos C\,\Sigma\frac{c^2}{\sin^2 C}$$

și cum

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$$

rezultă

$$3h^2 = \cos A \cos B \cos C \times 12R^2$$

$$\therefore \quad h^2 = 4R^2 \cos A \cos B \cos C$$

$$\therefore \quad \boxed{h = 2R \sqrt{\cos A \cos B \cos C}}. \qquad (5)$$

Relaţia (5) ne dă înălţimea căutată a tetraedului.

Volumul solidului ABCMN rezultă imediat, ţinând seama de formula suprafeţei triunghiului

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

şi este

$$V = \frac{2}{3} hS = \frac{8}{3} R^3 \sin A \sin B \sin C \sqrt{\cos A \cos B \cos C}. \qquad (6)$$

O formă mai simplă se obţine dacă utilizăm formulele

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ etc... cu ajutorul cărora obţinem}$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{72}(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \qquad (7)$$

Pentru partea a doua a problemei utilizăm formula

$$X = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}} = \sqrt{bc \cos A}$$

şi avem

$$S_t = \Sigma XY = \Sigma \sqrt{bc \cos A ca \cos B} = \Sigma \sqrt{\frac{abc^2 \cos A \cos B \cos C}{\cos C}}$$

$$= \sqrt{abc \cos A \cos B \cos C}\left(\sqrt{\frac{a}{\cos A}} + \sqrt{\frac{b}{\cos B}} + \sqrt{\frac{c}{\cos C}}\right), \qquad (8)$$

care poate fi scrisă şi numai în funcţiune de laturile triunghiului.

Observaţiune. Rezultatul găsit sub (5) poate fi enunţat sub următoarea formă:

„Intr'un sistem de trei axe rectangulare, distanţa dela origină la un plan oarecare este dată de formula

$$\boxed{d = 2R \sqrt{\cos A \cos B \cos C}},$$

în care ABC *este triunghiul determinat de intersecţiile planului cu axele de coordonate, iar* R *e raza cercului circumscris acestui triunghiu“.*

ULPIU FLORESCU.

21. *Asupra ecuaţiei lui* RICCATI.

Este cunoscută proprietatea caracteristică a ecuaţiei lui RICCATI

(1) $$y' = Ay^2 + By + C$$

anume, că *raportul anarmonic a patru integrale particulare distincte este constant.* Această proprietate se demonstrează observând că integrala generală este funcţiune omografică de constanta de integraţiune.

O altă demonstraţie a acestei proprietăţi am dedus cu ocazia problemei 4521 ce am propus în *Gazeta Matematică.*

In *Cursul* meu de *Analiză Matematică* am dat o nouă demonstraţie*) pe care cred util s'o semnalez şi aci, mai ales că ar permite abordarea unui caz mai general; însă fără concluzii analoage.

Fie y_1, y_2, y_3, y_4 patru integrale particulare distincte ale ecuaţiei (1). Putem scrie

$$\frac{dy_1}{Ay_1^2+By_1+C} = \frac{dy_2}{Ay_2^2+By_2+C} = \frac{dy_3}{Ay_3^2+By_3+C} = \frac{dy_4}{Ay_4^2+By_4+C} = dx$$

din cari deducem succesiv

$$dx = \frac{d(y_1-y_2)}{(y_1-y_2)[A(y_1+y_2)+B]} = \frac{d(y_1-y_3)}{(y_1-y_3)[A(y_1+y_3)+B]}$$

$$= \frac{d(y_4-y_2)}{(y_4-y_2)[A(y_4+y_2)+B]} = \frac{d(y_4-y_3)}{(y_4-y_3)[A(y_4+y_3)+B]}$$

sau

$$\frac{d\log(y_1-y_2)}{A(y_1+y_2)+B} = \frac{d\log(y_1-y_2)}{A(y_1+y_3)+B} = \frac{d(y_4-y_2)}{A(y_4+y_2)+B} = \frac{d(y_4-y_3)}{A(y_4+y_3)+B} = dx.$$

De aci deducem, mai departe

$$\frac{d\log\left(\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}\right)}{A(y_2-y_3)} = \frac{d\log\left(\frac{y_4-y_2}{y_4-y_3}\right)}{A(y_2-y_3)} = dx$$

deci

$$\frac{d}{dx}\left[\log\left(\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}\right):\left(\frac{y_4-y_2}{y_4-y_3}\right)\right] = 0,$$

adică

$$\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}:\frac{y_4-y_2}{y_4-y_3} = \text{const.}$$

*) p. 352.

Această metodă permite abordarea problemei de a se cerceta dacă există o relaţiune între un număr determinat de integrale pentru ecuaţia mai generală

$$y' = A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n,$$

A_1 fiind funcţiuni de x. Răspunsul este negativ ca pentru orice ecuaţie de primul ordin, afară de cele lineare şi RICCATI sau reductibile la aceste tipuri, problemă rezolvată de mult.

Insă aplicarea metodei de mai sus duce la o altă concluzie, pe care o voiu expune-o într'o notă viitoare.

M. GHERMĂNESCU.

BIBLIOGRAFIE

Arta & Tehnica Grafică. Buletinul Imprimeriilor Statului. Caietul Nr. 1. Septemvrie 1937. Bucureşti.

Buletin del Seminario Matematico. Dirigido por J. REY PASTOR. Instituto Matematico Hispano-Americano. Vol. IV. Nr. 21. Martie 1937. Conservarea energiei şi experienţa lui SHANKLAND, de F. CERNUSCHI. Asupra unei teoreme a lui GLIVENKO. de A. GONZALES DOMINGUEZ. Metrica şi integrarea spaciilor abstracte, de J. REY PASTOR. Buenos-Aires 1937.

Idem. Nr. 22. Septemvrie 1937. O aplicaţie a simbolului $\Delta^m D^m$, de J. BABINI. Hiperconvergenţa seriilor lui DIRICHLET având exponenţi formând o succesiune de densitate maximă infinită, de S. RIOS. Unele complimente la teoria limitelor şi a funcţiunilor reale în spacii abstracte, de J. REY PASTOR.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLIII. Nr. 10. Octomvrie 1937.

Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii. Anul IV. Nr. 3. 1 Decemvrie. 1937. Bucureşti.

Journal de Matématiques élémentaires. Publicat de H. VUIBERT. An. 62. Nr. 3. 1 Noemvrie 1937. Paris.

Idem. An. 62. Nr. 4. 15 Noemvrie 1937. Paris

Mathesis. Tom. LI. Nr. 8. Octomvrie 1937. Congruenţe deduse dintr'o pseudosferă de YVONNE PÉRÈS. Remarcă asupra formulelor de inversiune relative la soluţiunile sistemelor complet integrabile ale ecuaţiunilor cu diferenţiale totale de R. H. GERMAY. Asupra Algebrei a legii binomiale de probabilitate de C. LURQUIN. Asupra unei probleme relativă curbelor strâmbe de R, GOORMAGHTIGH.

Pitagora. Revistă de matematici. Anul III. Nr. 2. 15 Noemvrie 1937. Colegiul naţional „Carol I". Craiova.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVII. Nr. 9. 15 Noemvrie 1937. Timişoara. Asupra unor ecuaţiuni nedeterminate de A. GLODEN.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Anul XXII. Nr. 3. Iulie-Septemvrie 1937. Iaşi.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Anul VII. Nr. 12. Decemvrie 1937. Bruxelles.

The Mathematical Gazette. Vol. XXI. Nr. 246. Noemvrie 1937. London.

Universidad Nacional de la Plata. Saneamiento Urbano en la Republica Argentina. E. ARTAZA. Nr. 112. Octomvrie 1937.

R. ESTÈVE & H. MITAULT. *Trigonométrie et Complements D'Algèbre.* Paris 1937.

MAIOR I. LINTEŞ. *Dificultăţile de fabricare ale unui material de Artilerie.* (Extras din Revista Artileriei 1937).

N. ABRAMESCU. Lecţiuni de *Geometrie analitică* urmate de Introducere elementară în studiul analitic al Geometriilor neeuclidiene şi Noţiuni elementare de Geometria vectorială. Cursul Facultăţii de ştiinţe. Universitatea din Cluj. Cu o prefaţă de G. ŢIŢEICA. Ediţia II. Cluj 1937. Preţul 520 lei.

CERERI

272. Care este origina cuvântului *Matematica;* pe când a fost el introdus în ştiinţă?

N. D. ŞTEFĂNESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

Mathematical Association Committee. The Teaching of Elementary Alegebra and Numerical Trigonometry. Londra 1911.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

Committee appointed by the Mathematical Association. The Teaching of Elementary Mathematics. Londra 1902.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

Lucrările de asanare a lacurilor din valea Colentinei de N. G. CARANFIL, DORIN PAVEL, G. VLADIMIRESCU, D. R. CORBU şi A. G. VUZITAS. Institutul Român de Energie. Nr. 121. 1936.

Problemele fundamentale pentru viitorul industriei noastre de petrol de VALERIU PATRICIU. I. R. E. Nr. 122. 1937.

Problèmes fondamentaux pour l'avenir de notre industrie du pétrole de VALERIU PATRICIU. I. R. E. Nr. 122 bis.

Petrolul şi drepturile câştigate de G. DAMASCHIN. I. R. E. Nr. 123. 1937.

Problemele fundamentale ale legiuirii energetice. Contribuţiuni la modificarea legii române de energie de I. S. GHEORGHIU. I. R. E. Nr. 124. 1937.

Cimenturi speciale pentru baraje de ŞERBAN SOLACOLU. I. R. E. Nr. 125. 1935.

Gazogene în autotransport de EUGEN COLEV. I. R. E. Nr. 126. 1937.

Consideraţiuni critice asupra interpretării rezultatelor de funcţionare la o centrală de forţă termică; indicarea unor criterii de conducere pentru a obţine o funcţionare economică de FRANCISC ELIÁS. I. R. E. No. 127. 1937.

Electrificarea rurală de CONSTANTIN D. BUŞILĂ. I. R. E. No. 128. 1937.

Technica energetică faţă de apărarea naţională de CONSTANTIN I. BUDEANU. I. R. E. Nr. 129. 1937.

Donate de Institutul Român de Energie. Bucureşti.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1178. *Se dă ecuaţia:*

$$x^4 - p_1x^3 + p_2x^2 - p_3x + p_4 = 0$$

care are ca rădăcini laturile unui patrulater inscriptibil ABCD.

Să se formeze ecuaţia care are ca rădăcini pe cosA, cosB, cosC, cosD.

V. IONESCU.

Prin rezolvarea ecuaţiei date obţinem lungimile *a, b, c, d* ale laturilor patrulaterului cari împart cercul ABCD în patru arce α, β, γ, δ. Măsura oricăruia din unghiurile patrulaterului pe cercul

ABCD va fi dată de semisuma a două din aceste arce, în total vor fi 6 valori, două câte două suplimentare:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}(\alpha+\beta);\quad \frac{1}{2}(\gamma+\delta);$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2}(\alpha+\gamma);\quad \frac{1}{2}(\beta+\delta);$$

$$(3) \qquad \frac{1}{2}(\alpha+\delta);\quad \frac{1}{2}(\beta+\gamma);$$

cu care se vor putea forma trei patrulatere inscriptibile diferite, proprietate cunoscută din geometrie.

Remarcăm că toate aceste patrulatere au aceeaşi suprafaţă, căci expresia acesteia în funcţie de laturi este simetrică:

$$(4) \qquad S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

Insfârşit mai observăm că ecuaţia a cărei rădăcini sunt:

$$y_1=ab+cd \qquad y_2=ac+bd \qquad y_3=ad+bc$$

este de forma [1])

$$(5)\ y^3-p_2y^2+(p_1p_3-4p_4)y+4p_2p_4-p_1^2p_4-p_3^2=0.$$

Din cele arătate mai sus rezultă că pentru rezolvarea problemei va trebui să stabilim ecuaţia care are ca rădăcini:

$$z_1=-z_4=\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad z_2=-z_5=\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

$$z_3=-z_6=\cos\frac{\alpha+\delta}{2}$$

ori se ştie că:

$$z_1=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-a^2-b^2+c^2+d^2}{2(ab+cd)}$$

relaţie care se mai poate scrie:

$$z_1^2=\frac{\Sigma a^4-\Sigma 2a^2b^2-8abcd+4(ab+cd)^2}{4(ab+cd)^2}$$

sau

$$z_1^2=\frac{-16S^2+4(ab+cd)^2}{4(ab+cd)^2}$$

1) G. M., XLI pag. 153.

sau ţinând seama de (4) şi (5):

$$(6) \qquad z^2 = 1 - \frac{4S^2}{y^2}.$$

Deci pentru a găsi ecuaţia cerută de enunţ va fi suficient ca în ecuaţia (1) să facem transformarea:

$$y^2 = \frac{4S^2}{1 - z^2}$$

care pentru simplificare o vom pune sub forma:

$$(7) \qquad y^2 - \frac{k}{1 - z^2} = 0$$

în care

$$(8) \qquad k = 4S^2 = -\frac{p_1^4}{4} + p_1^2 p_2 - 2p_1 p_3 + 4p_4.$$

De asemenea ecuaţia (5) o punem sub forma:

$$y^3 - Ay^2 + By - C = 0$$

în care

$$(9) \qquad A = p^2 \qquad B = p_1 p_3 - 4p_4 \qquad C = p_3^2 + p_1^2 p_4 - 4p_2 p_4$$

deci

$$y(y^2 + B) = Ay^2 + C$$

ridicând la patrat ambii membrii

$$y^6 - (A^2 - 2B)y^4 + (B^2 - 2AC)y^2 - C^2 = 0$$

în care făcând transformarea (7) obţinem:

$$c^2 z^6 + [(B^2 - 2AC)k - 3C^2]z^4 + [(A^2 - 2B)k^2 - 2(B^2 - 2AC)k + 3C^2]z^2$$
$$+ [k^3 - (A^2 - 2B)k^2 + (B^2 - 2AC)k - C^2] = 0$$

unde k, A, B şi C au valorile dela (8) şi (9).

Inlocuirea acestor valori nu prezintă greutate, însă nu o mai facem deoarece nu prezintă nici un interes.

Ecuaţia are 6 rădăcini, două câte două egale şi de semne contrari formând astfel 3 grupe. Aceste grupe combinate între ele câte 2 dau trei grupe de câte patru rădăcini corespunzând celor trei patrulatere diferite ce se pot construi cu laturile a, b, c, d.

MIRCEA ADAM (Constanţa).

Problema se poate rezolva şi direct calculând sumele

$\Sigma \cos A$, $\Sigma \cos A \cos B$, $\Sigma \cos A \cos B \cos C$, $\Sigma \cos A \cos B \cos C \cos D$

in funcţie de *a, b, c, d.* Vom publica sub formă de notă soluţia ce vom primi pe această cale.

G-L GH. B.

PROBLEMA 3524. *Să se determine cantitatea de metal necesară confecţionării unui recipient sferic, în care se comprimă un gaz ce urmează legea lui* MARIOTTE. *Aplicaţie pentru cazul oţelului, densitatea fiind 8000; oboseala 20.000.000 şi presiunea exterioară 10.000.*

MAIOR I. LINTEŞ.

I. Grosimea unui recipient sferic de rază *r, în cazul pereţilor subţiri,* se calculează din cunoscuta relaţie de echilibru:

1) $$\pi . \sigma . [(r + \varepsilon)^2 - r^2] = \pi r^2 . p_0 - \pi (r + \varepsilon)^2 . p_1$$

unde ε este grosimea, p_0 presiunea interioară, p_1 presiunea exterioară şi σ oboseala. Rezultă dar că:

2) $$\varepsilon = r . \left[\sqrt{\frac{\sigma + p_0}{\sigma + p_1}} - 1 \right] .$$

Volumul recipientului sferic fiind:

$$V = \frac{4}{3} \pi \left[(r + \varepsilon)^3 - r^3 \right]$$

urmează că vom avea greutatea:

3) $$G = V . \delta = \frac{4}{3} \pi . \delta . r^3 \left[\left(\frac{\sigma + p_0}{\sigma + p_1} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

unde δ este densitatea metalului.

Dacă în recipient se comprimă un gaz care urmează legea lui MARIOTTE şi dacă iniţial presiunea ar fi tot p_1, atunci avem:

4) $$p_0 = p_1 . \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

unde ρ_0 este massa specifică a gazului din interior şi ρ_1 massa specifică a celui exterior (a atmosferei).

Admiţând că gazul comprimat ar fi aer atmosferic, atunci:

5) $$p_0 = \rho_0 . 7810 .$$

Aceasta corespunde şi comprimării *izoterme.*

In cazul comprimării *adiabatice* avem:

6) $$p_0 = 7810 . \rho_0 . \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{\gamma-1}$$

unde $\gamma = 1{,}41$.

Cum avem:

$$\sigma = 20.000.000 \text{ kg/m}^2$$

$$p_1 = 10.000 \text{ kg/m}^2$$

$$\delta = 8000 \text{ kg/m}^3$$

urmează că:

7) $$G = 33520 . r^3 . \left[\left(\frac{2560{,}8 + \rho_0}{2562{,}1}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] .$$

In cazul când $p_0 = 10p_1$ atunci avem:

8) $$G = 231{,}288 . r^3 \text{ kg.}$$

II. Grosimea unui recipient sferic, în *cazul pereţilor groşi,* se calculează după formula lui LAMÉ care este:

9) $$\varepsilon = r . \left[\sqrt[3]{\frac{2(\sigma + p_0)}{2\sigma + 3p_1 - p_0}} - 1\right] .$$

In consecinţă greutatea recipientului va fi:

10) $$G = 33520 . r^3 . \frac{3p_0 - 30.000}{40.030.000 - p_0} .$$

Unde putem înlocui p_0 prin relaţiunile 5) sau 6).

In cazul când $p_0 = 10 . p_1$, atunci:

11) $$G = 226{,}665 . r^3 .$$

Notă. D-l OCTAVIAN IANCULESCU a rezolvat problema în ipoteza că metalul recipientului încasează căldura de compresiune a gazului şi o cedează

exteriorului, astfel încât în interior temperatura rămâne mereu constantă. Astfel găseşte formula:

$$12) \qquad G = \frac{A \cdot \gamma \cdot R \cdot T}{c \cdot (t_2 - t_1)} L_n \cdot \frac{p_2}{p_1}$$

unde $A = \frac{1}{427}$, echivalentul mecanic al căldurei, γ greutatea gazului în kg, R constanta gazului, T temperatura absolută, c căldura specifică a metalului t_1, t_2 temperaturele iniţiale şi finale, p_1, p_2 presiunile iniţiale şi finale.

In cazul când:

$$\gamma = 1; \quad R = 29{,}27; \quad p_1 = 1 \text{ kg/cm}^2$$

$$p_2 = 4 \text{ kg/cm}^2; \quad t_1 = 15^0$$

deduce că:

$$G = 3{,}8 \text{ kg}$$

pentru un kg de gaz.

Temperatura t_2 o calculează din expresiunea:

$$t_2 = \frac{\sigma}{E \cdot \alpha}$$

unde E este modulul de elasticitate şi $\alpha = 0{,}0000117$.

MAIOR I. LINTEŞ.

PROBLEMA 4301. *Să se găsească un patrat de patru cifre şi unul de trei cifre care, scrise unul după altul, să ne dea un patrat perfect.*

M. GHERMĂNESCU.

Vom rezolva această problemă după indicaţiunile ce am dat în Nota dela finele soluţiei problemei 4313, publicată în G. M. XLII, pag. 320 — 22.

Fie x^2 patratul de patru cifre, y^2 cel de trei cifre, iar z^2 patratul rezultant conform enunţului. Avem:

$$(1) \qquad 1000x^2 + y^2 = z^2.$$

De oarece z^2 se termină prin y^2, care are trei cifre, vom utiliza tabloul calculat de D-l I. V. MĂTIEŞ (G. M. XXXVII, p. 366), din care vom extrage formele care termină cu un patrat de trei

cifre. Ţinând seamă de ecuaţia (1), vom avea de examinat cazurile cuprinse în tabloul de mai jos

y^2	z	x^2	y^2	z	$2x^2$
004	$500n \pm 2$	$n(250n \pm 2)$	001	$250n \pm 1$	$n(125n \pm 1)$
016	$500n \pm 4$	$n(250n \pm 4)$	009	$250n \pm 3$	$n(125n \pm 3)$
036	$500n \pm 6$	$n(250n \pm 6)$	025	$50n \pm 5$	$n(5n \pm 1)$
064	$500n \pm 8$	$n(250n \pm 8)$	049	$250n \pm 7$	$n(125n \pm 7)$
100	$100n + 10$	$n(10n \pm 2)$	081	$250n \pm 9$	$n(125n \pm 9)$
144	$500n \pm 12$	$n(250n \pm 12)$	121	$250n \pm 11$	$n(125n \pm 11)$
196	$500n \pm 14$	$n(250n \pm 14)$	169	$250n \pm 13$	$n(125n \pm 13)$
256	$500n \pm 16$	$n(250n \pm 16)$	225	$50n \pm 15$	$n(5n \pm 3)$
324	$500n \pm 18$	$n(250n \pm 18)$	289	$250n \pm 17$	$n(125n \pm 17)$
400	$100n \pm 20$	$n(10n \pm 4)$	361	$250n \pm 19$	$n(125n \pm 19)$
484	$500n \pm 22$	$n(250n \pm 22)$	441	$250n \pm 21$	$n(125n \pm 21)$
576	$500n \pm 24$	$n(250n \pm 24)$	529	$250n \pm 23$	$n(125n \pm 23)$
625	$100n \pm 25$	$n(10n \pm 5)$	729	$250n \pm 27$	$n(125n \pm 27)$
676	$500n \pm 26$	$n(250n \pm 26)$	841	$250n \pm 29$	$n(125n \pm 29)$
784	$500n \pm 28$	$n(250n \pm 28)$	961	$250n \pm 31$	$n(125n \pm 31)$
900	$100n \pm 30$	$n(10n \pm 6)$			

De oarece z^2 are şapte cifre, urmează că z este cuprins între 1000 şi 3162, astfel că vom da lui n valori corespunzătoare, reţinând numai pe acelea pentru care x^2 este patrat perfect.

1°. Să începem cu valorile lui z care sunt de forma $500n \pm a$. Urmează imediat $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Să examinăm pe rând aceste valori.

$n = 2$. Vom avea $z = 1000 \pm a$, $x^2 = 1000 \pm 2a$, unde $a = 2$, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, 22, 24, 26, 28. Singurul patrat corespunde lui $a = 12$, deci soluţia

$$x = 32, \quad y = 12, \quad z = 1012.$$

Avem, în adevăr,

$$1012^2 - 12^2 = 1000 \cdot 1024 = 1000 \cdot 32^2.$$

$n = 3$. Vom avea $z = 1500 \pm a$, $x^2 = 2250 \pm 3a$, unde a are valorile de mai sus. Singurul patrat corespunde lui $a = 18$, deci soluţia

$$x = 48, \quad y = 18, \quad z = 1518.$$

Avem, în adevăr,

$$1518^2 - 18^2 = 1000 \cdot 2304 = 1000 \cdot 48^2.$$

$n = 4$. Vom avea $z = 2000 \pm a$, $x^2 = 4000 \pm 4a$, unde a are valorile de mai sus.

Singurul patrat corespunde lui $a = 24$, deci soluţia

$$x = 64,\ y = 24,\ z = 2024.$$

Avem, în adevăr,

$$2024^2 - 24^2 = 1000 \cdot 4096 = 1000 \cdot 64^2.$$

$n = 5$. Vom avea $z = 2500 \pm a$, $x^2 = 6250 \pm 5a$, unde a are valorile de mai sus. Nu găsim nici o soluţie.

$n = 6$. Vom avea $z = 3000 \pm a$, $x^2 = 9000 \pm 6a$, unde a are valorile de mai sus.

Nu găsim nici o soluţie.

2^0. Să considerăm valorile lui z care sunt de forma $250n \pm a$. Urmează $n = 4, 5, 6, \ldots 12$. Din acestea, vom elimina pe $n = 4$, care este patrat, căci paranteza din expresia lui $2x^2$ devine impară şi deci nu este dublul unui patrat. Vom elimina pe $n = 5,10$ căci aceeaşi paranteză este primă cu 5, oricare ar fi a. Vom elimina pe $n = 12 = 3 \cdot 2^2$ căci aceeaşi paranteză devine impară. Să examinăm celelalte valori ale lui n.

$n = 6$. Avem $z = 1500 \pm a$, $x^2 = 3(750 \pm a)$. Paranteza este divizibilă cu 3 pentru $a = 3, 9, 21, 27$, însă niciuna din aceste valori nu face patrat perfect pe x^2.

$n = 7$. Avem $z = 1750 \pm a$, $2x^2 = 7(875 \pm a)$. Paranteza este divizibilă cu 7 pentru $a = 7,21$. Găsim pentru $a = 21$, soluţia

$$x = 56,\ y = 21,\ z = 1771.$$

Avem, în adevăr,

$$1771^2 - 21^2 = 1000 \cdot 3136 = 1000 \cdot 56^2.$$

$n = 8$. Avem $z = 2000 \pm a$, $2x^2 = 8\,(1000 \pm a)$. Trebue ca $1000 \pm a$ să fie patrat şi cum a poate fi 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31), rezultă că nu găsim nicio soluţie.

$n = 9$. Avem $z = 2250 \pm a$, $2x^2 = 9\,(1125 + a)$. Trebue ca $1125 \pm a$ să fie dublul unui patrat, ceeace se întâmplă pentru $a = 27$, deci soluţia

$$x = 72,\ y = 27,\ z = 2277.$$

Avem, în adevăr,

$$2277^2 - 27^2 = 1000 \cdot 5184 = 1000.72^2.$$

$n = 11$. Avem $z = 2750 \pm a$, $2x^2 = 11^2(1375 \pm a)$. Paranteza se divide cu 11 pentru $a = 11$, deci $2x^2 = 11^2(1375 \pm 1)$, dar 1375 ± 1 nu este dublul unui patrat.

3°. Să considerăm valorile lui z care sunt de forma $100n \pm 5a$, unde $a = 2, 4, 5, 6$. Urmează $n = 10, 11, \ldots 31$. Deoarece $x^2 = n(10n \pm a)$, vom elimina valorile lui n, numere prime, sau divizibile prin numere prime mai mari ca cea mai mare valoare a lui a, cu care paranteza nu se divide. Rămân de cercetat valorile $n = 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30$.

Pentru acelaşi motiv vom elimina şi numerile neprime, afară de cele care cuprind ca factor un patrat. Rămâne de cercetat numerile $n = 12, 16, 20, 24, 25, 27$.

Să le examinăm pe acestea.

$n=12$. Avem $z=1200 \pm 5a$, $x^2=12(120 \pm a)=2^2 \cdot 3(120 \pm a)$. Trebue $a = 6$, dar nu avem soluţie.

$n = 16$. Avem $z = 1600 \pm 5a$, $x^2 = 4^2(160 \pm a)$. Nu avem soluţie.

$n = 20$. Avem $z = 2000 \pm 5a$, $x^2 = 2^2 \cdot 5(200 \pm a)$. Trebue $a = 5$, dar nu avem soluţie.

$n = 24$. Avem $z = 2400 \pm 5a$, $x^2 = 2^2 \cdot 6(240 \pm a)$. Trebue $a = 6$, dar nu avem soluţie.

$n = 25$. Avem $z = 2500 \pm 5a$, $x^2 = 5^2(250 \pm a)$. Trebue $a=6$, de unde soluţia:

$$x = 80, \; y = 30, \; z = 2530.$$

Avem, în adevăr,

$$2530^2 - 30^2 = 1000 \cdot 6400 = 1000 \cdot 80^2.$$

$n = 27$. Avem $z = 2700 \pm a$, $x^2 = 3^2 \cdot 3(270 \pm a)$. Trebue $a = 6$, dar nu avem soluţie.

4°. Să considerăm, în fine, valorile z cari sunt de forma $50n \pm 5a$, $a = 1, 3$. Urmează $n=20, 21, \ldots 65$. Deoarece $2x^2 = n(5n \pm a)$ urmează că $5n \pm a$ trebue să fie divizibil prin n sau prin jumătatea sa, ceeace este imposibil căci $a = 1, 3$, afară de cazul când n este un patrat sau dublul unui patrat pentru care corespund valorile $n = 25, 32, 36, 49, 50, 64$. Să examinăm aceste valori.

$n = 25$. Avem $z=1250 \pm 5a$, $2x^2 = 5^2(125 \pm a)$. Pentru $a=3$ avem soluţia

$$x = 40, \; y = 15, \; z = 1265.$$

Avem, în adevăr,

$$1265^2 - 15^2 = 160.000 = 1000.40^2.$$

$n = 32$. Avem $z = 1600 \pm 5a$, $2x^2 = 2 \cdot 4^2 (160 \pm a)$. Nu avem soluţie.

$n = 36$. Avem $z = 1800 \pm 5a$, $2x^2 = 6^2 (180 \pm a)$. Nu avem soluţie.

$n = 49$. Avem $z = 2450 \pm 5a$, $2x^2 = 7^2 (245 \pm a)$. Pentru $a = 3$ avem soluţia

$$x = 77 \ , \ y = 15 \ , \ z = 2435.$$

Avem, în adevăr,

$$2435^2 - 15^2 = 1000 \cdot 77^2.$$

$n = 50$. Avem $z = 2500 \pm 5a$, $2x^2 = 2.5^2 (250 \pm a)$. Nu avem soluţie.

$n = 64$. Avem $z = 3200 \pm 5a$, $2n^2 = 8^2 (320 \pm a)$. Nu avem soluţie.

In rezumat, problema admite opt soluţii, cuprinse în tabloul

x^2	y^2	z^2
$1024 = 32^2$	$144 = 12^2$	$1024144 = 1012^2$
$1600 = 40^2$	$225 = 15^2$	$1600225 = 1265^2$
$2304 = 48^2$	$324 = 18^2$	$2304324 = 1518^2$
$3136 = 56^2$	$441 = 21^2$	$3136441 = 1771^2$
$4096 = 64^2$	$576 = 24^2$	$4096576 = 2024^2$
$5184 = 72^2$	$729 = 27^2$	$5184729 = 2277^2$
$5929 = 77^2$	$225 = 15^2$	$5929225 = 2435^2$
$6400 = 80^2$	$900 = 30^2$	$6400900 = 2530^2$

Notă. 1. La această problemă s'au trimis foarte multe încercări de soluţie, cu rezultatele incomplete, în care metoda de cercetare a furnizat-o... tabla de patrate perfecte! Singurii cari pe această... cale au reuşit să găsească toate soluţiile problemei sunt D-nii: D. MAVRODIN şi M. AMĂRĂŞTEANU.

2. Interpretând enunţul în sensul ca patratul de trei cifre să fie înaintea celui de patru, a găsit soluţii ale problemei D-l Prof. GH. CONSTANTINESCU într'un articol din R. M. T. (XVII, p. 37), dar nu am verificat dacă sunt toate. Pentru aceasta propun să se folosească metoda extragerii de rădăcină, indicată la problema 4313.

M. G.

PROBLEMA 4365. *Fie* ABC *triunghiul de referinţă şi* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ *trei segmente situate pe laturile corespunzătoare ale triunghiului său ortic şi văzute din ortocentru sub unghiuri drepte. Dacă* α, β, γ *sunt colineare, paralelele laturilor triunghiului* ABC, *trecând prin ortocentru, întâlnesc laturile respective ale triunghiului* $\alpha'\beta'\gamma'$ *în trei puncte situate pe simetrica dreptei* $\alpha\beta\gamma$ *în raport cu ortocentrul.*

C. IONESCU-BUJOR.

Soluţie dată de D-l THEODOR G. COCEA.

Fie D, E şi F punctele de contact ale cercului (H), înscris în triunghiul ortic $H_a H_b H_c$, al triunghiului ABC, cu laturile $H_b H_c$, $H_c H_a$ şi $H_a H_b$. Polarele punctelor α', β' şi γ' în raport cu cercul (H) sunt respectiv paralele duse prin D, E şi F respectiv la dreptele $H\alpha$, $H\beta$ şi $H\gamma$. Triunghiul $A_2 B_2 C_2$ format de paralelele duse prin D, E şi F la $H\alpha$, $H\beta$ şi $H\gamma$ şi triunghiul $\alpha'\beta'\gamma'$ sunt polare reciproce.

Fie M polul dreptei $\alpha\beta\gamma$ şi A_3 al patrulea vârf al paralelogramului construit pe EA_2 şi FA_2. Paralelele duse prin A_2 şi A_3 la AH sunt simetrice faţă de AH, deci şi faţă de punctul H. ME şi MF sunt perpendiculare pe $H\beta$ şi $H\gamma$ fiind polarele punctelor β şi γ în raport cu cercul (H). A_3 este deci ortocentrul triunghiului MEF şi deci paralela dusă prin A_3 la AH trece prin M, fiind înălţimea acestui vârf în triunghiul MEF. Rezultă că paralela dusă prin A_2 la AH, trece prin simetricul lui M faţă de H, punct care este polul simetricei dreptei $\alpha\beta\gamma$ faţă de H.

La fel se arată că şi paralelele duse prin B_2 şi C_2 la BH şi CH trec prin polul simetricei dreptei $\alpha\beta\gamma$ faţă de H. Dar paralelele duse prin punctele A_2, B_2 şi C_2 respectiv la AH, BH şi CH sunt polarele punctelor de intersecţie ale laturilor triunghiului $\alpha'\beta'\gamma'$, cu paralelele duse prin H la laturile triunghiului ABC. Deci aceste puncte sunt colineare pe simetrica dreptei $\alpha\beta\gamma$ faţă de H.

C. I. B.

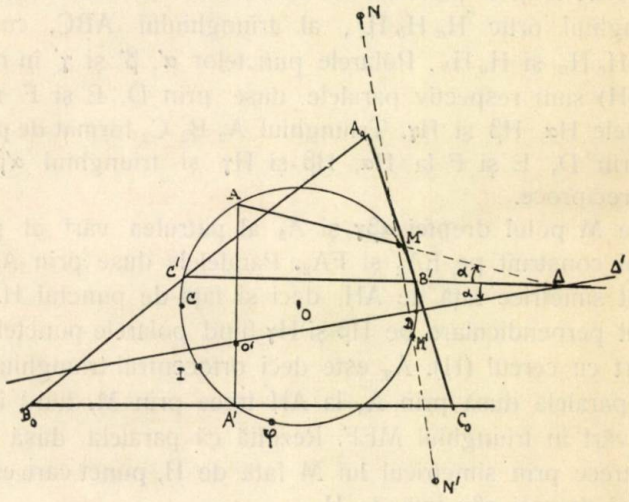
PROBLEMA 4438. *Se dă un cerc* O, *pe care se consideră un punct fix* A *şi unul mobil* M *şi fie* Δ *o dreaptă care taie cercul* O.

Fie D *perpendiculara din* M, *pe simetrica dreptei* AM *față de dreapta* Δ. *Dacă din* M *spre* Δ *se dă o distanță în același sens, egală cu diametrul cercului* O, *se obține un punct* N, *ce descrie o hipocicloidă cu trei rebrusmente. Generalizare.*

LT. MIHAIL I. FOCȘENEANU.

I°. *Soluție.*

Fie CD diametrul cercului O, paralel cu Δ, I diametralul lui M și M′ al doilea punct comun cercului și dreptei MN.



Deci notăm cu α unghiul OAM și cu β unghiul (AM, CD) avem

$$\measuredangle AOC = \alpha - \beta = \text{constant}$$

$$\measuredangle OMN = \frac{\pi}{2} - (\alpha + 2\beta) \quad \text{și} \quad \measuredangle IOM' = \pi - 2(\alpha + 2\beta).$$

Deci $arc\, IM' = arc\, IN$.

Dacă luăm acum punctul φ, care împarte arcul IM′ în a 3-a parte dela I spre M′, avem:

$$\text{arc}A\varphi = \text{arc}AI + \text{arc}I\varphi = 2\alpha + \frac{\pi - 2(\alpha + 2\beta}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}(\alpha - \beta).$$

Adică arcul Aφ este constant și deci *punctul* φ *este fix.*

Ori, prin definiție, locul punctului N, astfel ca $arc\text{IN} = 3arc\varphi\text{I}$, ($\varphi$ un punct fix al cercului de bază), iar cercul ruletă având rază dublă, este o *hipocicloidă cu trei rebrusmente,* care are contactele cu cercul O în *triunghi echilateral, cu unul din vârfuri în* φ.

Rebrusmentele sunt pe bisectoarele acestui triunghiu.

II°. *Generalizare.*

1°. O primă generalizare se obține luând pe D, într'un sens sau altul o *distanță constantă* K.

In acest caz, cercul cu centrul în M și de rază MN este tangent unui alt cerc de centru O și de rază K — R sau R — K ($K \neq R$).

Cercul cu centru în M, alunecă deci fără frecare pe cercul de centru O și punctul N, va descrie o *hipocicloidă turtită* sau *alungită* după cum $K \gtrless R$.

2°. O altă *generalizare* se obține *proiectând* M *pe* Δ_1, *sub un unghiu oarecare constant.*

Insemnând cu K acest unghiu; obținem

$$\measuredangle \text{OMM}' = k - (\alpha + 2\beta) \quad \text{și} \quad \measuredangle \text{IOM}' = 2k - 2(\alpha + 2\beta).$$

Cum $\text{arc}\text{IM}' = \text{arc}\text{IN}$, dacă luăm dela I spre M' un arc egal cu $\text{arc}\,\frac{\text{IM}'}{3}$ obținem punctul φ, care este **fix,** căci

$$\text{arc}\text{A}\varphi = \text{arc}\text{AI} + \text{arc}\text{I}\varphi = 2\alpha + \frac{2k - 2(\alpha+2\beta)}{3} = \frac{2k}{3} + \frac{4}{3}(\alpha - \beta).$$

Locul lui N este tot o *hipocicloidă cu 3 rebrusmente,* având același cerc tritangent și ale cărei tangente de rebrusment fac cu cele ale primei, același unghiu egal cu $\frac{\pi - k}{3}$.

3°. In fine, dacă cerem ca punctul N să îndeplinească *ambele condiții,* locul său va fi tot o *hipocicloidă turtită* sau *alungită.*

III°. *Observațiuni.*

1°. După cum se vede, condiția ca Δ să taie cercul O, nu e necesară.

Am pus-o în problemă pentru a înlesni unele observațiuni ce așteptam dela corespondenți și care nu au sosit. Le voi da mai jos.

2°. Dacă luăm segmentul MN în ambele sensuri și cel de al 2-lea punct N', descrie o hipocicloidă.

3°. Să complectăm figura noastră cu următoarele:

Fie B' şi C' intersecţiile lui Δ cu cercul O, O' simetricul lui A faţă de Δ, şi A' intersecţia lui AO' cu cercul O.

De asemenea $A_0B_0C_0$ *triunghiul anticomplimentar lui* A'B'C'. Se observă că cercul O este cercul EULER al triunghiului $A_0B_0C_0$, iar simetrica lui AM faţă de Δ (B'C') este diametru în cercul $A_0B_0C_0$.

Atunci M este *ortopolul acestui diametru* Δ', *faţă de triunghiul* $A_0B_0C_0$ (MEYTELON).

N şi N' sunt ortopolurile tangentelor cercului $A_0B_0C_0$, paralele cu Δ', care am demonstrat mai sus că descriu aceeaşi *hipocicloidă cu 3 rebrusmente.* (Vezi *Curierul Matematic* Vol. I, pag. 148, «Asupra ortopolului» de M. I. FOCŞENEANU).

Notă. D-l C. BERDAN a dat o soluţie şi generalizarea în sensul celor de faţă.

D-l O. SACTER a dat soluţia de mai sus, fără generalizare.

D-l G. G. CONSTANTINESCU a *încercat* să soluţioneze analitic problema.

CPT. M. I. F.

PROBLEMA 4465. *Să se demonstreze că dacă primii termeni ai şirului* lui FIBONACCI *sunt*

$$u_1 = 1 \ , \ u_2 = 1 \ , \ u_3 = 2, \ldots$$

atunci între termenii u_{60n+1} *şi* $u_{60(n+1)}$ *inclusiv, sunt câte patru termeni care au ca cifră a unimilor pe fiecare din cifrele perechi 0, 2, 4, 6, 8 şi câte opt termeni care au ca cifră a unimilor pe fiecare din cifrele neperechi 1, 3, 5, 7, 9.*

G-L GH. BUICLIU.

Demonstraţia acestei proprietăţi este cuprinsă în soluţia pe care am dat-o în *Gazeta Matematică* problemei 3832 la pag. 146 din acest an.

S'a primit o soluţie bună de la D-l O. SACTER, care s'a bazat pe proprietatea enunţată în problema 4689 ce am propus la pag. 598, Vol. XLI, *Gazeta Matematică.*

GH. B.

PROBLEMA 4466. *Să se arate că expresiunea:*

$$E \equiv \frac{(a^2b^2c^2)!\,(ab^2c)!\,(abc^2)!\,(a^2bc)!}{(ab^2c^2)!\,(a^2bc^2)!\,(a^2b^2c)!\,(abc)!} \times \frac{(ab)^{abc^2}\cdot(ac)^{ab^2c}\cdot(bc)^{a^2bc}}{a^{ab^2c^2}\cdot b^{a^2bc}\cdot c^{a^2b^2c}\cdot(abc)^{abc}}$$

reprezintă un număr întreg, a, b, c *fiind numere prime absolute.*

MAIOR I. LINTEŞ.

In G. M. Vol. XLI, pag. 279, s'a găsit că produsul numerelor prime cu N din şirul natural al primelor p numere, când $p = N$, este:

$$P(N) = \frac{N!\,\Pi\left(\frac{N}{ab}\right)!\ldots\Pi(ab)^{\frac{N}{ab}}\ldots}{\pi\left(\frac{N}{a}\right)!\,\Pi\left(\frac{N}{abc}\right)!\ldots\Pi a^{\frac{N}{a}}\ldots\Pi(abc)^{\frac{N}{abc}}\ldots}$$

Considerând numai 3 numere, a, b, c, egalitatea de mai sus devine:

$$P(N) = \frac{N!\left(\frac{N}{ab}\right)!\left(\frac{N}{bc}\right)!\left(\frac{N}{ca}\right)!\,(ab)^{\frac{N}{ab}}\cdot(bc)^{\frac{N}{bc}}\cdot(ca)^{\frac{N}{ca}}}{\left(\frac{N}{a}\right)!\left(\frac{N}{b}\right)!\left(\frac{N}{c}\right)!\left(\frac{N}{abc}\right)!\,a^{\frac{N}{a}}\cdot b^{\frac{N}{b}}\cdot c^{\frac{N}{c}}\cdot(abc)^{\frac{N}{abc}}}.$$

Dacă facem $N = abc$, cum a, b, c sunt 3 numere prime (aşa ni se dau) obţinem tocmai expresiunea dată, care evident este un întreg deoarece este un produs.

MARCELIU F. AMĂRĂŞTEANU
(Bacalaureat-Craiova).

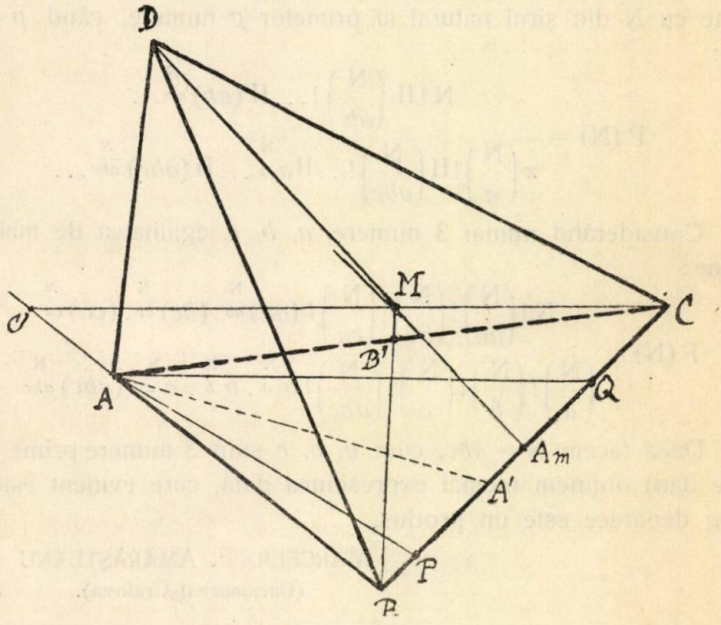
PROBLEMA 4491. *Fie dat tetraedrul* ABCD *aşa fel ca muchia* DA *să fie perpendiculară pe planul* ABC; *diedrul* Δ *având dreapta* DA *ca muche şi acelaşi plan bisector cu diedrul format de planele* ADB, ADC; P, Q *punctele în care* Δ *este întâlnit de dreapta* BC. B', C' *fiind punctele de întâlnire ale sferelor* DAPB, DAQC *cu dreptele* AC, AB, *să se afle locul geometric al intersecţiei planelor* DBB', DCC' *când diedrul* Δ *se desface sau se închide.*

C. IONESCU-BUJOR.

Soluţie dată de D-nii: A. DOBRESCU (R.-Sărat) şi SERGIU TARASIUC.

Fie M punctul de întâlnire al dreptelor BB′ şi CC′. A afla locul geometric al dreptei DM, după care se întâlnesc planele DBB′ şi DCC′, revine a afla locul geometric al punctului M.

Punctele de întâlnire ale sferelor DAPB şi DAQC cu dreptele AC şi AB sunt punctele de întâlnire ale cercurilor circumscrise triunghiurilor ABP şi ACQ, după care sferele considerate întâlnesc planul ABC, cu dreptele AC şi AB respectiv.



Deducem :

$$\widehat{CAP} = \widehat{B'BC} \ , \ \widehat{BAQ} = \widehat{C'CB}$$

deoarece $\widehat{CAP} = \widehat{BAQ}$ (aceasta din cauză că $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$):

$$\widehat{B'BC} = \widehat{C'CB}.$$

Aşa dar triunghiul MBC este isoscel şi deci locul punctului M este mediatoarea MA_m a laturii BC din triunghiul ABC.

Deci locul geometric al intersecţiei planelor DBB′ şi DCC′ este planul determinat de punctul D şi dreapta MA_m .

C. I. B.

PROBLEMA 4503. *Există triunghiuri având laturile şi suprafaţa exprimate în numere întregi?*

MAIOR I. LINTEŞ.

Suprafaţa unui triunghiu poate să fie exprimată astfel:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

unde a, b, c sunt întregi.

Posibilităţile ca produsul de sub radical să fie patrat perfect sunt:

1) *Fiecare factor este patrat*, adică:

$$p = q_1^2 \; ; \; p-a = q_2^2 \; ; \; p-b = q_3^2 \; ; \; p-c = q_4^2 .$$

Adunând ultimii trei factori, vedem că trebue să avem:

$$p = q_1^2 = q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$$

ceeace este posibil dacă p este diagonala şi q_2, q_3, q_4 sunt muchiile unui paralelipiped drept.

2) *Toţi factorii sunt egali.* Acest caz nu este posibil decât dacă

$$a = b = c = 0 .$$

3) *Produsul a câte doi factori este multiplul unui patrat.* Admitem:

$$p(p-a) = m \cdot \alpha^2 \quad \text{şi} \quad (p-b)(p-c) = m \cdot \beta^2 .$$

Atunci prin adunare obţinem:

$$b \cdot c = m(\alpha^2 + \beta^2) .$$

Deci putem avea $b = m \cdot c$ şi prin urmare:

$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

ceeace este posibil, soluţiile fiind numere pitagoriene.

Dacă $m = 1$ avem cazul triunghiului isocel.

Prin permutări putem obţine şi alte soluţii.

4) *Produsul a doi factori este egal cu produsul celorlalţi doi factori.* Adică:

$$p(p-a) = (p-b)(p-c) .$$

Ceeace ne dă:

$$a^2 = b^2 - c^2$$

adică tocmai cazul triunghiurilor dreptunghice, unde

$$S = \frac{a \cdot c}{2}.$$

Deci a sau c trebue să fie neapărat par (pot fi şi ambele deodată).

Prin permutări se pot obţine şi alte soluţii.

5) *Produsul ultimilor trei factori este egal cu* $q^2 \cdot p$.

Adică:

$$(p - a)(p - b)(p - c) = q^2 \cdot p.$$

Ceeace ne dă:

$$(ab + ac + bc)p = q^2 \cdot p + p^3 + abc.$$

Urmează dar că trebue să avem:

$$abc = n \cdot p.$$

Sau:

$$ab + ac + bc = q^2 + p^2 + n.$$

Sau:

$$q^2 + a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac + n = 0$$

ceeace nu se poate decât dacă

$$a = b = c = 0.$$

Permutând factorii obţinem acelaşi rezultat.

6) *Doi factori sunt egali şi produsul celorlalţi doi factori este un patrat.* Adică:

$$p \cdot (p - a) = k^2 \quad \text{şi} \quad p - b = p - c$$

Acest caz se reduce la cazul 3) când $m = 1$, adică este cazul triunghiurilor isoscele.

Tot în acest caz intră şi triunghiurile echilaterale, din moment ce două laturi sunt egale între ele.

Notă. 1) O bună soluţie însă incomplectă a trimis D-l Gavril I. Popovici (elev-inginer).

2) Mi se pare că problema 4503 trebue să fie cunoscută, eu însă n'am găsit-o până acum în cărţile şi revistele ce le-am consultat.

Maior I. Linteş.

PROBLEMA 4709. *Fie* M *şi* M′ *punctele care împart latura* BC *în raportul* $\frac{n}{p}$; N *şi* N′ *punctele care împart latura* CA *în raportul* $\frac{p}{m}$; P *şi* P′ *punctele care împart latura* AB *în raportul* $\frac{m}{n}$.

1°. *Să se arate că cercurile de diametru* MM′, NN′, PP′ *luate câte două, au aceeaşi axă radicală.*

2°. *Ce relaţie trebue să existe între* m, n, p *şi laturile triunghiului pentru ca cercurile să taie această axă radicală?*

GH. D. SIMIONESCU.

1°. Alegem un sistem de axe dreptunghiulare la care raportăm triunghiul şi fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ coordonatele vârfurilor. Dacă $\alpha(x, y)$ este un punct curent al cercului de diametru MM′ se ştie că $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{n}{p}$.

Exprimând distanţele $\overline{\alpha B}$ şi $\overline{\alpha C}$ analitic obţinem ecuaţia acestui cerc:

$$(MM') \quad p^2[(x-x_2)^2+(y-y_2)]^2 - n^2[(x-x_3)^2+(y-y_3)^2] = 0$$

şi analog pentru celelalte cercuri:

$$(NN') \quad m^2[(x-x_3)^2+(y-y_3)^2] - p^2[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2] = 0$$

$$(PP') \quad n^2[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2] - m^2[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2] = 0.$$

Se vede imediat că dacă înmulţim prima ecuaţie cu m^2, pe a doua cu n^2 şi le adunăm, căpătăm ecuaţia a treia, deci unul din cercuri trece prin intersecţia celorlalte două. Cercurile aparţin unui fascicol şi au centrele pe o dreaptă perpendiculară pe axa radicală.

Observare. Să notăm:

$$C_a = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2; \quad C_b = (x-x_2)^2+(y-y_2)^2; \text{ etc.}$$

Ecuaţia axei radicale se obţine eliminând grupul (x^2+y^2) între două ecuaţii, de ex. (MM′) şi (NN′).

Se înmulţeşte prima ecuaţie cu (m^2-p^2), a doua cu (p^2-n^2), se scad ecuaţiile şi se simplifică cu p^2. Găsim:

$$m^2(C_b - C_c) + n^2(C_c - C_a) + p^2(C_a - C_b) = 0.$$

Se vede că oricare ar fi m, n, p axa radicală trece prin punctul comun dreptelor:

$$C_b - C_c = 0; \quad C_c - C_a = 0; \quad C_a - C_b = 0$$

care evident sunt concurente.

Acestea sunt chiar ecuaţiile mediatoarelor triunghiului ABC, deci axa radicală a cercului (MM'), (NN'), (PP') trece prin *centru cercului circumscris* triunghiului.

2°. Pentru a găsi relaţia cerută de problemă vom nota laturile triunghiului a, b, c şi vom particulariza axele de coordonate luând pe BC ca axă Ox şi perpendiculara în B pe BC ca axă Oy. Coordonatele vârfurilor vor fi: $A(x_1, y_1)$, $B(O, 0)$, $C(a, 0)$, iar cercurile (MM') şi (PP') de centre respectiv O_a şi O_c vor avea ecuaţiile:

$$(1) \qquad x^2+y^2+2\frac{n^2a}{p^2-n^2}x-\frac{n^2a^2}{p^2-n^2}=0$$

$$(2) \qquad x^2+y^2+2\frac{n^2x_1}{m^2-n^2}x+2\frac{n^2y_1}{m^2-n^2}y-\frac{n^2c^2}{m^2-n^2}=0$$

unde s'a ţinut seama că $x_1^2+y_1^2=c^2$.

Ecuaţia (1) ne dă coordonatele centrului $O_a\left(-\frac{n^2a}{p^2-n^2}, 0\right)$ şi raza cercului $R_a=\frac{np}{p^2-n^2}a$, iar prin scăderea celor două ecuaţii obţinem ecuaţia axei radicale:

$$2\left(x_1+a\frac{m^2-n^2}{n^2-p^2}\right)x+2y_1y-a^2\frac{m^2-n^2}{n^2-p^2}-c^2=0.$$

Ca să avem punctele de intersecţie reale trebue ca raza cercului să fie mai mare decât distanţa d dela centrul O_a la axa radicală, deci $R^2 \geqslant d^2$.

Să calculăm pe d:

$$d=\frac{2\left(x_1+a\frac{m^2-n^2}{n^2-p^2}\right)\frac{n^2a}{p^2-n^2}+a^2\frac{m^2-n^2}{n^2-p^2}+c^2}{2\sqrt{a^2\frac{(m^2-n^2)^2}{(n^2-p^2)^2}+2ax_1\frac{m^2-n^2}{n^2-p^2}+c^2}}.$$

Introducând în relaţia de mai sus găsim:

$$4a^2\frac{n^2p^2}{(n^2-p^2)^2}\left[a^2\frac{(m^2-n^2)^2}{(n^2-p^2)^2}+2ax_1\frac{m^2-n^2}{n^2-p^2}+c^2\right]$$
$$\geqslant\left[a^2\frac{(m^2-n^2)(n^2+p^2)}{(n^2-p^2)^2}-2ax_1\frac{n^2}{n^2-p^2}+c^2\right]^2.$$

Desvoltând şi trecând toţi termenii în partea II-a obţinem:

$$\frac{a^2}{(n^2-p^2)^2}\left[a(m^2-n^2)+2x_1n^2\right]^2-2a^2c^2\frac{m^2(n^2+p^2)}{(n^2-p^2)^2}$$

$$+2ac^2\frac{n^2}{n^2-p^2}(a-2x_1)+c^4\leqslant 0$$

sau:

$$\left[\frac{a\left[n^2(a-2x_1)-am^2\right]}{n^2-p^2}+c^2\right]^2+2a^2c^2\frac{m^2}{n^2-p^2}\left(1-\frac{n^2+p^2}{n^2-p^2}\right)\leqslant 0.$$

Gonind numitorii care sunt pozitivi şi observând că $x_1 = c\cos B$ avem:

$$a^2-2ax_1=a^2-2ac\cos B=b^2-c^2,$$

inegalitatea devine:

$$(m^2a^2-n^2b^2+p^2c^2)^2\leqslant 4m^2p^2a^2c^2.$$

Sau:

$$(3)\qquad 2\Sigma m^2n^2a^2b^2-\Sigma m^4a^2\geqslant 0.$$

Această relaţie arată că triunghiul cu laturile *ma, nb, pc* are patratul suprafeţii pozitiv, deci aria reală, adică *acest triunghiu trebue să existe.* Atunci avem condiţiile:

$$ma\leqslant nb+pc\ ;\quad nb\leqslant pc+ma\ ;\quad pc\leqslant ma+nb.$$

Problema a fost rezolvată incomplet de D-l DIMITRIE MAVRODIN. D-sa dă o singură condiţie şi aceasta datorită faptului că a pornit dela condiţia geometrică $O_aO_b\leqslant R_a+R_b$, fără să alăture şi condiţiile:

$$O_bO_c\leqslant R_b+R_c \text{ şi } O_cO_a\leqslant R_c+R_a.$$

PROBLEMA 4828. *a_1, a_2, a_3, a_4 fiind unghiuri oarecare, există relaţia*

$$\frac{(\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_3+\operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_4)^2+\Sigma\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_3(\operatorname{tg}a_1+\operatorname{tg}a_2+\operatorname{tg}a_3)}{(\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_3+\operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_4)^2-\Sigma\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_3(\operatorname{tg}a_1-\operatorname{tg}a_2+\operatorname{tg}a_3)}$$

$$=\frac{\sin(a_1+a_2).\sin(a_2+a_3).\sin(a_3+a_4).\sin(a_4+a_1)}{\sin(a_1-a_2).\sin(a_2-a_3).\sin(a_3-a_4).\sin(a_4-a_1)}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

1. *Soluție* dată de D-nii: N. D. ȘTEFĂNESCU și V. FLORESCU (Lic. militar N. Filipescu), C. N. GAVRILESCU (Școala ofițeri Sibiu) și A. POPESCU-ZORICA (București).

Notăm:

$$\frac{\operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg} a_2} = l_1, \quad \frac{\operatorname{tg} a_2}{\operatorname{tg} a_3} = l_2, \quad \frac{\operatorname{tg} a_3}{\operatorname{tg} a_4} = l_3, \quad \frac{\operatorname{tg} a_4}{\operatorname{tg} a_1} = l_4. \tag{1}$$

Se poate scrie egalitatea

$$\frac{\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_2}{\operatorname{tg} a_1 - \operatorname{tg} a_2} = \frac{l_1 + 1}{l_1 - 1},$$

al cărui membru I, făcut calculabil prin logaritmi, dă

$$\frac{\sin(a_1 + a_2)}{\sin(a_1 - a_2)} = \frac{l_1 + 1}{l_1 - 1}. \tag{2}$$

Analog, plecând dela celelalte egalități (1), se obțin alte trei egalități (2). Multiplicându-le, apoi înlocuind l_1, l_2 l_3, l_4 prin valorile lor și grupând convenabil, se obține egalitatea problemei.

2°. *Soluția II*, dată de D-nii: G. G. CONSTANTINESCU, D. MAVRODIN, SLT. M. GRUMĂZESCU, V. FLORESCU, M. A. VASILESCU-STABU (Alba-Iulia), ST. C. TILICĂ (T.-Severin), T. PREDOIESCU-ȚÂNȚĂRENI (bacalaureat), SLT. GR. MARTEȘ.

Se folosesc identitățile ușor de verificat:

$$(ac + bd)^2 + \Sigma\, abc\,(a + b + c) = (a + b)(b + c)(c + d)(d + a),$$

$$(ac + bd)^2 - \Sigma\, abc\,(a - b + c) = (a - b)(b - c)(c - d)(d - a),$$

în care se înlocuește astfel:

$$a = \operatorname{tg} a_1, \quad b = \operatorname{tg} a_2, \quad c = \operatorname{tg} a_3, \quad d = \operatorname{tg} a_4.$$

Membrul I devine

$$\frac{\Pi(\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_2)}{\Pi(\operatorname{tg} a_1 - \operatorname{tg} a_2)},$$

indicii permutându-se circular. Punând sumele și diferențele de tangente sub formă calculabilă prin logaritmi, se găsește membrul II.

3°. *Notă.* *a)* Dacă în identitatea problemei înlocuim pe a_1 prin $\frac{\pi}{2} - a$

($i = 1, 2, 3, 4$)

obţinem :

$$\frac{(\operatorname{cotg}a_1\operatorname{cotg}a_3+\operatorname{cotg}a_2\operatorname{cotg}a_4)^2+\sum\operatorname{cotg}a_1\operatorname{cotg}a_2\operatorname{cotg}a_3(\operatorname{cotg}a_1+\operatorname{cotg}a_2+\operatorname{cotg}a_3)}{(\operatorname{cotg}a_1\operatorname{cotg}a_3+\operatorname{cotg}a_2\operatorname{cotg}a_4)^2-\sum\operatorname{cotg}a_1\operatorname{cotg}a_2\operatorname{cotg}a_3(\operatorname{cotg}a_1-\operatorname{cotg}a_2+\operatorname{cotg}a_3)}$$

$$=\frac{\sin(a_1+a_3)\sin(a_2+a_3)\sin(a_3+a_4)\sin(a_4+a_1)}{\sin(a_1-a_3)\sin(a_2-a_3)\sin(a_3-a_4)\sin(a_4-a_1)}.$$

(N. D. ŞTEFĂNESCU, V. FLORESCU).

b) Deci membrii I ai identităţii problemei şi ai identităţii deduse sunt egali şi cum a_1, a_2, a_3, a_4 sunt arce oarecari, există 4 numere u_1, u_2, u_3, u_4 care să reprezinte cotangentele lor şi se poate enunţa propoziţia :

Dacă

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4)=\frac{(u_1u_3+u_2u_4)^2+\Sigma u_1u_2u_3(u_1+u_2+u_3)}{(u_1u_3+u_3u_4)^2+\Sigma u_1u_2u_3(u_1-u_2+u_3)},$$

avem identitatea

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4)=F\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_4}\right).$$

(N. D. ŞTEFĂNESCU).

C. I. B.

PROBLEMA 4862. *Să se rezolve ecuaţiunea :*

$$x^3-2(a+b)x^2+(a^2+b^2+4ab)x-2b(a^2+b^2)=0$$

ştiind că între rădăcinile ei există relaţia

$$x_1x_2+ax_3=(a+b)^2.$$

C. IONESCU-BUJOR.

Relaţiile între rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei sunt :

(1) $x_1+x_2+x_3=2(a+b)$

(2) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a^2+b^2+4ab$

(3) $x_1x_2x_3=2b(a^2+b^2)$

(4) $x_1x_2+ax_3=(a+b)^2.$

Scăzând (4) din (2),

$$x_3(x_1+x_2-a)=2ab$$

şi folosind egalitatea (1), se obţine

$$x_3^2-(a+2b)x_3+2ab=0$$

ecuaţiune care dă pentru x_3 valorile a şi $2b$.

Punând $x_3 = a$ în (3) şi (4), aflăm valori diferite pentru $x_1 x_2$, ceeace exclude această valoare. Rămâne $x_3 = 2b$, (1) şi (3) devin

$$x_1 + x_2 = 2a \ , \ x_1 x_2 = a^2 + b^2 ,$$

de unde

$$x_1 = a + ib \ \ , \ x_2 = a - ib.$$

Au soluţionat problema D-nii: M. M. ANASTASIU şi N. D. ŞTEFĂNESCU (Lic. militar N. Filipescu), C. N. GAVRILESCU (Şcoala ofiţeri Sibiu), O. I. MIHALCEA (Buzău), D. D. MATEI (Iaşi), TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI (bacalaureat), F. TURTOIU (Lic. Unirea Focşani), M. AL. VASILESCU-STABU (Alba-Iulia).

C. I. B.

Soluţii bune sosite în ultimul timp dela D-ra VENERA TĂNĂSESCU şi dela D-nii: M. C. ALEXANDRESCU, ŞT. C. TILICĂ, G. N. B. IONESCU, IONESCU D. STELIAN, M. C. TONI, I. I. STAMATE, A. NADOLU, G. SILAŞ, D. I. CIOC, I. CORNĂŢEANU, G. DECIULESCU, I. G. DIACONESCU, V. L. FLORESCU, E. MODÂLCĂ, V. A. PĂDUREŢ, M. D. POPA, A. POPESCU-ZORICA, M. S. ROSENBLATT, S. R. TURCU, T. BURBEA, M. PETRESCU, P. ALEXANDRESCU.

C. IONESCU-BUJOR.

EXERCIŢII

13. Dacă $n < p$ suma

$$(-1)^n (p-n)(p-n+1)\ldots(p-1) - n!$$

se divide prin p oricare ar fi p.

G-L GH. B.

Rezultă din observaţie că

$$(p-n)(p-n+1)\ldots(p-1) = p^n + A_1 p^{n-1} + \ldots + A_{n-1} p + (-1)^n n!$$

14. Să se rezolve ecuaţia:

$$4x^6 - 8x^4 \sqrt{x} + 13x^3 - 9x\sqrt{x} + 2 = 0.$$

SUBLT. IACOB ŞT. EUGENIU.

R. Ecuaţia dată se mai poate scrie:

$$4(x^6 - 2x^4\sqrt{x} + x^3) + 9(x^3 - x\sqrt{x}) + 2 = 0$$

$$4(x^3 - x\sqrt{x})^2 + 9(x^3 - x\sqrt{x}) + 2 = 0$$

unde avem o ecuație de gr. II. în $(x^3 - x\sqrt{x})$ deci vom avea:

$$x^3 - x\sqrt{x} = \frac{9 + \sqrt{49}}{9} = \frac{-9 \pm 7}{8}.$$

Deci vom avea:

(1) $\quad x^3 - x\sqrt{x} = -2 \quad$ și $\quad x^3 - x\sqrt{x} = -\frac{1}{4} \quad$ (2)

ecuațiile (1) și (2) devin consecutiv:

$$x^3 + 2 = x\sqrt{x} \quad \therefore \quad (x^3 + 2)^2 = (x\sqrt{x})^2 \quad \therefore \quad x^6 - 3x^3 + 4 = 0$$

$$4x^3 + 1 = 4x\sqrt{x} \quad \therefore \quad (4x^3 + 1)^2 = 4x\sqrt{x} \quad \therefore \quad 16x^6 - 8x^3 + 1 = 0$$

ecuații trinome, ușor de rezolvat.

15. Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu, să se calculeze determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2 2A & \sin^2 2B & \sin^2 2C & \operatorname{cotg} 2A \\ \sin^2 2B & \sin^2 2C & \sin^2 2A & \operatorname{cotg} 2B \\ \sin^2 2C & \sin^2 2A & \sin^2 2B & \operatorname{cotg} 2C \\ \sin 4A & -\sin 4B & -\sin 4C & -2 \end{vmatrix}.$$

T. Stoicescu.

R. Voiu aduna coloanei I-a elementele coloanei II-a înmulțite cu -1, iar coloanei a III-a elementele coloanei a IV-a înmulțite cu $2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$ și voiu căpăta:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2 2A - \sin^2 2B & \sin^2 2B & \sin^2 2C + 2 \sin 2B \sin 2C \cos 2A & \operatorname{cotg} 2A \\ \sin^2 2B - \sin^2 2C & \sin^2 2C & \sin^2 2A + 2 \sin 2A \sin 2C \cos 2B & \operatorname{cotg} 2B \\ \sin^2 2C - \sin^2 2A & \sin^2 2A & \sin^2 2B + 2 \sin 2A \sin 2B \cos 2C & \operatorname{cotg} 2C \\ \sin 4A + \sin 4B & -\sin 4B & -\sin 4C - 4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C & -2 \end{vmatrix}$$

Însă între elementele triunghiului ortic există relațiile:

$$\sin^2 2A - \sin^2 2B = \sin^2 2C + 2 \sin 2B \sin 2C \cos 2A \text{ etc.}$$

căci aceste relații se mai pot scrie:

$$\sin^2 2A = \sin^2 2A + \sin^2 2C + 2 \sin 2B \sin 2C \cos 2A$$

care înmulțite cu R^2 dau:

$$4R^2 \sin^2 A \cos^2 A = 4R^2 \cos^2 B \sin^2 B + 4R^2 \sin^2 C \cos^2 C + 8R^2 \sin A \cos A \sin B \cos B \cos 2A$$

și fiindcă $a' = a \cos A$ etc. sau $a' = 2R \sin A \cos A$ voiu avea ($a' =$ lat. triunghiului ortic):

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 + 2b'c' \cos 2A = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos(\pi - 2A)$$

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos A'$$

relație fundamentală în orice triunghiu; iar

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$$

relație cunoscută, deci determinantul este **zero.**

16. Un cerc de rază variabilă cu centrul pe axa unei parabole, intersectează o ramură în punctele M şi N şi cealaltă ramură în P şi Q. Se cere locul intersecţiei dreptelor NM cu PQ şi MP cu NQ.

S.-LT. ION C. SAVIN.

R. Punctele a căror loc se caută sunt centrele cuplului de secante comune atât parabolei cât şi cercului. Ecuaţia parabolei raportată la axele de coordonate este

$$y^2 - 2px = 0,$$

iar a cercului va fi:

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - R^2 = 0.$$

Ecuaţia generală a conicelor ce trec prin intersecţia lor este

$$\lambda(y^2 - 2px) + x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - R^2 = 0$$

$$\tfrac{1}{2}f'_x \equiv x - p\lambda - a = 0$$

$$\tfrac{1}{2}f'_y \equiv (\lambda + 1)y = 0$$

$$\tfrac{1}{2}f'_z = a^2 - R^2 - ax - p\lambda x = 0.$$

Eliminând pe λ şi R între aceste 3 ecuaţii găsim că locul este:

$$x(x - a + p) = 0$$

adică axa Oy şi o dreaptă paralelă la Oy.

PROBLEME PROPUSE

4891. Putem transforma o progresiune aritmetică în alta geometrică sporindu-i toţi termenii cu aceeaşi cantitate?

I. IONESCU.

4892. Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate câte o singură dată, să se formeze un pătrat perfect divizibil prin 77.

V. THÉBAULT.

4893. Ce puteri se termină cu o cifră dată?

I. V. MĂTIEŞ.

4894. Să se găsească un număr prim P de patru cifre astfel ca $P-1$ să fie multiplu de 6 şi numerele P, $P+6$, $P+12$, $P+18$ să fie numere prime consecutive.

LT. C. IONESCU-ŢIU.

4895. Triunghiul isoscel şi triunghiul dreptunghic, sunt singurele triunghiuri, pentru care o antiparalelă la bază, este perpendiculară pe mediana respectivă.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

4896. Fie A_1, A_2, A'_1 şi A'_2 punctele unde mediana şi înălţimea vârfului A ale triunghiului ABC întâlnesc respectiv latura BC şi cercul O circumscris acestui triunghiu.

Se consideră intersecţiile $M_c(AB, CA_2)$; $M'_c(AB, CA'_2)$; $M_b(AC, BA_2)$; $M'_b(AC, BA'_2)$. Să se arate că dreptele $M_c M_b$ şi $M'_c M'_b$ se întâlnesc în A_3 pe mediatricea OA_1.

TH. G. COCEA.

4897. Printr'un punct O din planul unui triunghiu ABC se duc paralele la laturile BC, CA, AB şi se obţin astfel punctele B_a, C_a; C_b, A_b; A_c, B_c pe laturi. Se consideră intersecţiile:

$M(B_c C_a, BC)$; $M'(B_c C_b, BC)$; $M''(B_a C_b, BC)$; $N(C_a A_c, CA)$; $N'(C_b A_c, CA)$; $N''(C_a C_b, CA)$; $P(A_c B_a, AB)$; $P'(A_b B_c, AB)$; $P''(A_b B_a, AB)$.

Să se demonstreze că grupurile de puncte:

(M, N', P''); (N, P', M''); (P, M', N''); (N, P'', M')

sunt colineare.

CEZAR COŞNIŢĂ.

4898. Să se rezolve sistemul

$$x^2 - y = a \quad , \quad y^2 - z = a \quad , \quad z^2 - u = a \quad , \quad u^2 - x = a.$$

Să se generalizeze, considerând un sistem de n, ecuaţiuni de aceeaşi formă.

M. GHERMĂNESCU.

4899. a, b, c fiind laturile, iar α, β, γ unghiurile unui triunghiu, ele satisfac relaţia:

$$ab(a-b)\cos^2\frac{\gamma}{2} + bc(b-c)\cos^2\frac{\alpha}{2} + ca(c-a)\cos^2\frac{\beta}{2} = 0.$$

GH. VASILIU.

4900. Să se verifice identitatea:

$$a^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi [b \sin^4\varphi - c \cos^4\varphi] + a [b^2 \sin^6\varphi - c^2 \cos^6\varphi]$$
$$+ a^2 (b - c) \sin^4\varphi \cos^4\varphi + b^2 (c - a) \sin^4\varphi + c^2 (a - b) \cos^4\varphi$$
$$- \sin^2\varphi \cos^2\varphi [- bc (b - c) + ac (c - a) \cos^2\varphi + ab (a - b) \sin^2\varphi]$$
$$+ bc [c \cos^2\varphi - b \sin^2\varphi] = 0.$$

N. N. MIHĂILEANU.

4901. Pe o curbă plană (C) se consideră un punct M. Fie M_i punctele corespunzătoare lui M, ale *familiei de curbe tractrice*, curbei (C). 1°. *Centrele de curbură* ale curbelor tractrice în punctele M_i, se găsesc pe o conică (Γ), ce trece prin primele două centre de curbură ale curbei (C). 2°. Conica (Γ) înfăşoară desfăşurata de ordinul 1 a curbei (C). 3°. Să se construiască conica (Γ).

CĂPITAN MIHAIL I. FOCŞENEANU.

4902. Fie $r = f(\theta)$ şi $r_1 = \frac{df(\theta)}{d\theta}$ două curbe în coordonate polare. O dreaptă trecând prin pol taie curbele respectiv în M şi M_1, făcând cu tangentele duse în aceste puncte unghiurile V şi V_1. Să se stabilească relaţia:

$$\int \frac{\cos V . \sin (V_1 - V)}{\sin V_1} d\theta = V + C,$$

C fiind o constantă.

C. IONESCU-BUJOR.

ERATĂ. La redactarea problemelor 4612 şi 4661 trebuiesc aduse îndreptări: la pag. 154 la ecuaţia (3) să se scrie $7n$ în loc de $7n^0$; la formula (3') să se închidă paranteza mare de sub radical. La pag. 155, la termenul al doilea al ec. (7) să se deschidă o paranteză mică înaintea lui a_{n-1}. La formula (7') se va scrie $x_{1,n}$ în loc de $x_{1,x}$; iar sub primul radical se va pune semnul *minus* înaintea fracţiei $6/n-2$). La pag. 156 la rândul 8 de sub (4°) în loc de a_n— să se scrie a_{n-2}. La rândul 6 de sub (5°) să se înlocuiască *«cu»* prin *«de»*. In ultimul rând al paginei să se intercaleze cuvântul *«astfel»* după cuvântul „simplificând". La pag. 157, rândul 3 de sub (4°) să se scrie „Turnu-Severin" în loc de laşi.

La problema 4881, propusă la pag. 166 în numărul precedent, se înlocueşte litera q prin cifra 9 (nouă).

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăștеanu F. Marcel (4730, 814, 29, 44); *Anastasiu M. Mihail* (4868); *Apostol G. Nicolae* (4857, 68, 75); *Bărbieru Victor* (4875); *Bodnărescu M. Horia* (4844, 61); *Burghelea Cezar* (4857, 75, 77); *Buznea D. Dinu* (4829, 68, 75, 77, 86); *Călinescu Aurelian* (4613, 704, 89, 857, 64, 65); *Câmpan Fl.* (A); *Cardara-Dimitriu Gh.* (4868, 78); *Cetățeanu St.* (4855, 57, 68); *Ciupag St. A.* (4875); *Cornățeanu Aurel* (4878); *Crișan A. I.* (4886); *Deciulescu D. Gh.* (4861, 68); *Diaconescu Marcel* (4857, 68, 75); *Dogan V. Gh.* (4856); *Drăgulinescu M. N.* (4857); *Dumitrescu M. Gh.* (4875); *Enache I.* (4855); *Enescu D. Gh.* (4857); *Florescu L. Victor* (4868, 78); *Goldberg Iacob* (4717, 99, 829, 48, 78, 82); *Grigoriu N. Adrian* (4858, 65, 68, 75, 77); *Grumăzescu M. Subloc.* (4875); *Gviazdomorschi E. R.* (4856, 68, 75); *Herman Victor* (4793); *Hortopan Gh. Gr.* (4856, 57); *Ionescu B. N. Gh.* (4856, 57); *Ionescu-Doru Alex.* (4856); *Ionescu D. Stelian* (4868, 75); *Jareghie V. Ion* (4875), *Lazăr Aurel* (4856); *Lupu I. G.* (4875); *Mădaru I.* (4857); *Măinescu Z. Ioan* (4857, 68); *Mărculescu O.* (4886); *Marian N. Mingea* (4856); *Mihai C. I. Vlad* (4882); *Mihăilescu D. C.* (4857, 61); *Milu I. N.* (4877); *Mironescu Tr. Dinu* (4753); *Modâlcă I. Em.* (4886); *Nadolu T. Andrei* (4857, 61, 75); *Nedelcu V. Nic.* (4857, 68, 74, 75); *Negoiță Panait Locot.* (4829, 80, 86); *Oanță Florea* (4857, 61, 75); *Obreja Dorin* (4878); *Pantelimon Const.* (4784, 874); *Paraipan N. Const.* (4856, 68); *Pârvulescu Vladimir* (4829, 75); *Pascaru C.* (4875); *Petrescu Achille* (4824, 68); *Petrescu M.* (4856, 57, 68, 75); *Popa D. Mircea* (4761, 64, 878); *Popescu-Zorica N. Al.* (2461, 4199, 570, 753, 85, 829, 63, 64, R); *Postelnicescu C. Mircea* (4824, 27, 34, 65, 75); *Predoiescu-Țânțăreni Traian* (4829, 66, 68, 74, 75); *Rădulescu G. Oct.* (4870, 75); *Reischer L. Herman* (4844, 68, 74, 80, 82); *Ripianu Dumitru* (4814, 34, 78); *Roșculeț Marcel* (4875, 86); *Secu Adrian* (4868, 70); *Silaș George* (4861); *Silberman S. T.* (4856, 57); *Solomon I. Isac* (4856, 57, 68, 86); *Staicu I. N.* (4886); *Stamate I. Ionel* (4829, 68); *Ștefan C. Tilică* (4765, 84, 93, 844, 56, 57, 61, 64, 67, 68, 75, 86); *Stoenescu D. M.* (4856, 75); *Tătaru N. N.* (4877, 86); *Theodorescu N. Dorin* (4856, 75, 77, 86); *Țițeica I. Ilie* (4385, 461, 577, 775, 84, 820, 37, 52, 78); *Turcu R. Sandu* (4736, 53, 61, 829); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (4671, 81, 736, 869, 75, 78, 81); *Vlad I. C. Mihai Locot.* (4886).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

Colecţiunea *„Gazetei Matematice"* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia VI . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* 1926. (Epuizată).

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50
Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

C. 90997

M 2534

Biblioteca „ASTRA" — SIBIU —

0 - MAR. 2014

22

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIII

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1938

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIU

SUMARUL

1. † Nicolae G. Botea . . . . . *C. Ionescu-Bujor.*
2. O sărbătorire a D-lui A. G. Ioachimescu . . . . . *I. Ionescu, Cr. Mateescu.*
3. Aritmetica lui Gh. Asachi (urmare) *V. Cazanacli.*
4. Primele aritmetici pentru Bucovina *Victor Marian.*
5. Note Matematice: 22—26.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 273.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2035, 3279, 4447, 4482, 4586, 4597, 4789, 4820, 4856, 4857, 4875, 4882, 4886.
11. Exerciții: 17—21.
12. Probleme propuse: 4903—4914.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1938

74312

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **D. Stan**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1937 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4859, 71, 79, 85, 87, 88, 89, 90, 92, 94, 97, 98, 901, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

† NICOLAE G. BOTEA

— In memoriam —

„Ci noi, cei singuratici, murim. Şi cu noi mor toate ale noastre. Moare durerea. Moare gândul şi amintirea".

Dar cu ochii tăi mari, adânci şi blânzi, dumnezeească Clio, zână a devenirii gândului, tu priveşti crearea prin om a altei lumi, alta decât cea aspră, cea crudă, cea muritoare, ce ne-au făcut-o zeii. Cu cântec epic tu glorifici, cu cântec liric tu mângâi, pe copilul tău, cu suflet din cer şi trup din pământ, omul, şi tu blândo, povesteşti . . . ce a fost viaţa oamenilor. (V. PÂRVAN, Parentalia).

Numai gândul poate să mângâie sufletul prietenului drag, cel trecut în împărăţia liniştii. Rechem acum, acea zi cu cer îmbietor a

începutului de vară, când ultima noastră preumblare a fost în templul morţii. Nu întâlneam nici majestatea morţii, nici urîciunea, ci plăpânde urne — parfumul florilor şi frunzelor murind lângă albastrul lor — candela sfioasă, creşteau o simfonie a sfârşitului, un narcotic funebru, ce ne purta paşii într'o lume de umbre. A fost o iniţiere, o reperare a căilor morţii. Pe acestea a plecat NICOLAE BOTEA în trecutul amurg de an; dar porţile grele ale ţinuturilor liniştii s'au închis în urma sa.

Acolo unde imaginaţia noastră aşează alei umbrite de mirţi şi chiparoşi, acolo unde nu sunt suspine, cum spun cântările de

vecinică pomenire ale bisericii, se află acum doi colegi de clasă: NICOLAE BOTEA şi NICOLAE SEGÂRCEANU. De ei îmi este gândul legat acum, de ei şi de efervescenta lor clasă a liceului Cantemir-Vodă, aşa cum am văzut-o în anul 1925. De atunci am cunoscut vioiciunea minţii lui NICOLAE BOTEA, entuziasmul cu care urma chemările la sacrificiu, puterea de muncă şi activitatea în câmpul matematicilor, prietenia sa deschisă.

In liceu, corespondent strălucit al revistelor matematice din ţară, este încununat cu premii de *Gazeta Matematică, Revista Matematică din Timişoara* şi *Foaia Matematică.*

In Martie 1925, fiind elev al clasei VII, împreună cu I. FÂNTÂNEANU, fost elev al liceului Cantemir-Vodă şi cu O. BOLGIU, coleg de clasă, face să apară, sub conducerea D-lui Prof. M. GHERMĂNESCU *„Curierul Matematic"*, destinat legăturii dintre elevii începători în ale matematicelor şi studenţi. *Curierul Matematic* a apărut trei ani mai ales prin munca lui NICOLAE BOTEA şi cu un conţinut ce-l fac şi astăzi citat.

In anul 1929 apare a doua ediţie din *Culegerea de probleme de geometrie* a D-lui Profesor G. ŢIŢEICA. In prefaţa volumului, Domnia-Sa scrie referitor la «schimbările adânci» ce s'au făcut primei ediţii: *„Contribuţia cea mai întinsă şi mai preţioasă a fost dată de D-l* N. G. BOTEA, *bine cunoscut corespondenţilor Gazetei Matematice"*.

La 20 Aprilie 1932 NICOLAE BOTEA devine membru şi apoi redactor al *Gazetei Matematice,* căruia îi oferă entuziast toată puterea sa de muncă, cercetând manuscrisele corespondenţilor, publicând articole şi probleme, intrând în compunerea comisiilor pentru concursuri şi premii.

Când societatea noastră a decis publicarea unor noui ediţii ale Culegerilor de Probleme, NICOLAE BOTEA a luat asupra sa îngrijirea *Culegerii de Probleme de Geometrie Analitică* a D-lui Profesor GH. ŢIŢEICA. Este ultima sa lucrare. Realizarea ei şi-a împletit-o cu suferinţa care i-a scăzut treptat flacăra vieţii.

Bibliografia articolelor publicate de Nicolae Botea.

C. R. des séances de l'Acad. de Sciences de Paris.

1. Sur quelques équations aux dérivées partielles 1932.
2. Sur les fonctions holomorphes. 1933.

Bull. math. de la Soc. roumaine des sciences.

3. Le théorème des accroissements finis et les fonctions holomorphes. 1933.

Bull. de math. et de phys. pures et appl.

4. Sur un théorème de M. Pompeiu. 1933.
5. Une relation entre nombres complexes et la généralisation d'un théorème de géométrie élémentaire. 1937.

Bul. Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi.

6. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles. 1932.

C. R. du Congrès de l'association française pour l'Avancement des sciences.

7. Deux théorèmes sur le triangle. 1932.
8. Une propriété de réciprocité. 1933.

Mathematica.

9. Sur la généralisation d'un théorème de Lord Kelvin. 1932.

Mathesis.

10. Sur la configuration formée par deux triangles et deux points. 1933.

Revista Universitară Matematică.

11. Asupra unor determinanți. Vol. I.
12. Coordonate izotrope. Vol. I.

Gazeta Matematică.

13. Proprietăți ale triunghiului. Vol. XXXVII—VIII.
14. O generalizare a formulei lui LEIBNITZ. Vol. XLI.

Revista Matematică din Timișoara.

15. Generalizarea teoremei lui AUBERT. Vol. VI.
16. Teoreme în legătură cu 2 triunghiuri și 2 poligoane. Vol. XIII.

Foaia Matematică.

17. Asupra unor puncte colineare. Vol. II.
18. Asupra unor chestiuni de geometrie. Vol. III.
19. Asupra unor puncte colineare. Vol. III.

Curierul Matematic.

20. Asupra izopolului. Vol. I.
21. Asupra unor serii. Vol. I.
22. Câteva proprietăți într'un triunghiu. Vol. I.
23. Asupra unor ecuații cu rădăcinile reale. Vol. II.
24. Chestiuni remarcabile din geometria triunghiului. Vol. II.
25. Asupra unei teoreme a lui CARNOT. Vol. III.
26. Proprietăți în legătură cu izopolul. Vol. III.
27. Asupra unor locuri geometrice. Vol. III.
28. Teoreme din geometria triunghiului. Vol. III.

Astfel s'a materializat sufletul neliniștit al lui NICOLAE BOTEA. Dar în amurgul anului trecut, discret, șoptit s'a strâns în sine și, poate cu tristețea unor bucurii ce nu-i fusese dat să aibă în viață, a întins aripele pentru Marea și Dureroasa Tăcere. In sufletele celor ce și-au trăit anii de speranțe și iluzii lângă el, se desfășoară pânza cernită a tristeții peste un trecut de vis... *Dela Gazeta Matematică a plecat o minte rodnică, un spirit nobil.*

C. IONESCU-BUJOR.

O SĂRBĂTORIRE A D-LUI A. G. IOACHIMESCU

Din cauză că sănătatea nu-i mai permitea să suporte greutăţile cursului de Mecanică generală dela Şcoala Politecnică „Regele Carol II", D-l A. G. IOACHIMESCU a demisionat dela acea catedră pe ziua de 1 Noemvrie 1937.

Tot anul acesta a ieşit la pensie pentru limită de vârstă Profesorul de Căi ferate, D-l Inginer Inspector general GRIGORE STRATILESCU.

In scopul de a-şi manifesta sentimentele de colegialitate şi recunoştinţă pentru serviciile aduse Invăţământului tecnic superior, Corpul profesoral al Şcoalei în frunte cu Rectorul şi cu preşedinţii de Secţie au invitat pe cei doi profesori la o masă colegială în ziua de 15 Decemvrie. Cu această ocazie au ţinut cuvântări: D-l Rector, D-l D. EMMANUEL, fost profesor al celor doi sărbătoriţi, D-l C. BUŞILĂ, D-l D. POMPEIU, D-l C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politecnice dela Timişoara, D-nii I. IONESCU, D. G. GERMANI, CR. MATEESCU, GR. VASILESCU şi M. OTETELEŞIANU, preşedintele Federaţiei Societăţilor elevilor Şcoalei Politecnice.

Dăm aci cuvântările ţinute de D-nii I. IONESCU şi CR. MATEESCU pentru D-l A. G. IOACHIMESCU.

Cuvântarea D-lui I. Ionescu

Domnilor Colegi,

Comitetul de organizare a Sărbătoririi de azi a colegilor noştri onorari A. G. IOACHIMESCU şi GRIGORE STRATILESCU mi-a cerut să spun câteva cuvinte în calitatea de vechiu profesor în Invăţământul tecnic superior. Am obiectat că nu văd această necesitate, întrucât D-l Rector al Şcoalei Politecnice şi foştii elevi ai sărbătoriţilor cunosc foarte bine toată activitatea lor profesorală şi o vor expune în cuvântările pe care le vor ţine. Totuşi, după insistenţe, am cedat şi iată că iau cuvântul ca să vă povestesc unele lucruri pe care cei mai mulţi dintre D-voastră nu le cunoaşteţi. Vreau să vă vorbesc despre epoca anterioară profesoratului, pentru ca să vedeţi câte greutăţi se ivesc la introducerea elementelor de valoare în Invăţământul tecnic superior. Vă voiu spune numai cum a ajuns colegul nostru IOACHIMESCU profesor de mecanică generală, deşi am cunoştinţă şi de unele peripeţii prin care a trecut şi

numirea colegului GR. STRATILESCU ; pot să spun chiar că numirea i se datoreşte în mare parte şi stăruinţelor mele, nu pentrucă l-am recomandat pe D-sa, dar pentrucă m'am opus cu toată energia la numirea contracandidatului său.

Până în toamna anului 1908, catedra de mecanică era ocupată de GHEORGHE KIRILOV, unul dintre primii români veniţi cu licenţa în matematici dela Paris. El era profesor de 29 de ani. La moartea lui, colegul nostru IOACHIMESCU era în serviciul Monopolurilor Statului şi se găsea trimis la Xanti, în Turcia, pentru cumpărare de tutunuri. Pe lângă funcţiunea aceasta administrativă, D-sa ocupa — de 11 ani — o Conferinţă de Algebră superioară la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti, Secţiunea matematică. In convorbirile noastre dela şedinţele *Gazetei Matematice* îşi exprimase deseori dorinţa de a părăsi acea Conferinţă, imediat ce s'ar deschide o vacanţă convenabilă de o catedră la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele. Ivindu-se o asemenea ocaziune prin moartea lui KIRILOV, i-am telegrafiat la Xanthi ca să trimită o cerere Şcoalei şi mi-a răspuns prin următoarea telegramă :

„*Sunt candidat catedra mecanică. Rog comunicaţi ce demersuri trebuesc*".

Fiind informat că se caută să se rezolve repede chestiunea vacanţei catedrei de mecanică, am luat acea telegramă şi cu o cerere timbrată,— în care arătam titlurile şi lucrările colegului IOACHIMESCU,—am dat-o Directorului Şcoalei. Mi s'a spus că nu am procură ca să fac cereri pentru altul, iar petiţiunii mele nu i s'a dat nici o urmare ; ea zace şi astăzi în dosare, neînregistrată şi fără nici o apostilă! Am comunicat atunci colegului IOACHIMESCU să trimită imediat cerere telegrafică atât Şcoalei cât şi Ministerului de Lucrări Publice de care depindea Şcoala pe atunci, ceeace s'a şi făcut. Intre timp au mai venit alte cereri, cu presiunile lor respective, dintre care pentru unul din candidaţi porneau chiar dela Primul Ministru de pe atunci. Numărul candidaţilor se urcase la şase.

Pe atunci Profesorii Şcoalei se numeau de Ministru, cerând şi avizul Directorului Şcoalei. Avizul nu era conform ; cunosc chiar un caz când pentru numirea unui Profesor de chimie, Ministrul a chemat pe Director la Minister, l'a întrebat pe cine propune la catedra vacantă şi după ce acesta a propus pe unul,

Ministrul a chemat pe Secretarul General şi i-a spus să numească, de faţă cu Directorul, — pe un altul: avizul legal fusese luat! In cazul de care ne preocupăm, în raportul Direcţiunii Şcoalei, colegul nostru IOACHIMESCU era eliminat ca o cantitate infinit mică de ordin superior; calitatea sa de inginer era considerată ca neavând nicio valoare, deşi pentru candidatul propus se găsea foarte important faptul că făcuse trei ani în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele, fără să o fi terminat!

In aceste condiţiuni am crezut necesar să mă duc să lămuresc pe Ministrul VASILE MORŢUN. Eu eram pe atunci Profesor pentru aplicaţiuni de Statica grafică, de Rezistenţa Materialelor, pentru proiecte de poduri şi proiecte de instalaţiuni cu caracter industrial. Am arătat Ministrului greutăţile pe care le aveam la aceste aplicaţiuni din cauză că la cursul de mecanică elevii nu erau îndrumaţi în direcţiunea aplicaţiunilor tecnice. I-am spus că în primăvara acelui an am fost la un Congres de Matematicieni la Roma în care a fost organizată pentru prima dată şi o secţiune inginerească şi că acolo delegaţi din unele ţări au cerut ca mecanica şi chiar cursurile de matematici să se predea de ingineri, bine înţeles pregătiţi în specialitatea catedrei. Am mai spus ministrului că colegul IOACHIMESCU lasă Conferinţa sa dela Facultate, care poate fi ocupată imediat de un matematician. Ministrul mi-a spus că s'a convins de cele spuse, dar că se va mai gândi. Intrasem în luna Noemvrie, cursurile începuse dela 1 Octomvrie şi nu se hotărîse nimic: forţele în luptă îşi făceau echilibru. Se iveşte apoi o dificultate mare: Facultatea de Ştiinţe nu voia să lase pe Conferenţiarul A. IOACHIMESCU să plece de acolo! Am aci copie de pe adresa Decanatului, semnată de E. A. PANGRATI către Ministerul Cultelor şi al Instrucţiunii Publice, cu No. 80 din 27 Noemvrie 1908 pe care să-mi daţi voie să vă o citesc, căci ea constitue un elogiu pentru sărbătoritul nostru de azi:

UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI
Facultatea de Ştiinţe
No. 80
1908, Noemvrie 27

D-lui Ministru al Cultelor şi Instrucţiunii Publice

Am onoare a vă comunica mai jos dorinţa exprimată în unanimitate de Consiliul Facultăţii noastre, în şedinţa dela 22 Noemvrie curent, când am luat

cunoştinţă de adresa trimisă de D-l A. G. IOACHIMESCU, Maestru de Conferinţe, prin care anunţă că fiind numit profesor de Mecanică la Şcoala de Poduri şi Şosele, şi-a înaintat demisiunea din pos ul de Conferenţiar ce ocupă la Facultatea de Ştiinţe:

«Consiliul decide în unanimitate să se ceară Ministerului respingerea acestei demisiuni şi să roage pe D-l IOACHIMESCU *să rămână Conferenţiar. Aceasta pentrucă D-l* IOACHIMESCU *a adus în curgere de 11 ani şi aduce însemnate servicii învăţământului Facultăţii, iar pe de altă parte sunt numeroase cazuri precedente în care un bărbat de ştiinţă a ocupat la noi două catedre, pe lângă funcţiunea sa administrativă. Astfel sunt cazurile D-lui Inginer Inspector* GR. CERCHEZ, *D-lui Profesor* L. MRAZEC, *etc. Ba chiar în momentul de faţă D-l Profesor* D. POMPEIU *dela Iaşi ocupă două catedre şi un loc de Conferenţiar».*

Unesc rugămintea mea cu a Consiliului şi sper, Domnule Ministru, că veţi binevoi a respinge demisiunea D-lui A. IOACHIMESCU, care a dovedit totdeauna nu numai cunoştinţă şi pricepere profundă, dar şi cea mai deosebită silinţă pentru a face conferinţele sale şi Cursul său de Algebră superioară deosebit de folositor studenţilor noştri.

(ss) E. A. PANGRATI

Ministrul auzise de această hotărîre a Facultăţii, mă cheamă şi-mi spune că eu i-am vorbit una şi că IOACHIMESCU face alta. I-am declarat atunci pe onoarea mea că din momentul ce IOACHIMESCU va fi numit la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele, pe care ţine să o servească ca fost elev şi bursier al ei, dânsul nu va mai călca la Facultate pentru Conferinţa pe care o avea. Ministrul m'a trimis atunci să-l aduc pe IOACHIMESCU. M'am dus, l'am luat dela Fabrica de tutun Belvedere şi l'am dus la Minister. Acolo a repetat declaraţia pe care o făcusem eu Ministrului, iar acesta a dat ordin ca numirea să i se facă pe ziua de 1 Decemvrie.

Acum însă se iveşte o mică dificultate. In ziua de 1 Decemvrie programul prevedea o lecţiune de mecanică; însă în ajunul acelei zile era Sf. Andrei, ziua onomastică a colegului IOACHIMESCU. Cum să te prezinţi la un Curs, la o lecţiune de deschidere, după o zi de petrecere cu membrii familiei şi cu cunoscuţii? Să nu se ducă Luni la Curs, aceasta era o soluţiune imaginară pentru conştiinciozitatea sa de Profesor şi de om al datoriei. Cum se poate rezolva această problemă de mecanică a vieţii? Matematica nu e capabilă să dea soluţiuni la asemenea probleme. Mecanica tecnică cere însă rezolvarea cu orice preţ a unor asemenea chestiuni şi atunci colegul nostru a recurs la

experiență: a făcut în ziua de 29 Noemvrie o repetiție de ceeace era să fie a doua zi, în ziua de Sf. Andrei. A văzut cu modul acesta că a doua zi se simte bine ca să facă o lecțiune de deschidere și să înceapă cursul.

Dar seria dificultăților nu a încetat nici în ziua începerii cursurilor. De regulă, Directorul venea dimineața în sala Profesorilor înainte de începerea lecțiunilor și se întreținea cu Profesorii Școalei. De data asta nu vine. Colegul IOACHIMESCU trimite pe Secretar ca să întrebe pe Director dacă să mai aștepte, căci ar dori să fie prezentat elevilor. Directorul nu se dă jos din casă. Atunci colegul IOACHIMESCU mă cheamă la telefon la Minister, unde funcționam la Serviciul Hidraulic, îmi spune ce s'a petrecut și mă întreabă ce-l sfătuesc să facă. I-am răspuns că și eu am intrat în Școală fără agrearea Directorului și i-am zis:

„Fă-ți datoria și nu te preocupa de asemenea mărunțișuri. Intră în clasă; fă, cum mi-ai spus, elogiul fostului tău profesor și predecesor, și începe cursul".

Ai intrat atunci în clasă, iubite coleg, neprezentat de Director, dar prezentat de renumele și de reputația ta, ca fost profesor la *Școala de Telegrafie*, ca fost Conferențiar la *Universitate*, ca fost suplinitor al lui SPIRU HARET la *Școala Națională de Poduri și Șosele*; ai intrat având înainte activitatea de 13 ani la *Societatea de Științe* și la *Gazeta Matematică*, activitatea dela *Societatea Politecnică* unde erai membru de 14 ani și în Comitetul ei de 7 ani, unde apoi ai fost reales continuu timp de 37 ani. Dacă la începerea cursurilor tale nu ai fost prezentat de Director, azi la retragerea ta din Invățământul tecnic superior, ești petrecut de Rectorul Școalei și de aproape întregul corp profesoral; pleci cu mulțumirea sufletească de a-ți fi servit Școala care ți-a dat cultura tecnică și întreținerea într'însa timp de patru ani.

Să trăiești încă mulți ani în tihnă și în odihnă pentru ca să te bucuri cât mai mult timp de roadele pe care le-a dat munca pe care ai depus-o.

Eu îți mulțumesc personal pentrucă ai demonstrat că ideile mele de acum 29 ani, pentru învățământul mecanicii în Școlile tecnice nu au fost greșite și interesate, demonstrație care este întărită și prin manifestarea recunoștinței ce ți se face azi aici.

Să trăiești!

Cuvântarea D-lui Cr. Mateescu

Domnilor,

Avem astăzi prilejul fericit de a ne întâlni oameni din mai multe generaţii spre a sărbători pe doi mari dascăli şi ingineri. Omagiul meu ca şi al tuturor foştilor lor elevi se adresează astăzi amândorura. Dar hotărîndu-se ca alt coleg să vorbească în cinstea D-lui GR. STRATILESCU, eu îmi voiu exprima sentimentele mele numai în ceeace priveşte pe D-l ANDREI IOACHIMESCU.

Aşa cum l-au cunoscut cei mai mulţi din generaţia mea, l-am cunoscut pe D-l IOACHIMESCU încă din adolescenţă; era unul din profesorii noştri dela *Gazeta Matematică*, exercitând asupra noastră o acţiune dela distanţă. Era unul din îndrumătorii noştri în metoda ştiinţifică şi educatorii noştri activi. Când am intrat în Şcoala de Poduri şi Şosele, climatul nostru sufletesc era pregătit pentru a primi învăţătura marelui dascăl, cu toată râvna, cu toată pasiunea. Urmărirea cursului D-sale de Mecanică a fost hotărîtoare pentru formarea mentalităţii noastre inginereşti. Astfel, după absolvirea şcolii, când ne făceam bilanţul muncii şi al rezultatelor ei, D-l IOACHIMESCU se situa în stima noastră printre cei dintâi profesori. Am asistat la cursuri frumos expuse de unii profesori care nu erau oameni de ştiinţă, după cum am cunoscut pe alţii, adevăraţi învăţaţi, dar care-şi neglijau cursul. D-voastră, Domnule IOACHIMESCU, aţi izbutit să asociaţi ştiinţa cu pedagogia, să prezentaţi un conţinut profund într'o formă simplă şi elegantă; mai mult, aţi putut aduce din ştiinţa pură aceea ce trebue tehnicianului, fără scoborîrea rigorii, fără degradarea metodei. Datorită pe de altă parte activităţii Dv. de inginer, aţi putut menţine contactul între ştiinţă şi nevoile practice, dând îndrumări de mare folos elevilor D-stră.

Dar mintea omenească nu se mulţumeşte numai cu cunoaşterea lucrurilor mărunte, fiecare om cât de simplu, are nevoie — prin religie sau ştiinţă — să simtă legătura sa cu Universul. Dv., înţelegând acest lucru, aţi menţinut întotdeauna în mecanica tehnică pe care aţi predat-o, acel admirabil capitol de mecanică cerească, trebuincios culturii generale, sporind astfel prin frumuseţea concepţiei newtoniene râvna noastră pentru mecanica tehnică însăşi.

Dar în afară de profesorul IOACHIMESCU, omagiem astăzi şi pe omul cu suflet larg, cu vederea clară, pe înţeleptul în sensul antic al cuvântului, pe omul despre care s'a spus că este prea bun. Să nu uităm totuşi că toleranţa sa este unită cu echitatea, iar faţă de sine însuşi a fost şi este de o severitate neegalată decât de modestia sa.

De aceea, pentru pilda vie pe care ne-o hărăzeşte D-sa, recunoscători pentru ceeace a trecut din sufletul său în sufletul nostru, din mintea sa în mintea noastră, să-i urăm sănătate deplină spre a ne călăuzi şi mai departe prin pilda şi sfaturile sale înţelepte. Să trăiască încă mulţi ani !

ARITMETICA LUI GHEORGHE ASACHI

(Urmare dela pag. 123)

In §§ 74—109, pag. 68—111, Aritmetica se ocupă „*De fracţii*“ şi „*De numere complexe sau de întregi unite cu fracţii*“.

Avem o primă definiţie (§ 74): „*Cuvântul fracţie însemnează fărămătură, sau parte de un tot sau întreg. Deci, unimile ce compun pe o fracţie, sunt mai mici decât unimea, care se numeşte prinţipală sau de căpitenie, către acea care ele se alătureză. Unimile unei fracţii sunt ecvale între ele, şi, absolut socotite, au tot acele proprietăţi ca şi numerile întregi: un ban, fracţia unui leu, este către un ban, precum întregul leu este către un leu*“.

Termenii unei fracţii sunt: „*numărătoriu sau socotitoriu e numărul carile exprimează câtimea unimilor ce am. Cuvântul carele înseamnă speţia acestor unimi se chiamă numitoriu sau cvalificator; aceste două numere se chiamă şi două termene ale fracţii*“. E curioasă următoarea consideraţie (§ 75): „*Cuvintele palmă, ban, leu, dram sunt numitori; fără zminteală s'ar vorbi drept zicând am un ban de măr, spre a însemna că am luat a o sută două zecea parte de măr...*“. Dar o asemenea terminologie ar fi, evident, prea complicată, şi autorul renunţă imediat la ea.

Scrierea şi citirea fracţiilor se explică în modul obişnuit şi azi. De asemenea, şi proprietăţile fracţiilor: o fracţie se măreşte când îi înmulţim numărătorul, sau îi împărţim numitorul, se

micşorează când îi împărţim numărătorul sau îi înmulţim numitorul, nu-şi schimbă valoarea când înmulţim sau împărţim în acelaşi timp numărătorul şi numitorul cu acelaşi număr (§§ 77—79). „*Dacă numărătoriul ar fi mai mare decât celalalt termin, fracţia ar fi mai mare decât un întreg, şi încă ea ar putea cuprinde mai multe*". De aceea, se dă „*Metodul de a extrage întregi din o fracţie*". (§ 81), unde citim, între altele: „*Dacă 6 mere s'ar fi tăiet în patru bucăţi ecvale (întocma) care mere de asemenea le vom socoti ecvale între sine, atunce vom avea 24 bucăţi sau* $\frac{24}{4}$; *însă, spre a recompune merele, se vor uni numai patru bucăţi; şi precum 4 este cuprins de şese ori în 24, vom avea îndestule bucăţi spre a recompune acele şese mere*" etc.

Tot aci se spune că: „*O fracţie poate fi socotită ca cum ar reprezenta pe cătoriul a unei împărţiri neputincioase: numărătoriul ei este împărţitul, iar numitoriul împărţitoriul; aşa dar* $\frac{2}{3}$ *sunt tot aceea ce şi 2 împărţite prin 3; căci 2 nu poate cuprinde decât 2 unimi a împărţitoriului 3, sau de două ori a sa triime care este 1*". „*Prefacerea întregilor în fracţie*" se explică în modul obişnuit precum şi „*Reducerea fracţiilor la cea mai simplă expresie*". Simplificarea fracţiilor se face prin împărţiri succesive ale numărătorului cu câte un acelaşi număr. Se dau regulile de divizibilitate prin 2, 5, 3 şi 9, fiecare cu explicaţia ei, scurtă, dar foarte clară. Citez, de exemplu: „*Fieşcare număr a căruia ţifre adăogite ca nişte unimi simple ecvalează 9 sau de mai multe ori 9, se poate împărţi prin 3 şi prin 9. De exemplu, 54 se poate împărţi prin 9, pentru că 4 şi 5 a lui două ţifre fac 9. Rezonul de aceasta lesne se poate înţelege căci 54 se poate socoti ca cum ar fi compus de cinci zecimi sau cinci ori 9 plus 5, plus unimile 4; cinci ori 9 se pot împărţi prin 9, soma de 5 şi 4 unimi este împărţitoare prin 9*". In treacăt, se definesc numerele „*care nu se pot împărţi de cât prin unime; aceste numere se cheamă numere primitive; două numere sunt între sine primitive când nu pot fi împărţite unul şi altul decât numai prin unime, 12 şi 25 sunt numere de acel feliu*".

Pentru a găsi cel mai mare comun divizor a două numere avem regula (§ 84): „*In urmă, spre a se încredinţa dacă terminii*

au un împărțitoriu comun (obștesc) se cuvine a împărți pe acel mai mare prin acel mai mic; dacă această operație dă o rămășiță, să se împărțească pe împărțitoriul prin această rămășiță; de mai este încă o rămășiță, să se împărțească iarăși rămășița trecută prin aceasta de pe urmă, și așa mai departe, până se va găsi un împărțitori exact; acest de pe urmă împărțitori va fi numărul prin carile se cuvine a împărți acele două termine a fracției". Se dă și o scurtă aplicație a acestei reguli, cu ocazia simplificării fracției $\frac{16}{36}$. Cel mai mare comun divizor se numește „*acel mai mare comun împărțitoriu*". Se mai dă un exemplu: $\frac{1008}{1250} = \frac{4}{5}$. O fracție care nu se mai poate simplifica se numește „*Nereducătoare*".

Adunarea și scăderea fracțiilor (§§ 85—91) nu prezintă interes decât atunci când fracțiile n'au același numitor. De aceea cea mai mare parte a acestui Capitol (6 pagini din 8) tratează „*De reducerea fracțiilor la un singur numitoriu*". Aici (§ 90) avem regula: „*Spre a reduce două sau mai multe fracții la un singur numitoriu, să înmulțești amândouă termine a fieșcăria, dacă sunt numai două, prin numitoriul a cealalte; iar de sunt mai mult decât două, înmulțește amândouă termine a fieșcăria prin produsul numitorilor celoralante fracții, afară de a ei numitori*". Explicațiile care urmează sunt foarte amănunțite, dar nu aduc nimic nou și putem trece peste ele. Notez numai întrebuințarea cuvântului „*echivalent*" „(fracția $\frac{2}{3}$ se găsește *schimbată în* $\frac{40}{60}$, *a ei echivalentă*"). Se fac mai multe exemple: $\frac{2}{3}$ și $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ și $\frac{2}{5}; \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}$ și $\frac{5}{6}$; e clar că această metodă e mai complicată decât metoda celui mai mic comun multiplu, și, de exemplu, în ultimul caz se găsește, ca numitor comun 720, în loc de 60, cum ar trebui să fie.

„*Inmulțirea fracțiilor prin un număr întreg*" se face înmulțind numărătorul cu acel întreg, ceeace cunoaștem dela proprietățile fracțiilor. Regula pentru înmulțirea a 2 fracții nu este tocmai bine explicată, „*Spre a înmulți o fracție prin o fracție, eu închipuiesc*

mai înainte cum că fracția înmulțitoare nu are numitoriu. Fie a se înmulți $\frac{2}{5}$ *prin* $\frac{2}{3}$; *deodată nu ieu sama la numitoriu 3 a fracții înmulțitoare, și urmez ca cum aș avea* $\frac{2}{5}$ *a înmulți prin 2, care este tot atât ca și a înmulți* $\frac{2}{5}$ *prin 2 întregi. Dar acest product este de trii ori prea mare, căci nu prin 2 ci prin* $\frac{2}{3}$ *avem să înmulțesc, însă* $\frac{2}{3}$ *sunt de trii ori mai mici decât două, deci se cuvine a face fracția* $\frac{4}{5}$, *productul de* $\frac{2}{5}$ *prin 2, de trii ori mai mică, care se va căpăta, precum s'au arătat (78), înmulțind pe numitoriul ei 5, prin 3 numitoriul fracției înmulțitoare* $\frac{2}{3}$. *Din care urmează că spre a înmulți o fracție prin o fracție, se cuvine înmulți numărătoriu prin numărătoriu, și numitoriu prin numitoriu*".

La împărțire avem iarăși mai multe cazuri. O fracție se împarte prin un întreg, împărțindu-i numărătorul prin acel întreg (sau înmulțindu-i numitorul prin acel întreg) ceeace se știe dela proprietățile fracțiilor. In § 95 se dă regula pentru împărțirea unei fracții printr'o fracție și o explicație care se aseamănă cu cea dela înmulțirea fracțiilor (autorul zice: „*Spre a înțelege rezonul acestui metod, eu urmez în un chip analoghic cu acele zise (92), etc.*"). In sfârșit vine și regula pentru împărțirea unui întreg printr'o fracție, cu explicația ei. Fiecare caz este însoțit de câte un exemplu.

In §§ 97 și 98 se arată cum se preface o fracție ordinară într'o fracție zecimală și, invers, o fracție zecimală într'o fracție ordinară. Cazul 1-iu se face împărțind numărătorul prin numitor, iar despre cazul al 2-lea autorul zice, cu drept cuvânt „*Nimic nu este mai ușor decât prefacerea unei fracții zecimale în fracție ordinară*". In legătură cu ultimul caz, avem în § 99 o „*Intrebare*" : „*A unui stânjen* $\frac{2}{7}$ *câte palme, palmace și linii?*" Lucrarea este

destul de lungă, dar nu prezintă interes pentru noi. Răspunsul este 2 palme, 2 palmace, $3\frac{3}{7}$ linii. In § 100 se tratează o problemă oarecum inversă: *„Fie 3 palme, 2 palmace, 6 linii a se exprima prin o singură fracție“* Se preface numărul complex în linii (318 linii) și, de oarece stânjenul are 768 linii, urmează că avem $\frac{318}{768}$ dintr'un stânjen.

In numărul viitor ne vom ocupa de partea relativă la numerele complexe.

(Va urma). V. CAZANACLI.

PRIMELE ARITMETICI PENTRU BUCOVINA

E interesant de relevat că, față de celelalte provincii românești, pentru Bucovina cele dintâi cărți de matematici scrise în limba română apar relativ târziu, abia pe la mijlocul veacului trecut. Faptul e însă ușor de explicat. Intr'adevăr, această provincie, deși ruptă la 1775 de Moldova și alipită Austriei, a continuat relațiile culturale cu provincia-mamă, izvorul culturii românești pentru ea rămânând și mai departe Iașii. De altă parte, în puținele școli românești ce existau în Bucovina pe la sfârșitul veacului al XVIII-lea și începutul celui de al XIX-lea, nu se preda nici un fel de matematică. E evident că în astfel de condițiuni nu se simția lipsa manualelor de aritmetică. Apariția unor astfel de manuale a devenit actuală abia după 1848, când potrivit reformei învățământului primar din Austria, predarea aritmeticei deveni obligatorie și pentru școalele românești bucovinene.

Primele cărți de matematică pentru Bucovina sunt două aritmetici pentru clasele primare, traduse din limba germană de S. ANDRIEVICI și tipărite la Viena în 1850.

* * *

Cea dintâi poartă titlul: „ARITMETICĂ | . *Conducere în* | *Computăciunea (Hambacul) de rost* | *pentru* | *întâia clasă a*

şcoalelor naţionale din Bucovina | . Tradusă din limba germană | de | Parohul SAMOIL ANDRIEVICI *| . Costează nelegată 6 kr. K. M. | Viena 1850 | . La ediţiunea c. r. administraţii de cărţi şco- | lastice la St. Ana în strada lui Ioan | ".*

Pe dosul foaiei de titlu citim următorul avertisment: *In şcoalele publice sânt de a să întrebuinţa numai cărţile cele ce sânt prescrise şi însemnate cu stampa a ediţiunii cărţilor şcolastice, luând afară speţialele împuterniciri date de Ministerul cultului şi a învăţăturii, nici să nu să vândă cărţile acestea cu un preţiu mai înnalt decât e acela, care e pus pe pagina titlului".* Acest avertisment e reprodus în toate cărţile de matematici pentru şcoalele primare, apărute după 1850 la Viena.

Cărticica are formatul 8 mic, e tipărită cu litere cirilice şi cuprinde 89 pagini numerotate, iar la sfârşit, pe 3 pagini nenumerotate se află un *„Program"*, adecă tabla de materii. ANDRIEVICI a tradus această carte după *„Rechenbuch"*-ul oficial, care a fost tradus în toate limbile imperiului austriac.

E important să amintim, că această Aritmetică nu e un manual destinat elevilor, ci ea e scrisă pentru învăţători, după cum prevedea legea învăţământului primar de atunci la § 522: *„Für den Schreib und Rechenunterricht haben die Schüler keine Lehrbücher, sondern nur Lehrmittel und Uebungsbücher in Händen, an deren Faden der Lehrer den Unterricht in praktischer Weise anzuküpfen und fortzuführen hat... Das rechnen ist nicht zu weit bis in die feinen Aufgaben und Rechnungsarten zu treiben, sondern das sogenannte kopfrechnen oder eigentlich das auswendigrechnen mit Zahlen ohne Ziffern geläufig zu machen und mit der Zifferrechnung zu verbinden; mit Ziffern aber ist sich auf die vier Species in ganzen Zahlen und in Brücken zu beschränken und es hierin zur Fertigkeit zu bringen".*

Feliul în care au înţeles pedagogii de atunci să realizeze acest program desigur nu e dintre cele mai fericite şi asemănând învăţământul aritmeticei de atunci cu cel de azi din şcoalele primare, nu putem decât să ne bucurăm de progresul realizat de pedagogie în acest domeniu.

Aritmetica lui ANDRIEVICI este deci o metodică a calculului mintal bazat pe intuiţie: *„In computăciune (hambac) razimă tot lucrul întru aceea, ca să căştige lămurire închipuirii despre numeri".*

Cartea se împarte în cinci capitole. In capitolul întâiu se tratează *„dezvoltarea ideilor celor de întâe despre numeri“*. Se începe cu *„număratul“* dela 1 până la 10 după care urmează cele patru operaţiuni cu aceşti numeri şi anume: *„număratul la olaltă“*, *„înputinatul“*, *„înmulţitul“* şi *„încăputul“*, urmate de scrierea lor prin *„răspunzătoarele ţifre“*. Dau ca exemplu definiţia unităţii: *„tot lucrul pentru sâne singur socotit este* **unu** *sau o* **unătate“.** Urmează aceleaşi operaţiuni pentru numerele dela 10 până la 100 şi dela 100 până la 1000. *„Precum fac zece lucruri un* **zăciariu** *aşa să numesc o sută de lucruri o* **sută** *şi o mie de lucruri o* **mie“.** Capitolul se încheie cu observaţia: *„Număratul mai în sus de mie în acelaş chip se face... Fiind că acest feliu de numeri în vieaţa de toate zilele foarte rar se întrebuinţează, şi de se şi întâmplă* **computăciunea de rost** *nu se poate face cu dânsele, pentru aceea vor fi spre îndestulare cele ce sau petrecut până aici“.*

La începutul capitolului al doilea, care se ocupă de *„feliuritele computăciuni de rost“* un tablou cuprinde *„cele mai cumpenitoare şi mai întrebuinţate* **măsure, monete,** *şi* **cumpene“** folosite în Bucovina. Dau aici lista lor, deoarece ea conţine date preţioase pentru studiul măsurilor şi al greutăţilor din acele vremi, din Bucovina. Lăsând deoparte *„Timpometria“*, adecă măsurarea timpului, iată lista măsurilor şi monetelor mai uzitate:

2. *Lungometrie.*

1 stânjân (⁰) are 6 picioare (′),
1 picior „ 12 degete (″),
1 deget „ 12 linii (‴),
1 bucată (de pânză ori postav) are 30 de coţi,
1 cot are 4 pătrari.

3. *Găvănometrie.*

Pentru pâne.

1 ţuhal are 15 coreţe,
1 coreţ „ 4 pătrarie,
1 pătrariu „ 8 miertice.

Pentru băutură.

1 bereu (aimer) are 4 vedre,
1 vadră are parte 10 ocă, parte 12 ocă,
1 ocă are 4 litre.

4. *Monete.*

1 fiorin (lei) are 60 cruciari,
1 „ „ „ 20 groşiţe,
1 groşiţă „ 3 cruciari,
1 cruciari „ 4 şălăi.

5. *Cumpene.*

1 majă are 100 fonţi,
1 font „ 32 de loţi,
1 lot „ 4 cvinte.

6. *Lucruri numărabile.*

1 vălătuc de hârtie are 10 legături,
1 legătură „ „ 20 de conţuri,
1 conţ de scris „ „ 24 de coale,
1 conţ de tipariu „ „ 25 „ „
1 legătură de pene „ „ 25 de bucăţi.

Acest capitol cuprinde o mulţime de probleme luate din viaţa practică cu privire la: *„adnumăratul“*, *„înpuţinatul“*, *„înmulţitul“*, *„încăputul“* şi *„împărţitul numerilor“*. E curioasă distincţiunea ce se face între *„încăputul numerilor“*, sub care se înţelege împărţirea obişnuită şi *„împărţitul numerilor“*, care înseamnă împărţirea în părţi egale, adecă *„jumătatea, a treia parte, a patra parte“*... Deasemenea se vorbeşte în această carte, aşa de curioasă în ce priveşte terminologia, de *„doitele, treitele, pătritele... feliuriţilor numeri“*.

Şcolarii *„trebue ca să înveţe temeinic aşa numitul* **odatunul“;** deasemenea şi **„unul în unul** *să-l deprindă copii prin simţualizare* (înfăţoşiare) *în următoarele probleme“*. Acest *„unul în unul“* este tabla împărţirii numerelor dela 1 la 100 prin numerele dela 1 la 10, adecă inversul tablei înmulţirii.

La sfârşitul capitolului aflăm *„prefacerea părţilor de fiorin în fiorin“*. Dau un exemplu: *„Câţi fiorini fac 20 de orţi? — 1 ort*

este a patra parte din 1 fr., deci 20 orți a patra parte din 20 fr., așa dară 5 fr.". Alte exemple cu *douăzăciari, (sorocovăți), doisprăzeciari, zăciari (grivne), șesari, cinciari, treiari (groșițe), cruciari,* completează seria acestor exemple.

Capitolul al treilea conține „*Computăciunea sumei unei multite din suma unătății celei de un feliu*". Aflăm aici exemple simple de feliul celui următor: „*Un cibotariu vinde 50 de părechi de cibote căte 4 fr. 48 cr. cât iea el pentru toate? — 240 fr.*".

„*Aflarea folosinței* **computului**" formează obiectul capitolului al patrălea. Chestiunile tratate aici sunt de genul următor: „*Este de aflat o folosință, ca după prețul unui bereu să se socotească prețul pentru o ocă*".

Capitolul al cincilea se ocupă cu „*Computarea cametelor*". La început se dau următoarele definiții: „*In viața soțială se întâmplă adese ori, că se împrumută oarecui bani (parale). Pentru întrebuințarea acestor bani, trebue pe an oare ce să se plătească. Deci aceea ce se plătește împrumutătoriului pentru întrebuințarea unor bani se numește camătă sau* **Interese**; *iară banii cea împrumutați se numesc* **capital.**

„*La împrumutare se hotărește totdeauna câtă camătă să se plătească pe an dela 100 fr. și aceasta camătă se numește* **Procent**". Exemple simple, deși nepotrivite pentru clasa întâi primară, asupra calculului intereselor încheie capitolul.

La sfârșitul cărții se mai află un *Adaus*, care cuprinde „*Prefacerea monetelor convenționale, sau de argint în valuta Vienei seau în bani de aramă, și întors*", chestiune desigur de mare importanță în viața zilnică pe atunci.

(Va urma). VICTOR MARIAN.

NOTE MATEMATICE

22. *Redacționale.* După ce se culeseseră soluțiile la problemele 4665 și 4713, s'au mai primit câteva soluțiuni bune și anume: la problema 4665 dela D-nii: C. GAVRILESCU (Șc. de Ofițeri București), VICTOR FLORESCU (Liceul Militar Târgoviște) și G. POPOVICIU (elev inginer); la problema 4713 dela D-nii: M. AMĂRĂȘTEANU și EUG. MARCOVICI (studenți).

P. S.

23. *Asupra problemei No. 609 din* **„Boletin Matematico“** *Ano X, No. 6.*

Se cere să se arate că expresiunea:

$$N = 5^{2n+1} + 3^2 . 2^{n+1}(1 + 18^{n-1}) - 13^n$$

este multiplu de 46.

Iată o soluţie simplă:

$$N = 5 . 25^n + 18 . 2^n + 36^n - 13^n .$$

Divizibilitatea cu *2* este evidentă, primul şi ultimul termen fiind impari, ceilalţi pari.

Divizibilitatea cu *23.*

$$N = 5 . (M23 + 2)^n + (M23 - 5) . 2^n + (M23 + 13)^n - 13^n$$
$$= M23 + 5 . 2^n - 5 . 2^n + 13^n - 13^n = M23 .$$

Acest raţionament ne permite să arătăm că expresiunea:

$$A . (B + a)^n + (B - A) . a^n + (B + b)^n - b^n$$

este divizibilă cu 2B dacă A, B şi *b* sunt de aceeaşi paritate.

Altă observaţie este că expresiunea din problema *609* se divide exact cu *92.* In adevăr, divizibilitatea cu 23 o cunoaştem. Divizibilitatea cu 4 este:

$$N = (M4 + 1)(M4 + 1)^n + (M4 + 2) . 2^n + M4 - (M4 + 1)^n$$
$$= M4 + 1 + 2^{n+1} - 1 = M4$$

dacă $n \geqslant 1$.

MAIOR I. LINTEŞ.

24. *Asupra problemei 3974.*

Observăm că această problemă stabileşte proporţionalitatea dintre segmentele OB_m, OC_m şi segmentele determinate pe înălţimile BB_h, CC_h de laturile unghiurilor sub care se vede din C_h şi B_h segmentul A_mA_h, A_m, B_m, C_m şi A_h, B_h, C_h fiind picioarele medianelor şi înălţimilor triunghiului ABC, iar O centrul cercului circumscris.

Ţinând seamă de această observare, putem enunţa problema următoare:

Fie A_m, B_m, C_m şi A_h, B_h, C_h picioarele medianelor şi înălţimilor triunghiului ABC şi A', B', C' picioarelor bisectoarelor triunghiului său ortic.

Fie de asemenea punctele

$$A_b \equiv (AA_h\,,\ B_mC_h)\,,\ A_c \equiv (AA_h\,,\ C_mB_h)\,,$$
$$B_c \equiv (BB_h\,,\ C_mA_h)\,,\ B_a \equiv (BB_h\,,\ A_mC_h)\,,$$
$$C_a \equiv (CC_h\,,\ A_mB_h)\,,\ C_b \equiv (CC_h\,,\ B_mA_h)\,.$$

Să se stabilească relaţiunea

$$\frac{\overline{A'A_b}}{\overline{A'A_c}} \cdot \frac{\overline{B'B_c}}{\overline{B'B_a}} \cdot \frac{\overline{C'C_a}}{\overline{C'C_b}} = 1\,.$$

Demonstraţia este simplă, având în vedere observarea de mai sus.

A. DOBRESCU
Buzău.

25. *Asupra problemei 3977 G. M.*

1°. *O dreaptă* Δ, *taie laturele unui triunghiu* ABC *în* α, β, γ, *Cevienele* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *întâlnesc laturele triunghiului complimentar* $A_1B_1C_1$ *în* α', β', γ' *pe o dreaptă* Δ', *complimentară reciprocei* $\Delta'' = \alpha''\beta''\gamma''$ *a transversalei* Δ.

In adevăr, din cauza fascicolelor formate în vârful A şi centrul de greutate G,

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{\alpha' C_1}{\alpha' B_1} = \frac{\alpha'' C}{\alpha'' B}$$

pe de altă parte $G\alpha'' = 2G\alpha'$,... deci Δ' şi Δ'' sunt omotetice de centru G, raport 1 : 2.

De ex.: *a)* Dacă Δ este dreapta LEMOINE a triunghiului — uneşte picioarele tangentelor în vârfuri, pe latură, — Δ', reciproca ei, este dreapta LONGCHAMPS şi complimentara ei, Δ'', dreapta L' a triunghiului complimentar, este axul ortic al triunghiului de referinţă. Se obţine propoziţia D-lui CEZAR COŞNIŢĂ, G. M. XL. 224 şi 400: *mijloacele simedianelor exterioare sunt pe axul ortic.*

b) *Paralelele din* B *şi* C *la laturele opuse întâlnesc cercul circumscris triunghiului* ABC *în* B' şi C'. *Reciproca dreptei* B'C' *taie latura* BC *în* α; $A\alpha$ *trece prin intersecţia laturei triunghiului ortic şi a triunghiului complimentar, corespunzătoare vârfului* A.

c) Pentru dreptele Δ'' trecând prin G, $\Delta' = \Delta''$ deci: *O tangentă* Δ *a elipsei lui* STEINER *înscrise, taie laturele în* α, β, γ'

$A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *întâlnesc laturele triunghiului complimentar pe reciproca dreptei* Δ.

2^0. Δ' *este reciproca în raport cu triunghiul complimentar, a complimentarei* $\Delta''' = \alpha''' \beta''' \gamma'''$ *a dreptei* Δ.

In adevăr

$$\frac{\alpha'''B_1}{\alpha'''C_1} = \frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{\alpha' C_1}{\alpha' B_1}.$$

3^0. *Dacă* ω *şi* ω' *sunt polii dreptelor* Δ, Δ', ω' *este reciprocul anticomplimentului lui* ω.

Deci dacă ω este punctul LEMOINE K, reciprocul anticomplimentarului este ortocentrul H. Se regăseşte problema 3977.

Dacă ω este centrul cercului înscris I, anticomplimentarul lui este punctul NAGEL şi reciprocul acestuia din urmă, punctul GERGONNE. Se obţine: *mijloacele bisectoarelor exterioare se află pe axa de omologie a triunghiului de referinţă cu a triunghiului contactelor cercului înscris pe latură.*

N. N. MIHĂILEANU.

26. *Asupra unei metode de cuadratură aproximativă.* Fiind date două funcţiuni de x, $u(x)$, $v(x)$ verificând condiţia lui LIPSCHITZ

$$| u(x') - u(x'') | \leqslant A | x' - x'' |$$
$$| v(x') - v(x'') | \leqslant B | x' - x'' |$$

suma, unde $U(x)$, $V(x)$ primitive de a lui $u(x)$ şi $v(x)$:

$$\frac{n}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \left[U\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) - U\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right) \right] \left[V\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) - V\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right) \right]$$

reprezintă integrala [1])

$$\int_a^b U(x)\, v(x)\, dx$$

1) Vezi M. PICONE. Lezioni di analizi infinitezimale. Volume Primo. parte seconda p. 570.

cu o aproximaţie mai mică decât

$$\frac{AB\,(b-a)^3}{12\,.\,n^2}\,.$$

Să presupunem mai general că $u(x)$, $v(x)$ verifică condiţiile lui LIPSCHITZ.

$$(1)\qquad \begin{aligned} &|\,u(x')-u(x'')\,| \leqslant A\,|\,x'-x''\,|^{\lambda} \\ &|\,v(x)'-v(x'')\,| \leqslant B\,|\,x'-x''\,|^{\mu} \end{aligned}$$

$\lambda < 0$, $\mu > 0$. Fie integrala dublă

$$D(h)=\int_{\alpha}^{\alpha+h}\int_{\alpha}^{\alpha+h}(u(x)-u(y))\,(v(x)-v(y))\,dxdy \qquad \begin{matrix} a \leqslant \alpha \leqslant b \\ a \leqslant \alpha+h \leqslant b. \end{matrix}$$

Avem imediat în virtutea condiţiilor (1)

$$D(h) \leqslant A\,.\,B\int_{\alpha}^{\alpha+h}\int_{\alpha}^{\alpha+h}|\,x-y\,|^{\lambda+\mu}\,dxdy.$$

Această din urmă integrală se mai scrie şi

$$2\int_{\alpha}^{\alpha+h}dx\int_{\alpha}^{x}(x-y)^{\lambda+\mu}\,dy$$

şi valoarea ei este

$$\frac{2}{(\lambda+\mu+1)\,(\lambda+\mu+2)}\,h^{\lambda+\mu+2}.$$

Dar avem

$$D(h)=2h\int_{\alpha}^{\alpha+h}u(x)\,v(x)\,dx-2\int_{\alpha}^{\alpha+h}u(x)\,dx\int_{\alpha}^{\alpha+h}v(y)\,dy$$

deci

$$\left| \int_{\alpha}^{\alpha+h} u(x)\, v(x)\, dx - \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} u(x)\, dx \int_{\alpha}^{\alpha+h} v(x)\, dx \right| \leqslant \frac{A \,.\, B h^{\lambda+\mu+1}}{(\lambda+\mu+1)\,(\lambda+\mu+2)} \,.$$

Considerând acum

$$I = \int_{a}^{b} u\,(x)\, v\,(x)\, dx = \sum_{i=1}^{h} \int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} U \,.\, V. dx$$

expresiunea

$$I' = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{b-a} \int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} U dx \,.\, \int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} V dx$$

$$= \frac{n}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \left[U\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) - U\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right) \right.$$

$$\left. \left[V\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) - V\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right) \right] \right]$$

reprezintă pe I cu o aproximaţie de

$$| I - I' | = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} U \,.\, v dx - \int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} v dx \;.\; \int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} V dx \right) \right|$$

$$\leqslant \frac{A \,.\, B\,(b-a)^{\lambda+\mu+1}}{(\lambda+\mu+1)\,(\lambda+\mu+2)\, n^{\lambda+\mu}} \,.$$

Metoda este deci aplicabilă ori cărei funcţiuni $f\,(x)$ integrabilă care se poate descompune într'un produs de două funcţiuni continue $u\,(x)$, $v\,(x)$ verificând condiţiile LIPSCHITZ (1).

T. POPOVICIU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ «REGELE CAROL II». BUCUREŞTI

Concurs de Admitere în Ciclul I

(15 Septemvrie — 5 Octomvrie 1937)

I. ALGEBRA SUPERIOARĂ

1°. Să se studieze variaţia funcţiunei:

$$y = e^{\frac{x}{x^2 - 5x + 4}}$$

şi să se reprezinte grafic această variaţie.

2°. Să se discute ecuaţia:

$$F(\theta) = \sin 6\theta + \sin 4\theta + 3\sin 2\theta + 2\lambda \sin\theta = 0$$

când parametrul λ variază, luând ca necunoscută pe $\cos\theta = x$.

3°. Să se afle cu două zecimale exacte coordonatele α şi β ale punctului M de pe curba $y = \sin x$, care se găseşte la distanţa cea mai mică de punctul A (0, 2).

II. GEOMETRIE ANALITICĂ

Axele fiind rectangulare, se consideră curba de gradul doi:

$$\lambda(y^2 - x^2) + (1 - \lambda^0)\,xy - (1 + \lambda^2)\,y = 0$$

şi se cere:

1° genul curbei;

2° să se arate că curba trece prin origine;

3° că, în origine, axa Ox este tangentă la curbă;

4° să se determine asimptotele;

5° să se afle locul geometric al centrului curbei, când variază parametrul λ.

III. GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ ŞI COMPLEMENTE DE GEOMETRIE

1. Se va executa o epură de Geometrie Descriptivă, în tuş, tratând următoarele:

Se dă: *un cilindru:* curba directoare este un cerc, de centru O_1 şi de rază R_1, aşezat în planul orizontal de proiecţiune; generatoarele sunt paralele cu planul vertical de proiecţiune şi fac cu planul orizontal un unghiu φ;

un con: curba directoare este un cerc, de centru O_2 şi de rază R_2, aşezat în planul orizontal de proiecţiune; vârful este în punctul V.

Se cere:

a) să se ducă prin punctul V un plan $P \alpha P'$ care să fie paralel cu generatoarele cilindrului şi ale cărui urme să facă în epură un unghiu θ;

b) să se deseneze curba de intersecţiune a celor două corpuri presupuse pline şi opace, cu punctele ei remarcabile (punctele de pe conturele aparente ale celor două corpuri şi punctele ei de cotă maximă şi minimă);

c) să se deseneze tangenta la curba de intersecţie în punctul de cotă h, care are depărtarea cea mai mare.

Date numerice:

$$O_1(110, 100, 0) \; ; \; R_1 = 30 \qquad \varphi = 60^0$$

$$O_2(200, 130, 0) \; ; \; R_2 = 60 \; ; \; V(140, 35, 160)$$

$$\theta = 105^0 \qquad h = 60.$$

Cilindrul se presupune mărginit între planele orizontale de cotă 0 şi 125.

Conul se presupune mărginit între planul orizontal de proiecţiune şi vârf,

Linia pământului OX este paralelă cu latura mică a cadrului, la distanţa 220 de latura de sus.

Origina O a sistemului de referinţă este pe latura stângă a cadrului.

Cadrul epurei este 270/450, iar foaia de desemn se va tăia lăsându-se o margină de 30 mm în jurul cadrului.

Punctele sunt date prin trei coordonate: primul număr este abscisa, al doilea depărtarea, al treilea cota.

Toate lungimile sunt date în mm.

Datele problemei se trasează cu tuş negru, rezultatele cu tuş albastru, liniile de construcţie cu tuş roşu şi liniile de ordine cu tuş negru foarte diluat sau în creion. Liniile nevăzute se trasează punctat.

Se va anexa o legendă explicativă.

2. Se dă un unghiu $xoy = 60^0$ şi se cere:

a) să se determine în interiorul acestui unghiu un punct A. astfel ca raportul distanţelor lui la Ox şi Oy să fie egal cu $\frac{1}{2}$, iar $OA = 3$;

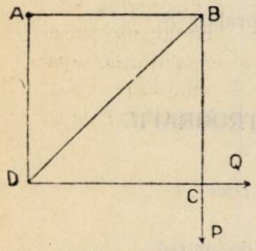
b) prin A să se construiască o dreaptă, care să formeze cu laturile unghiului xoy un triunghiu isoscel BOC;

c) să se construiască un cerc tangent la laturile unghiului xoy şi care să treacă prin A;

d) să se calculeze unghiul solid care ia naştere prin rotirea unghiului xoy în jurul bisectoarei sale OZ. Construcţiunile dela *a, b, c,* se vor face pe hârtie simplă însă cu ajutorul instrumentelor, dându-se şi explicaţiunile necesare.

IV. MECANICA

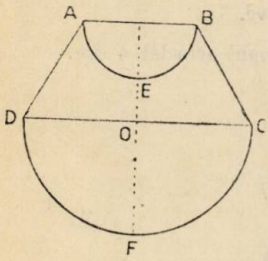
1. Se dă, într'un plan vertical, un sistem de 5 bare articulate de greutăţi neglijabile,



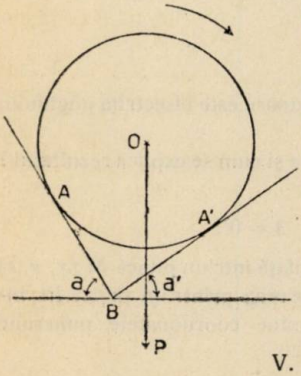
$$AB = BC = CD = DA = a$$

şi bara BD, AB şi CD orizontale, BC şi DA verticale. Sistemul precedent e articulat în A şi simplu rezemat în D. In C sunt aplicate forţa verticală P şi forţa orizontală Q ($P > Q$). Se cer: *a)* reacţiunile din A şi D; *b)* tensiunile în bare.

2. Se consideră o jumătate de exagon regulat de latură *r*, ABCOD; pe AB şi CD ca diametre se descriu câte o jumătate de cerc, AEB şi CFD. (E în interiorul exagonului, concavităţile celor două jumătăţi de cerc au acelaşi sens). Să se găsească centrul de greutate al arii plane AEBCFDA.



3. Se dă, într'un plan vertical, un disc circular, omogen O, de greutate P şi rază *r*. Discul se reazimă pe două plane înclinate BA şi BA', făcând cu orizontul unghiurile α şi α'. In afară de greutatea lui, discul e supus şi la un cuplu de moment $\mathfrak{M}$, a cărei axă e proiectată în O. Să se determine $\mathfrak{M}$, astfel ca discul să se afle în starea de echilibru limit, ţinând seama şi de frecările de alunecare dintre disc şi plane. Coeficienţii de frecare f şi f', la care corespund unghiurile de frecare φ şi φ'. Caz particular $\varphi = \varphi'$, $\alpha = \alpha'$.



V. CHIMIE GENERALĂ

1. Se dă substanţa naturală numită sare gemă şi se cere să se arate:

a) ce produse de mare importanţă industrială se pot obţine din această substanţă;

b) care sunt procedeele sau reacţiunile chimice pe care le întrebuinţăm pentru obţinerea acestor produse şi

c) să se descrie aceste produse.

2. Despre glucoză (stabilirea formulei spaţiale, preparare, întrebuinţări).

VI. FIZICA

Acustica

1. Caustica în cazul oglinzilor sferice concave.
2. Metode calorimetrice bazate pe fenomenul răcirii.
3. Forţa totală exercitată de un lichid pe o suprafaţă S.
4. Fenomene prezentate de tuburi capilare.

VII. GEOLOGIE, MINERALOGIE ŞI PETROGRAFIE

1. Sulfatul de calciu în natură (ca minerale şi roce).
2. Roce silicioase organogene.
3. Condiţiunile necesare formării zăcămintelor de petrol.
4. Cauza şistozităţii rocelor metamorfice.
5. Produsele de dezagregare ale rocelor eruptive.

Toate chestiunile obligatorii. Timpul acordat 4 ore.

ANUL I

(Sesiunea Septemvrie 1937)

GEOMETRIE ANALITICĂ

Construcţii

1. Să se determine curbele la care raza vectoare este bisectriţa unghiului format de tangentă cu normala la curbă.

Care este ecuaţia curbei în coordonate polare şi cum se explică rezultatul ?

2. Se consideră suprafaţa de ecuaţie:

$$x^2 + y^2 + 2xz - 4y - 2z + 3 = 0 .$$

Să se scrie ecuaţia planului tangent la suprafaţă într'un punct M (x, y, z) al ei; să se arate că planul tangent trece întotdeauna printr'un punct fix independent de poziţia punctului M. Să se determine coordonatele punctului fix şi să se explice rezultatul.

ELECTROMECANICĂ

1. Se consideră curba de ecuaţie:

$$x^2y - y^3 - 2x^2 = 0$$

şi se cere să se determine cele 3 asimptote ale ei şi apoi să se calculeze aria triunghiului format de aceste asimptote.

2. Se consideră suprafaţa de ecuaţie:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 1 = 0$$

Să se scrie ecuaţia planului tangent la suprafaţă într'un punct oarecare $M(x, y, z)$ al ei; să se arate că există o direcţie fixă cu care planul tangent rămâne paralel, independent de punctul M.

Să se determine această direcţie şi să se explice rezultatul.

MINE

1. O parabolă cubică de forma:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

este determinată de următoarele condiţii:

α) Trece prin origină;

β) admite punctul $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{16}{27}\right)$ ca punct de inflexiune;

γ) tangenta în acest din urmă punct la curbă are coeficientul unghiular $-\frac{4}{3}$.

Se cere să se stabilească ecuaţia curbei şi apoi să se reprezinte.

2. Se consideră suprafaţa:

$$x = u + v$$

$$y = u^2 + v^2$$

$$z = uv$$

şi se cere să se reprezinte intersecţia suprafeţei cu planul $z = 1$.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXIV. Fascicola IV. Octomvrie 1937. Buenos-Aires. Sistemele de inecuaţii lineare şi aplicaţiile lor la studiul corpurilor convexe (continuare) de F. LA MENZA.

Idem. Fascicola V. Noemvrie 1937. Buenos-Aires. Fundamentele matematice ale muzicii (continuare) de A. E. SAGASTUME BERRA.

Boletin Matematico. Anul XI. Nr. 7. Noemvrie 1937. Buenos-Aires. Asupra triunghiurilor pitagorice de R. NOGUERA.

Idem. Nr. 8. Noemvrie 1937. Buenos-Aires.

Buletinul Institutului Român pentru Betoane, Construcţii şi Drumuri. Anul II. Nr. 10—12. Octomvrie—Decemvrie 1937. Bucureşti.

Buletinul „I. R. E.“. Anul V. Nr. 3. Septemvrie 1937. Bucureşti.

Bulletin of the Mathematical Society. Vol. XLIII. Nr. 11. Noemvrie. 1937. Menasha.

Buletinul Societăţii Politecnice din România. Anul. LI. Nr. 10. Octomvrie 1937. Bucureşti. Actualităţi în construcţia podurilor metalice de CRISTEA NICULESCU. Congresul internaţional de încercări de materiale. Londra 1937 de C. C. TEODORESCU.

Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara. Tom. 6. Fascicola 1—2. Timişoara 1935.

Idem. Tome 6. Fascicola 3—4. Timişoara 1936.

Idem. Tome 7. Fascicola 1—2. Timişoara 1937.

Journal des mathématiques élémentaires. Publicat de H. VUIBERT. Anul 62. Nr. 5. Paris. 1 Decemvrie 1937.

Idem. Anul 62. Nr. 6. 15 Decemvrie 1937.

Mathesis. Tom. LI. Nr. 9. Noemvrie 1937. Asupra centrelor de curbură ale unei conice de L. MEURICE. Note de geometrie infinitesimală asupra inversiunii triunghiurilor de R. GOORMAGHTIGH. Asupra geometriei tetraedrului de P. DELENS. Cercuri şi sfere asociate triunghiului şi tetraedrului de V. THÉBAULT.

Pitagora. Revistă de matematici. Anul III. Nr. 3. Colegiul naţional „Carol I“ Craiova. 15 Decemvrie 1937. Propoziţiuni în legătură cu un sistem de puncte conjugate pe laturile triunghiului de N. N. MIHĂILEANU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVII. Nr. 10. 15 Decemvrie 1937. Asupra unei însumări de E. VIŞA.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi“. Vol. XXIII. Nr. 3. Iulie-Septemvrie 1937. Iaşi.

Sphinx, revue mensuelle de questions récréatives. Anul VII. Nr. 1. Ianuarie 1938. Bruxelles.

The Mathematical Gazette. Vol. XXI. Nr. 243. Mai 1937.

Idem. Vol. XXI. Nr. 247. Decemvrie 1937. London.

C. BUDEANU. *Quelques considérations sur les espaces supérieurs* Bucureşti 1937.

LT.-C-DOR INGINER I. LINTEŞ. *Sintetizarea progreselor aviaţiei.* (Extras din Revista Aeronauticei şi Marinei. Anul XI. Decemvrie 1937).

GH. POPESCU-BOTOŞANI, Inginer. *Primul motor de aviaţie românesc.* (Conferinţă ţinută la 11 Februarie 1936, la Societatea Politecnică din România).

P. SERGESCU. *La vie contemporaine des Mathématiques.* (Extrasă din *Revue de l'Université de Bruxelles).* Bruxelles 1937.

P. SERGESCU. *Remarques pratiques sur l'intégration de certaines équations différentielles linéaires.* (Extras din *Revista de Ciencias* scoasă de *Universidar Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Biologicas, Fisicas y Matematicas).* Lima-Peru 1937.

P. SERGESCU. *Le développement des sciences mathématiques en Roumanie.* (Extras din *«La vie scientifique en Roumanie: I. Sciences pures).* Bucureşti 1937.

CERERI

273. In ce scrieri vechi româneşti se vorbeşte de folosinţa abacelor de calcul?

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

Focoasele Mecanice de LT. ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE şi S-LT. G. LUIGI. Timişoara 1935.

Donată de D-l CĂPITAN ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE.

Proiectilele Automotoare de LT. I. N. GEORGESCU-VAL. şi LT. ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE. (Extras din Revista Artileriei 1935).

Donată de D-l CĂPITAN ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE.

Revista Matematică din Timişoara Volumul I. Anul 1921 — 1922.

Donată de D-l COLONEL GH. LITEANU.

TEOPHILE VESCAN. *Une formule de la réfraction astronomique deduite de la forme parabolique du trajet lumineux.* (Extras din Bulletin Scientifique de l'Ecole Politechnique de Timişoara 1935).

Donată de autor.

THEOFILO VESCAN. *Consideraciones Sobre la Mecanica vectorial y relativiste de los medios deformables.* (Extras din Boletin Matematico Septemvrie 1936).

Donată de autor.

Amenajarea căderilor de apă din basinul superior al râului Ialomiţa Căderea Dobreşti, de I. ŞTEFĂNESCU-RADU şi P. CARTIANU. Bucureşti 1935. I. R. E.

Sistemele de unităţi de măsură cu coherenţă dimensională de E. BODEA. Bucureşti 1934. I. R. E. Nr. 18.

Le problème du dimensionnement des grandeurs électriques et magnétiques de PL. ANDRONESCU.
Bucureşti 1935. I. R. E. Nr. 26.

Accidents causés par les installations a basse tension de CEZAR PARTENI ANTONI. Bucureşti 1935. I. R. E. Nr. 27.

Questions des grandeurs et unitès électromagnetiques. Deuxieme Note de C. I. BUDEANU. Bucureşti 1935. I. R. E. Nr. 28.

Quelques précisions sur la signification phisiques des grandeurs electriques et magnètiques de I. CONSTANTINESCU. Bucureşti 1935. I. R. E. Nr. 29.

Cohérence dimensionnelle des systèmes d'unités de E. BODEA. Bucureşti 1935. I. R. E. Nr. 30.

Considérations sur la problème du dimensionnements des grandeurs electrique et magnétiques de PL. ANDRONESCU. Bucureşti 1935. I. R. E. Nr. 31.
Donate de Institutul Român de Energie.

H. POINCARÉ. L'avenir des mathématiques. Roma 1908.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

. . . Fără erori de calcul! Craiova.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2035. *Să se arate că*

$$n!(p-n-1)!+(-1)^n = Mp$$

când p *e număr prim şi* $n<p$.

G. THIERRIN.

Inmulţim suma S din membrul I cu produsul

$$P=(p-n)(p-n+1)\ldots(p-1)$$

după care adăugând şi scăzând $n!$ se obţine

$$(1)\qquad PS = n!\,[(p-1)!+1]+[(-1)^n P - n!].$$

Când p este prim, prima paranteză din membrul II al lui (1) se divide prin p conform teoremei lui WILSON, iar a doua paranteză se divide prin p, ori care ar fi p, conform exercițiului 13 dela pag. 220 din acest an al G. M. Rezultă că produsul PS se divide prin p și cum

$$P = \sum_{0}^{n-1} A_i \, p^{n-i} + (-1)^n \, n! = Mp + (-1)^n \, n!$$

iar $p > n$ și prim cu n urmează că P este prim cu p, care conform cu (1) divide neapărat pe S ceeace demonstrează teorema.

In ordinea cronologică a anilor în care s'au primit soluțiunile la această problemă, ea a fost rezolvată de D-nii:

C. ALINESCU, A. HAMBURGER, D. LITEANU, O. MAYER, A. PANTAZI A. TIMOTIN, G. C. TULEA, GH. ZAPAN și GR. ZAPAN în 1913/14.

R. BELIAN, ST. GHIOLU, GH. ISTRATI și I. LINTEȘ în 1914/15.

M. DAVIDESCU, ȘT. NICULESCU și L. TEODORIU în 1915/16.

C-TIN I. GEORGESCU în 1923/24.

I. C. I. ISTINIE-BREZUICA și P. I. GHIȘOIU în 1927/28.

G-L GH. B.

PROBLEMA 3279. *Să se găsească valorile lui* x *care satisfac deodată inegalitățile*

$$x^4 + 2x^2 - 4x - 1 > 0$$
$$x^3 + x + 1 > 0.$$

TH. ANGHELUȚĂ.

Au rezolvat problema D-nii: LEON CĂLDĂRARU și G. G. CONSTANTINESCU.

Soluție. Ecuația

$$P(x) = x^4 + 2x^2 - 4x - 1 = 0,$$

are numai două rădăcini reale, care sunt de semne contrare. In adevăr ecuația derivată

$$x^3 + x - 1 = 0$$

are o singură rădăcină reală căci derivata ei are rădăcinile imaginare Prin urmare inegalitatea

(1) $$x^4 + 2x^2 - 4x - 1 > 0$$

este satisfăcută pentru $x < a$, sau $x > b$; a este rădăcina negativă a lui $P(x)$, iar b cea pozitivă.

Ecuația

$$Q(x) = x^3 + x + 1 = 0,$$

are o singură rădăcină reală c, negativă, căci ecuația derivată

$$3x^2 + 1 = 0$$

are rădăcinile imaginare.

Inegalitatea

$$x^3 + x + 1 > 0 \tag{2}$$

este deci satisfăcută pentru $x > c$.

Ne rămâne să determinăm situația lui c față de a, fără să fie nevoie de valorile lor apropiate. Observăm atât, că a și c sunt între zero și -1. Din identitatea

$$P(x) = x.Q(x) + x^2 - 5x + 1,$$

deducem

$$P(c) = c^2 - 5c + 1.$$

Iar din identitatea

$$Q(x) = (x^2 - 5x + 1)(x + 5) + 27x + 6,$$

găsim

$$P(c) = -3\frac{9c + 2}{c + 5}. \tag{3}$$

In identitățile de mai sus recunoaștem operația căutării *c. m. m. d. c* dintre $P(x)$ și $Q(x)$, făcută până obținem un rest de gradul întâi în x. Avem deci o cale generală pentru rezolvarea problemelor de natura celei propuse.

Soluția $-\frac{2}{9}$ a ecuației

$$9x + 2 = 0$$

introdusă în $Q(x)$ ne dă un număr pozitiv

$$Q\left(-\frac{2}{9}\right) > 0$$

prin urmare deducem din (2)

$$c < -\frac{2}{9}.$$

Din (3) rezultă atunci

$$P(c)>0$$

căci

$$c+5>0.$$

Din (1) rezultă

$$c<a<b.$$

Concluzia. Inegalităţile propuse au soluţiile

$$c<x<a$$

sau

$$x>b.$$

Lasăm pe seama celor cari doresc, construcţia curbelor

$$y=x^4+2x^2-4x-1 \quad , \quad y=x^3+x+1 .$$

Se obţine astfel o reprezintare geometrică a discuţiei de mai sus. Se pot calcula cu aproximaţie rădăcinile reale ale polinoamelor $P(x)$ şi $O(x)$.

D-l CĂLDĂRARU a procedat aşa. Iar D-l CONSTANTINESCU obişnueşte soluţii grăbite cari nu pot fi de nici un folos.

PROBLEMA 4447. *Să se elimine* x, y, z *din următoarele trei ecuaţiuni:*

$$\frac{\sqrt{x-y}}{x-y}+\frac{\sqrt{x-z}}{x-z}=A, \quad \frac{\sqrt{y-z}}{y-z}+\frac{\sqrt{y-x}}{y-x}=B,$$

$$\frac{\sqrt{z-x}}{z-x}+\frac{\sqrt{z-y}}{z-y}=C.$$

Să se generalizeze.

GH. VASILIU.

Dacă notăm spre simplificare cu

$$(1) \quad X=\frac{\sqrt{x-y}}{x-y}, \quad Y=\frac{\sqrt{y-z}}{y-z} \text{ şi } Z=\frac{\sqrt{z-x}}{z-x}$$

sistemul propus devine:

$$X-iZ=A, \quad Y-iX=B, \quad Z-iY=C.$$

In fine înmulțim prima ecuație cu i, o adunăm cu ultima, iar rezultatul îl adunăm cu ecuația a doua; procedând prin rotație analog cu ecuația a 2-a și apoi cu a 3-a, obținem:

$$X = \frac{A+B+iC}{1-i}, \quad Y = \frac{iA+B+C}{1-i} \quad \text{și} \quad Z = \frac{A+iB+C}{1-i}.$$

Relațiile (1) ridicate la patrat și inversate ne dau:

$$x-y = \frac{1}{X^2}, \quad y-z = \frac{1}{Y^2}, \quad z-x = \frac{1}{Z^2}$$

și adunate:

$$\frac{1}{(A+B+iC)^2} + \frac{1}{(iA+B+C)^2} + \frac{1}{(A+iB+C)^2} = 0$$

care este eliminantul sistemului de ecuații propuse.

Forma generală a sistemului propus este:

$$\sum_{k=1\ldots}^{n} \frac{\sqrt{x_0 - x_k}}{x_0 - x_k} = A_1, \quad \sum_{k=0,2\ldots}^{n} \frac{\sqrt{x_1 - x_k}}{x_1 - x_k} = A_2, \quad \sum_{k=0\,1,3\ldots}^{n} \frac{\sqrt{x_2 - x_k}}{x_2 - x_k} = A_3 \ldots$$

$$\sum_{k=0.1\ldots(n-1)} \frac{\sqrt{x_n - x_k}}{x_n - x_k} = A_{n-1},$$

eliminantul obținându-se pe o cale analoagă și fiind egal cu:

$$\frac{1}{(A_1 + A_2 + \ldots + iA_n)^2} + \frac{1}{(A_1 + A_2 + \ldots + iA_{n-1} + A_n)^2} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{(A_1 + iA_2 + \ldots + A_n)^2} + \frac{1}{(iA_1 + A_2 + \ldots + A_n)^2} = 0.$$

La această problemă s'au primit 5 soluții toate greșite. Soluțiile D-lor IOAN I. BUZINCU (lic. milit. Iași) și PETRE P. COJOCARU după ce că sunt greșite sunt și copiate una după alta.

D-nul NĂSTASE MARIN (elev clasa VI-a lic. militar M-rea Dealului) împarte ecuațiile 2 câte 2 și apoi le înmulțește găsind că «deoarece $1 = 1$ problema este astfel rezolvată, deoarece s'au eliminat necunoscutele». (? !).

GH. V.

PROBLEMA 4482. *Să se găsească condițiile pentruca ecuația*

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{x-a}+\frac{\beta}{x-b}+\frac{\gamma}{x-c}=0.$$

Să aibă rădăcinile reale; a, b, c, α, β, γ *sunt numere reale. Să se studieze apoi situația rădăcinilor față de numerele* a, b, c.

TH. ANGHELUȚĂ.

Au rezolvat problema D-nii: G. G. CONSTANTINESCU și GRIG. MARTEȘ (Școala Navală).

Soluție Putem presupune numerele *a, b, c* diferite între ele și α, β, γ diferite de zero căci altfel ecuația (1) se reduce la o ecuație de gradul întâi, cel mult. De asemenea nu restrângem generalitatea, discuției dacă presupunem

$$(2) \qquad a<b<c,$$

căci aceasta revine să schimbăm termenii primei părți ai ecuației (1) între ei.

Discuția ecuației (1) revine la aceea a ecuației

$$(3)\ P(x)=(\alpha+\beta+\gamma)x^2-[\alpha(b+c)+\beta(c+a)+\gamma(a+b)]x + \alpha bc+\beta ca+\gamma ab=0.$$

Numărul α poate fi socotit arbitrar, căci n'avem decât să înmulțim ambele părți ale ecuației (1) cu un parametru real oarecare diferit de zero.

Pentru ca ecuația (2) să aibă rădăcinile reale trebue ca inegalitatea

$$[\alpha(b+c)+\beta(c+a)+\gamma(a+b)]^2-4(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha bc+\beta ca+\gamma ab)>0,$$

să fie satisfăcută pentru orice valoare a lui α, deoarece am presupus α arbitrar. Inegalitatea se mai poate scrie

$$\alpha^2(b-c)^2+\beta^2(c-a)^2+\gamma^2(a-b)^2+2\beta\gamma(a-c)(a-b) + 2\alpha\gamma(b-a)(b-c)+2\alpha\beta(c-a)(c-b)>0.$$

Acest trinom de gradul al doilea prin raport cu α fiind pozitiv oricare ar fi α trebue să avem satisfăcută inegalitatea

$$[\beta(c-a)(c-b)+\gamma(b-a)(b-c)]^2-(b-c)[\beta^2(c-a)^2+\gamma^2(a-b)^2 + 2\beta\gamma(a-b)(a-c)]<0,$$

făcând simplificările obţinem

$$d = 4\beta\gamma(b-c)^2(a-b)(c-a) < 0.$$

In virtutea inegalităţilor (2) trebue deci să avem

$$\beta\gamma > 0.$$

Concluzie. *Pentru ca ecuaţia* (1) *să aibă rădăcinile reale trebue ca* β *şi* γ *să fie de acelaşi semn, având însă grijă de a aranja termenii ecuaţiei astfel ca inegalităţile* (2) *să fie satisfăcute.*

Pentru a determina situaţia rădăcinilor ecuaţiei (1) faţă de a, b, c să calculăm $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$. Obţinem astfel

$$P(a)=\alpha(a-b)(a-c),\ P(b)=\beta(b-a)(b-c),\ P(c)=\gamma(c-a)(c-b).$$

De unde deducem

$$P(b).P(c) = \frac{d}{4} < 0.$$

O rădăcină a ecuaţiei (1) *este deci între b şi c.*

Pentru a determina situaţia rădăcinii a doua putem presupune $\alpha > 0$. Avem atunci două cazuri:

1. $\beta > 0$ a doua rădăcină este între a şi b căci avem

$$P(a) > 0 \quad , \quad P(b) < 0.$$

2. $\beta < 0$ a doua rădăcină este superioară lui c dacă $\alpha+\beta+\gamma > 0$ căci atunci avem

$$P(c) < 0 \quad , \quad P(+\infty) > 0;$$

dacă $\alpha+\beta+\gamma < 0$ a doua rădăcină este inferioară lui a căci avem atunci

$$P(a) > 0 \quad , \quad P(-\infty) < 0.$$

PROBLEMA 4586. *Intre unghiurile unui triunghiu, avem relaţiile:*

$$(1-8\cos A\cos B\cos C)^2 = \{8\cos B\cos C - \sin(B-C)[1-2\cos 2A]\}^2 + \{\sin(B-C)[1+2\cos 2A]\}^2.$$

$$(1+8\cos A\sin B\sin C)^2 = \{8\sin B\sin C - \cos(B-C)[1-2\cos 2A]\}^2 + \{\sin(B-C)[1+2\cos 2A]\}^2.$$

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie. Se observă mai întâi că:

$$\sin^2(B-C)[1+2\cos 2A]^2+\cos^2(B-C)[1-2\cos 2A]^2$$
$$=1+4\cos^2 2A-4\cos 2A\cos 2(B-C)=1-8\cos 2A\sin 2B\sin 2C$$
$$=1-32\cos 2A\cos B\cos C\sin B\sin C.$$

Atunci partea a doua a primei relaţii devine:

$$64\cos^2 B\cos^2 C-16\cos B\cos C\cos(B-C)[1-2\cos 2A]$$
$$+1-32\cos 2A\cos B\cos C\sin B\sin C=1+16\cos B\cos C[4\cos B\cos C$$
$$-\cos(B-C)+2\cos 2A\cos(B-C)-2\cos 2A\sin B\sin C]$$
$$=1+16\cos B\cos C[2\cos B\cos C+\cos(B+C)+2\cos 2A\cos B\cos C]$$
$$=1+16\cos B\cos C[-\cos A+2(1+\cos 2A)\cos B\cos C]$$
$$=1+16\cos B\cos C[-\cos A+4\cos^2 A\cos B\cos C]$$
$$=1-16\cos A\cos B\cos C+64\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C$$
$$=(1-8\cos A\cos B\cos C)^2.$$

Analog pentru relaţia a doua:

$$64\sin^2 B\sin^2 C-16\sin B\sin C\cos(B-C)[1-2\cos 2A]$$
$$+1-32\cos 2A\cos B\cos C\sin B\sin C$$
$$=1+16\sin B\sin C[4\sin B\sin C-\cos(B-C)$$
$$+2\cos 2A\cos(B-C)-2\cos 2A\cos B\cos C]$$
$$=1+16\sin B\sin C[2\sin B\sin C-\cos(B+C)+2\cos 2A\sin B\sin C]$$
$$=1+16\sin B\sin C[\cos A+2(1+\cos 2A)\sin B\sin C]$$
$$=1+16\sin B\sin C[\cos A+4\cos^2 A\sin B\sin C]$$
$$=1+16\cos A\sin B\sin C+64\cos^2 A\sin^2 B\sin^2 C$$
$$=(1+8\cos A\sin B\sin C)^2.$$

Bune soluţii, au dat D-nii: MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU (Craiova), VICTOR L. FLORESCU (lic. militar Mânăstirea Dealu), S-lt. MIRCEA GRUMĂZESCU (Iaşi) şi ALEXANDRU POPESCU-ZORICA (Bucureşti).

Observaţii. 1) Relaţia a doua se obţine din prima, înlocuind A, B, C prin 180^0+A, $B-90^0$, $C-90^0$— transformare permisă căci suma rămâne 180^0.

(V. FLORESCU).

2) Se poate de asemenea ajunge la relaţia a doua, după ce prima s'a verificat, scăzându-le parte din parte:

$$(1 - 8\cos A\cos B\cos C)^2 - (1 + 8\cos A\sin B\sin C)^2$$
$$= -16\cos A\cos(B-C)(1+4\cos^2 A)$$

şi $\{8\cos B\cos C - \cos(B-C)[1-2\cos 2A]\}^2$
$$-\{8\sin B\sin C - \cos(B-C)[1-2\cos 2A)\}^2$$
$$= 8\cos(B+C)\cdot\{8\cos(B-C) - \cos(B-C)[2-4(2\cos^2 A - 12]\}$$
$$= -16\cos A\cos(B-C)(1+4\cos^2 A).$$

(V. FLORESCU).

3) Problema 4586 transformă în câmpul triunghiului ortic, identităţile

$$\sin^2 AI\,0_9 + \cos^2 AI\,0_9 = 1 \quad \text{şi} \quad \sin^2 AI_a\,0_9 + \cos^2 AI_a\,0_9 = 1 -$$

exprimate prin formule trigonometrice — unde A, I, I_a, 0_9 sunt: un vârf şi centrele cercurilor înscrise, exînscrise, al celor 9 puncte.

[G. M., XXXIX—127].

4) S'a mai primit o soluţie dela un corespondent, care ajungând la un rezultat cam complicat, continuă: *efectuând înmulţirile şi simplificările, găsim...* (şi scrie rezultatul de a dreptul). Evident că nu s'a considerat decât soluţiile în care erau făcute toate calculele.

5) În fine, doi foarte harnici şi apropiaţi corespondenţi, în soluţii identice pretind ca, procedând ca la observaţia 2) să verifice ambele relaţii; şi după calcule enorme, identic eronate, ajung totuşi la rezultat!

PROBLEMA 4597. *Se dă expresiunea:*

$$E_1 = \left(\sqrt{x^y}\right)^y.$$

Înlocuindu-se x *prin* y *şi* y *prin* x *se obţine o a doua expresiune* E_2; *ştiind că* $x < y$, *care dintre cele două expresiuni va fi mai mare?*

MAIOR I. LINTEŞ.

Expresiunile problemei sunt:

$$E_1 = x^{\frac{y^2}{x}} \quad \text{şi} \quad E_2 = y^{\frac{x^2}{y}}$$

unde $y > x$.

Notând $\frac{y}{x} = \alpha$ putem scrie:

$$E_1 = x^{\alpha y} \quad \text{şi} \quad E_2 = y^{\frac{x}{\alpha}}.$$

A doua expresiune se mai poate scrie:

$$E_2^{\alpha^3} = y^{\alpha^2 x} = y^{\alpha y} = (\alpha . x)^{\alpha y} = \alpha^{\alpha y} . E_1 .$$

Prin urmare:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_2^{\alpha^3 - 1}}{\alpha y} = \frac{y^{\alpha y - \frac{x}{\alpha}}}{\alpha^{\alpha y}} = \left[\frac{x^{\alpha^3 - 1}}{\alpha}\right]^{\frac{x}{\alpha}}.$$

In consecinţă, dacă $\frac{x}{\alpha} > 0$ şi $x > \alpha^{\frac{1}{\alpha^3 - 1}}$ atunci avem $E_1 > E_2$;

de asemenea dacă $\frac{x}{\alpha} < 0$ şi $x < \alpha^{\frac{1}{\alpha^3 - 1}}$ atunci $E_1 > E_2$.

In toate celelalte cazuri avem $E_1 < E_2$.

Notă. Dintre toate soluţiunile primite, numai soluţia D-lui N. ROŞCULEŢ (Călăraşi) este de menţionat, D-sa găsind condiţia $x > e$.

I. L.

PROBLEMA 4789. *Fie a, b, α, β patru numere oarecare. Se formează triunghiul dreptunghic* ABC, *cu ipotenuza* BC, *astfel că:*

$$\overline{AB} = a\alpha - b\beta \quad , \quad \overline{AC} = a\beta + b\alpha .$$

Se construeşte apoi triunghiul ABC, *vârful* D *fiind în afara triunghiului* ABC, *astfel că:*

$$\overline{BD} = a\beta - b\alpha \quad , \quad \overline{CD} = a\alpha + b\beta .$$

Să se demonstreze relaţia:

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (a^2 - b^2)(\alpha^2 + \beta^2) .$$

GH. DUMITRESCU.

Considerăm identitatea:

(1) $\qquad (A + Bi)(A - Bi) = A^2 + B^2 \quad (i = \sqrt{-1}) .$

Fie a, b, α, β patru numere reale şi produsul:

$$P = (a + bi)(a - bi)(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i).$$

In baza identităţii (1), putem scrie:

$$(2) \qquad P = (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2).$$

Produsul fiind comutativ, putem scrie mai departe:

$$P = [(a + bi)(\alpha + \beta i)][(a - bi)(\alpha - \beta i)]$$

$$P = [(a\alpha - b\beta) + (a\beta + b\alpha)i][(a\alpha - b\beta - (a\beta + b\alpha)i].$$

$$(3) \qquad P = (a\alpha - b\beta)^2 + (\alpha\beta + b\alpha)^2.$$

Apoi:

$$P = [(a + bi)(\alpha - \beta i)][(a - bi)(\alpha + \beta i)]$$

$$P = [(a\alpha + b\beta) + (a\beta - b\alpha)i][(a\alpha + b\beta) - (a\beta - b\alpha)i].$$

$$(4) \qquad P = (a\alpha + b\beta)^2 + (a\beta - b\alpha)^2.$$

Din observarea identităţilor (2), (3), (4) deducem:

$$(5) \qquad (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (a\alpha + b\beta)^2 + (a\beta - b\alpha)^2$$

$$(6) \qquad (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (a\beta + b\alpha)^2 + (a\alpha - b\beta)^2.$$

Identitatea (5) este foarte cunoscută, ea fiind un caz particular al identităţii lui LAGRANGE, pentru $c = 0$ şi $\gamma = 0$.

Cred că prezintă însă interes modul în care a fost obţinută în cele de mai sus, folosind proprietatea produsului P de a fi comutativ.

In acest mod s'a obţinut şi identitatea (6).

Să considerăm triunghiul ABC din problemă. Avem:

$$\overline{BC}^2 = (a\alpha - b\beta)^2 + (a\beta + b\alpha)^2.$$

In baza identităţii (6) putem scrie:

$$(7) \qquad \overline{BC}^2 = (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2).$$

In identitatea (5), înlocuind cantitatea din membrul întâi prin $\overline{BC}^2$ şi pe cele din membrul al doilea respectiv prin $\overline{CD}^2$ şi $\overline{BD}^2$, obţinem:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2.$$

Din această egalitate rezultă că triunghiul BDC este dreptunghic.

Aşa dar patrulaterul ABDC este inscriptibil.

Conform teoremei lui PTOLOMEU, avem:

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Se obţine:

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (a\alpha - b\beta)(a\alpha + b\beta) + (a\beta + b\alpha)(a\beta - b\alpha)$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 = a^2(\alpha^2 + \beta^2) - b^2(\alpha^2 + \beta^2$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (a^2 - b^2)(\alpha^2 + \beta^2).$$

Observarea I. In patrulaterul din problemă, raportul diagonalelor este independent de α şi β.

In adevăr, se ştie că, notând în patrulaterul inscriptibi ABCD:

$$\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c, \overline{AD} = d \text{ şi cu } p$$

semiperimetrul, există relaţia:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Pentru patrulaterul din problemă se obţine:

$$(1) \qquad \frac{AD}{BC} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Observarea II. Unghiurile patrulaterului sunt independente de α şi β.

Este evident că trebue să considerăm doar unghiurile B, C.

Cu notaţiunile dela observarea I, se ştie că există relaţia:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}.$$

In baza ei, putem scrie pentru patrulaterul dat:

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Deoarece

$$B + C = \pi, \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \operatorname{cot}\frac{B}{2}.$$

Deci:

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Relaţiile (2), (3) arată că unghiurile B, C sunt independente de α şi β.

Observarea III. Între diagonale există relaţia:

$$\overline{AD} = \overline{BC} \sin B . \tag{4}$$

Se ştie că notând $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = t$, $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$.

Deci:

$$\sin B = \frac{2\operatorname{tg} \frac{B}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}} .$$

Ţinând seamă de relaţia (2), obţinem:

$$\sin B = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} . \tag{5}$$

Relaţiile (1) şi (5) conduc numai decât la relaţia (4).

Au rezolvat bine problema, fără a stabili şi fără a utiliza identităţile (5) şi (6), Domnii:

MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU, D-RA CORNELIA COMLOŞAN, S. CRĂCIUN, STELIAN CETĂŢEANU, AURELIAN CĂLINESCU, AUREL CORNĂŢEANU, PAUL DOBRESCU, ADOLF DEUTSCH, VICTOR FLORESCU, MOSES GOTH, VICTOR HERMAN, IOAN V. JAREGHIE, B. LASCU, N. N. MIHALCEA, EUGEN MARCOVICI, GH. MUREŞEANU, DUMITRU D. MATEI, MIRCEA A. NEGREA, BENONE PETRESCU, CONSTANTIN V. PANTELIMON, ACHILLE PETRESCU, MIRCEA D. POPA, SUBLT. I. PAREPEANU, AL. POPESCU-ZORICA, OCTAVIAN RĂDULESCU, MARCEL ROŞCULEŢ, GH. A. RUMICI, DUMITRU RIPIANU, IOAN STREDER, NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU, DORIN THEODORESCU, ILIE IOAN ŢIŢEICA, M. AL. VASILESCU-STABU şi LOCOT. M. VLAD.

Observarea IV. D-l AL. N. POPESCU-ZORICA a rezolvat şi trigonometriceşte problema. A calculat pe $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \sqrt{(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2)} . \tag{1}$$

Apoi:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\,\overline{AC} \cdot \overline{CD} \cos\widehat{ACD} . \tag{2}$$

După ce observă că $\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD}$ şi efectuează cu multă atenţie şi îndemânare o serie de calcule, obţine:

$$\cos\widehat{ACD} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Inlocuind această valoare în (2), obţine:

$$(3) \qquad \overline{AD} = (a^2 - b^2)\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2 + b^2}}.$$

Din (1) şi (3) se obţine relaţia din enunţ.

Soluţia este redijată cu foarte multă îngrijire şi într'o atât de frumoasă, încât poate servi ca exemplu.

Observarea V. D-nii: IOAN N. V. JAREGHIE, VICTOR HERMAN, MIRCEA NEGREA, MIRCEA POPA şi NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU au arătat că există relaţia:

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (a^2 + b^2)(\alpha^2 - \beta^2),$$

când punctele A, D sunt de aceeaşi parte a dreptei $\overline{BC}$.

GH. D.

PROBLEMA 4820. *Produsul a două numere* a *şi* b *este 864. Să se afle aceste numere ştiind că în şirul*

$$b,\ 2b,\ 3b,\ldots,\ (a-1)b,\ ab$$

se găsesc 12 multipli ai numărului a.

P. SERGESCU.

Soluţie dată de D-ra SONIA TUDORAN (Şc. Centrală, Bucureşti) şi de D-nii: V. ANDRIESCU, G. G. CONSTANTINESCU, VICTOR FLORESCU, S-LT. M. GRUMĂZESCU, V. HERMAN, S-LT. A. PANĂ, G. A. RUMICI, TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI, ACHILE PETRESCU, M. D. POPA (Lic. Militar Iaşi), OCT. RĂDULESCU (Lic. Militar M. Filipescu).

Fie Δ *c.m.m.c.d.* al lui *a* şi *b*. Se ştie că *c.m.m.c.m.* este $\frac{ab}{\Delta}$ şi că orice multiplu comun al lui *a* şi *b* e de forma

$\frac{ab}{\Delta} \times k$ (k întreg). Numerele din şirul dat sunt evident multipli de b; deci numerele din acest şir care sunt şi multipli de a sunt de forma $b \times \frac{a}{\Delta} \times k$, unde k ia toate valorile întregi 1, 2,... până la valoarea k_0, care corespunde celui mai mare multiplu de a din şir ab. Prin urmare k_0 e determinat de $\frac{a}{\Delta} \times k_0 = a$, sau $k_0 = \Delta$. Enunţul problemei ne precizează deci că $c.m.m.c.d$ al numerelor a şi b este 12 şi suntem reduşi la problema cunoscută a găsirii a două numere, cunoscând produsul lor şi $c.m.m.c.d.$ al lor.

Avem:

$$\Delta = 12 \qquad a = 12a' \qquad b = 12b'$$

unde a' şi b' sunt prime între ele. Produsul devine

$$144a'b' = 864 \qquad a'b' = 6.$$

Rezultă deci patru soluţii, din care numai două sunt esenţial distincte

$a' = 1, b' = 6$; $a' = 2, b' = 3$; $a' = 3, b' = 2$; $a' = 6, b' = 1$

adică:

$a = 12, b = 72$; $a = 24, b = 36$; $a = 36, b = 24$; $a = 72, b = 12$.

PROBLEMA 4856. *Să se găsească numărul de patru cifre de forma* abcd, *care adunat cu cele 5 numere consecutive următoare lui, să ne dea un număr de cinci cifre de forma* aascd, *unde cifra* s *este egală cu* $b - c$.

COLONEL G. I. LITEANU.

Fie $N = 1000a + 100b + 10c + d$, numărul căutat. Conform enunţului avem:

$$11000a + 100b - 90c + d = 6000a + 600b + 60c + 6d + 15$$

$$\therefore \quad 5000a = 500b + 150c + 5d + 15$$

sau

$$(1) \qquad 1000a = 100b + 30c + d + 3,$$

condiţie, care ne impune $d + 3 = M10$; deci $d = 7$.

Relaţie (1) devine

(2) $$100a = 10b + 3c + 1.$$

Luând valori maxime pentru b şi c, adică valoarea 9, rezultă, că nu putem avea

$$a > 1.$$

Deci $a = 1$, iar relaţia (2) devine

$$99 = 10b + 3c$$

care ne dă imediat

$$b = 9 \quad \text{şi} \quad c = 3.$$

Deci

$$N = 1937.$$

VENERA V. TĂNĂSESCU
(Bucureşti).

Relaţia (2) impune

$$3c + 1 = M10;$$

deci $c = 3$.

şi ajungem la condiţia

$$10a = b + 1$$

adică $b + 1 = M10$; de unde

$$b = 9 \text{ şi deci } a = 1.$$

Prin urmare, numărul căutat este:

$$N = 1937.$$

MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU
(elev-ing. Student-Bucureşti).

Soluţii foarte bune s'au mai primit dela D-nii: MATEI DUMITRU (bacalaureat, Iaşi), TR. PREDOIESCU ŢÂNŢĂRENI (Bucureşti), TH. PRECIADO, F. GOLDBERG, A. ŞAICHIM, T. SILBERMAN (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. M. Viteazul, Alba Iulia), I. STĂNCULESCU (Lic. Sp. Haret, Bucureşti), GH. B. N. IONESCU (Lic. Ploeşti), A. LAZĂR (Lic. militar Chişinău), GH. BOVGAN, M. PETRESCU, GVIAZDAMORSCHI şi PARAIPAN (Lic. militar Cernăuţi), L. BOIAN, I. ENACHE, GR. HORTOPAN, MARIAN MINCU şi IONESCU-DAN-AL. (Lic. militar, Tg. Mureş), V. FLORESCU, N. D. ŞTEFĂNESCU, D. N. THEODORESCU (Lic. militar, Mânăstirea Dealu), M. D. POPA (Lic. militar Iaşi), H. REISCHER, M. ROSENBLATT-ROTH, I. SOLOMON (Lic. Internat, Iaşi), ST. CETĂŢEANU (Lic. Şincai, Bucureşti), OCT. MIHALCEA (Buzău), ST. C. TILICĂ (Lic. Trajan, T.-Severin), M. ROŞCULEŢ, A. CORNĂŢEANU.

In ultimul timp au trimis soluţii Domnii: AL. A. GHEORGHIU, EM. S. MODÂLCĂ, V. C. ATANASIU.

PROBLEMA 4857. *Să se găsească două numere întregi ştiind că diferenţa între ele este egală cu 2 şi egală cu diferenţa între cubul unuia şi patratul celuilalt.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: ŞT. C. TILICĂ (Lic. „Traian", Turnu-Severin), N. D. ŞTEFĂNESCU (Lic. „N. Filipescu", Târgovişte), M. S. ROSENBLATT (Lic. „C. Negruţi", Iaşi) şi H. M. BODNĂRESCU (Lic. „T. Maiorescu", Bucureşti).

Fie $x+2$ şi x două numere întregi care răspund enunţului. Ele trebue să mai satisfacă una din ecuaţiile

$$(x+2)^2 - x^3 = 2 \quad , \quad (x+2)^3 - x^2 = 2$$

$$x^3 - (x+2)^2 = 2 \quad , \quad x^2 - (x+2)^3 = 2$$

sau

$$(1)\ x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0 \ ; \ (2)\ x^3 + 5x^2 + 12x + 6 = 0$$

$$(3)\ x^3 - x^2 - 4x - 6 = 0 \ ; \ (3)\ x^3 + 5x^2 + 12x + 10 = 0.$$

Incercând în fiecare ecuaţie divizorii pozitivi şi negativi ai termenului independent se găseşte că numai ecuaţiile (1) şi (3) admit rădăcini întregi şi anume:

Ecuaţiunea (1) admite rădăcina întreagă: (— 1).

Ecuaţiunea (3) admite rădăcina întreagă: 3.

De aici rezultă că numerele cerute sunt:

$$(1, -1) \quad \text{cu} \quad 1 - (-1) = 1^2 - (-1)^3 = 2$$

$$(3,5) \quad \text{cu} \quad 5 - 3 = 3^3 - 5^2 = 2.$$

Observaţiuni. 1°. Au examinat numai cazurile (2) şi (3) şi au găsit soluţiile (3, 5) D-nii: M. DIACONESCU (Lic. „N. Filipescu", Târgovişte); G. I. PAPARIZU (Lic. militar Craiova); ACHILE PETRESCU (Lic. militar Iaşi) şi T. S. SILBERMAN (Lic. „Matei Basarab", Bucureşti).

2°. Au examinat numai cazul parţial (3) D-şoara VENERA V. TĂNĂSESCU (Bucureşti) şi D-nii: S-LT M. GRUMĂZESCU; LOCOT. M. C. I. VLAD (Cluj); A. CĂLINESCU (Tg.-Mureş); S-LT ADRIAN POPESCU (Rgt. 7 Art. Grea); TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI; A. I. CORNĂŢEANU; I. STREDER (Cl. 8-a); OCT. I. MIHALCEA (Buzău); M. N. ROŞCULEŢ; F. TURTOIU (Lic. Unirea, Focşani); M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. „Mihai Viteazul", Alba Iulia); T. I. PRECIADO, I. GOLDBERG, A. O. ŞAICHIM (Lic. „Matei Basarab", Bucureşti); H. L. REISCHER, I. I. SOLOMON (Lic. Internat, Iaşi); GH. N. B. IONESCU (Lic. „Petru şi Pavel, Ploeşti); ST. CETĂŢEANU (Lic. „Gh. Şincai", Bucureşti); C. BURGHELEA, C. MIHĂILESCU, FL. OANŢĂ, V. PĂDUREŢ, AD. V. SECU (Lic. militar, Chişinău); I. CRĂCIUN, A. T. NADOLU, C. PANTELIMON, M. D. POPA, AL. I. ROHR, S. R. TURCU (Lic. militar, Iaşi); M. M. ANASTASIU, N. I. STAICU, M. D. STOENESCU (Lic. militar, Târgovişte); M. BRĂTAN, M. I. CORĂCIU, H. ST. CIUPAG, N. M. DRĂGULINESCU, G. D. ENESCU, LUPU GRUIA, M. I. HÂNCU, I. MĂDAN, V. ST. STĂNESCU (Lic. militar, Craiova); GR. GH. HORTOPAN, I. Z. MĂINESCU (Lic.

militar, Tg.-Mureş); N. Gh. Apostol, N. V. Nedelcu, M. Petrescu (Lic. militar, Cernăuţi).

3°. In ultimul timp s'au mai primit soluţiuni parţiale dela D-nii: P. Gh. Alexandrescu, V. C. Atanasiu, V. L. Florescu, Al. A. Gheorghiu, D. D. Mihăilescu, P. Pârvulescu şi E. Gh. Vijelie.

4°. Pe aceeaşi cale se cercetează cazul general când 2 numere şi 2 puteri ale lor ar diferi prin acelaşi număr dat a. In acest caz general se examinează dacă vre-una din ecuaţiile

(1) $(x+a)^m - x^n = a$; (2) $(x+a)^n - x^m = a$

(3) $x^n - (x+a^m = a$; (3) $x^m - (x+a)^n = a$

admit soluţiuni întregi. Numerile a, m, n sunt date.

G-l Gh. B.

PROBLEMA 4875. *Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni:*

$$(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2=m(a^2+b^2+c^2)$$
$$(by+cz+dt)^2+(bz-cy)^2+(ct-dz)^2+(dy-bt)^2=n(b^2+c^2+d^2)$$
$$(cz+dt+ax)^2+(ct-dx)^2+(dx-at)^2+(az-cx)^2=p(c^2+d^2+a^2)$$
$$(dt+ax+by)^2+(dx-at)^2+(ay-bx)^2+(bt-dy)^2=q(d^2+a^2+b^2).$$

Marcel F. Amărăşteanu.

Soluţie. După identitatea lui Lagrange sau printr'o simplă efectuare, sistemul devine:

$$x^2+y^2+z^2=m \qquad z^2+t^2+x^2=p$$
$$y^2+z^2+t^2=n \qquad t^2+x^2+y^2=q$$

care dă imediat:

$$x=\pm\sqrt{\frac{m-2n+p+q}{3}} \; ; \; z=\pm\sqrt{\frac{m+n+p-2q}{3}}$$
$$y=\pm\sqrt{\frac{m+n-2p+q}{3}} \; ; \; t=\pm\sqrt{\frac{-2m+n+p+q}{3}}.$$

Se obţin astfel 16 sisteme de soluţii distincte.

Soluţii au dat D-nii: I. I. Ţiţeica, N. D. Ştefănescu, V. L. Florescu, T. Predoiescu-Ţânţăreni, D. I. Cioc, O. Gh. Rădulescu, D. N. Theodorescu, E. Marcovici, Slt. M. Grumăzescu, M. A. Vasilescu-Stabu, M. D. Stoenescu, M. Diaconescu, L. I. Gruia, G. N. Adrian, M. Roşculeţ, D. D. Buznea, N. N. Tătaru, E. G. Vijelie, S. D. Ionescu, S. R. Turcu, E. S. Modâlcă,

R. E. GVIAZDOMORSKI, A. O. ŞAICHIN, I. STREDER, V. A. PĂDUREŢ, G. M. DUMITRESCU, I. D. DIACONESCU, C. PANTELIMON, M. D. POPA, M. PETRESCU, T. C. ŞTEFAN, C. BURGHELEA, H. S. CIUPAG, I. I. CRĂCIUN, D. T. MIRONESCU, F. OANŢĂ, N. G. APOSTOL, N. V. NEDELCU, C. PASCARU, V. BĂRBIERU, I. GOLDBERG, I. V. JAREGHIE, A. I. CORNĂŢEANU, A. NADOLN, V. PÂRVULESCU.

O generalizare fără importanţă s'a primit dela D-l D. I. CIOC în cazul unui sistem cu n necunoscute analog cu sistemul independent de a, b, c, d.

C. I. Ţ.

PROBLEMA 4882. *O societate compusă din şapte membri* A, B, C, D, E, F, G *trebue să ţină şedinţe cel puţin de trei ori pe lună şi cel mult odată pe săptămână. In darea de seamă dela sfârşitul anului se constată că* A *a luat parte la* 100% *din şedinţe,* B *la* $91{,}66\%$, C *la* $83{,}33\%$, D *la* 75%, E *la* $41{,}66\%$, F *la* $33{,}33\%$ *şi* G *la* 25% *din numărul şedinţelor. Câte şedinţe au fost şi la câte a luat parte fiecare membru?*

P. SERGESCU.

Soluţie dată de: LOCOT. M. C. VLAD (Cluj), J. GOLDBERG, GH. N. B. IONESCU, H. REISCHER.

Să însemnăm cu N numărul şedinţelor ţinute. In baza enunţului N e cuprins între 36 şi 52. A a luat parte la N şedinţe ;

B la $\frac{91{,}66}{100}$ N adică $\frac{11N}{12}$, C la $\frac{83{,}33}{100}$ N $= \frac{5N}{6}$, D la $\frac{3N}{4}$, E la $\frac{41{,}66}{100}$ N $= \frac{5N}{12}$, F la $\frac{33{,}33}{100}$ N $= \frac{N}{3}$, G la $\frac{25N}{100} = \frac{N}{4}$ şedinţe.

Dar numărul şedinţelor la care a luat parte fiecare membru trebue să fie întreg; deci N trebue să fie multiplu de 12, 6, 4, 3 adică de 12. Cum N e cuprins între 36 şi 52, el poate fi sau 36 sau 48. Ca atare problema admite *două soluţiuni.*

	Au asistat						
Şedinţe	A	B	C	D	E	F	G
36	36	33	30	27	15	12	9
48	48	44	40	36	20	18	12

PROBLEMA 4886. *Se dă*

$$u = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Să se exprime $\sin x$ *şi* $\cos x$ *în funcţie de* u, *deducându-se apoi valoarea expresiunei* $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$.

COL. GH. I. LITEANU.

Soluţie dată de D-nii: D. N. THEODORESCU (Liceul militar Mânăstirea Dealu) şi A. O. ŞAICHIM (Lic. Matei Basarab, Bucureşti).

Avem

$$u = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2} - x}{2}.$$

Deci

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{2u}{1+u^2}, \text{ şi } \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Se deduce valoarea expresiunei:

$$\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{1+u^2-(1-u^2)}{2u} = u.$$

S'au primit soluţii foarte bune dela D-nii: ST. N. ŞERBĂNESCU, R. MOŢOC (Lic. militar Cernăuţi); N. I. STAICU, M. D. STOENESCU, V. FLORESCU şi D. D. BUZNEA (Lic. militar Mânăstirea Dealu), EM. S. MODÂLCĂ (Lic. T.-Severin); C. BURGHELEA şi V. PĂDUREL (Lic. militar Chişinău); TR. PREDOESCU-Ţ., O. MĂRCULESCU, LOCOT. PANAIT NEGOIŢĂ, JOE SEGAL şi D-şoara V. TĂNĂSESCU.

Soluţii satisfăcătoare au dat D-nii: AL. A. POP, ST. C. TILICĂ, I. A. CRIŞAN. GH. N. B. IONESCU, I. GOLDBERG, REISCHER HERMAN, LOCOT. M. VLAD-CLUJ, I. I. SOLOMON.

Ulterior s'au mai primit soluţii dela D-nii: M. AL. VASILESCU-ŞTABU, M. C. ALEXANDRESCU şi I. D. DIACONESCU.

COL. G. I. L.

EXERCIȚII

17. Care număr de forma *ab* dă patrat de forma *szu*, iar inversul lui *ba*, dă ca patrat pe *uzs*?

N. N. VELICESCU.

R. Patratele de trei cifre sunt cuprinse între 10 și 31 inclusiv. Cum în problema noastră avem deaface și cu inversul unui număr din acest interval 10—31, urmează că nu putem lua decât numere, cu unimile 1, 2 sau 3, adică cel mult egal cu cifra zecilor. Soluțiile sunt printre 11, 12, 13, 22.

Găsim ca soluții pe 11, 12, 22.

18. Fie M un punct pe latura BC a triunghiului ABC, iar N conjugatul său armonic.

Dacă dreptele AM și AN întâlnesc cercul ABC în M′ și N′, respectiv, tangentele la cerc în aceste puncte se taie pe BC.

APOSTOL R.

R. Notând cu P*m* intersecția tangentei în M′ cu latura BC avem:

$$\frac{\overline{PmB}}{\overline{PmC}} = \frac{\overline{M'B}^2}{\overline{M'C}^2}$$

însă din triunghiurile ABM′ și ACM′ deducem:

$$\overline{M'B} = \frac{\overline{M'A} \cdot \sin B\hat{A}M'}{\sin A\hat{B}M'}, \quad \overline{M'C} = \frac{\overline{M'A} \cdot \sin C\hat{A}M'}{\sin A\hat{C}M'}$$

deci

$$\frac{\overline{PmB}}{\overline{PmC}} = \frac{\sin^2 B\hat{A}M'}{\sin^2 C\hat{A}M'}$$

analog găsim

$$\frac{\overline{PnB}}{\overline{PnC}} = \frac{\sin^2 B\hat{A}N'}{\sin^2 C\hat{A}N'}$$

cum fascicolul A(BCM′N′) este armonic avem:

$$\frac{\sin B\hat{A}M'}{\sin C\hat{A}M'} = -\frac{\sin B\hat{A}N'}{\sin C\hat{A}N'}$$

relație care aduce după sine:

$$\frac{\overline{PmB}}{\overline{PmC}} = \frac{\overline{PnB}}{\overline{PnC}}$$

deci $(Pm) \equiv (Pn)$...

19. Să se descompună expresia $E = (p^4 + 2)\, m^4 + n^4$ într'o sumă de trei patrate perfecte.

TUDOR STOICESCU.

R. Putem scrie:

$$E = p^4m^4 + 2m^4 + n^4 + 2m^2n^2p^2 - 2m^2n^2p^2 = (p^2m^2 - n^2)^2 + 2m^4 + 2m^2n^2p^2;$$

ţinând seama de identitatea:

$$2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2$$

unde facem $x = m^2$ şi $y = mnp$, vom avea:

$$E = (p^2m^2 - n^2)^2 + 2(m^4 + m^2n^2p^2) = (p^2m^2 - n^2)^2 + (m^2 + mnp)^2 + (m^2 - mnp)^2.$$

20. Să se demonstreze că între unghiurile α, β, γ, ale unei semi-drepte OM, care pleacă din origina O a unui triedru tridreptunghic, făcute respectiv cu axele Ox, Oy, Oz, avem inegalitatea:

$$\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta \operatorname{tg}^2\gamma > 8.$$

TUDOR STOICESCU.

R. Între cosinusurile directoare ale semidreptei OM, avem:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

sau:

$$1 - \cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma \text{ adică } \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \sin^2\alpha.$$

Această ultimă expresie poate fi scrisă:

$$\sin^2\alpha = \cos\beta \cos\gamma \left(\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\right).$$

Circular vom avea pentru celelalte unghiuri relaţii similare, făcând produsul lor avem:

$$\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma = \cos^2\alpha \cos^2\beta \cos^2\gamma \,.\, \pi \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right);$$

fiecare din paranteza $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} > 2$ şi deci, prin împărţirea cu $\cos^2\alpha \cos^2\beta \cos^2\gamma$ avem:

$$\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta \operatorname{tg}^2\gamma > 8.$$

21. Care este condiţia, pentru ca ecuaţiile:

$$\alpha \sec x + \beta \operatorname{tg} x = \gamma$$

$$\beta \sec x + \alpha \operatorname{tg} x = 1$$

să fie satisfăcute pentru o aceeaşi valoare a arcului x?

V. POPESCU.

R. Rezolvând în raport cu $\sec x$ şi $\operatorname{tg} x$ avem:

$$\sec x = \frac{\alpha\gamma - \beta}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\alpha - \beta\gamma}{\alpha^2 - \beta^2}$$

ţinând seamă de relaţia: $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$ avem:

$$(\alpha\gamma - \beta)^2 - (\alpha - \beta\gamma)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

simplificând cu $\alpha^2 - \beta^2$ avem:

$$\gamma^2 - 1 = \alpha^2 - \beta^2$$

deci condiţia: $\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 1 = 0.$

PROBLEME PROPUSE

4903. Care sunt patratele mai mici ca un milion în interiorul cărora se găsesc două zerori, — şi numai două, — alături?

I. IONESCU.

4904. Produsul numerelor prime cu un număr dat şi mai mici decât el este 17866745; care este acel număr?

MAIOR I. LINTEŞ.

4905. Să se dea o soluţie generală în numere întregi a sistemului:

$$a + b + c = d + e + f$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = h^3.$$

A. MOESSNER.

4906. Se dă un paralelogram ABCD a cărui bază AB este fixă şi a cărui înălţime este de o mărime constantă. Pe laturile acestui paralelogram ca diametre se descriu în afară semicercuri. Fie M_1, M_2, M_3, M_4 mijloacele acelor semicercuri construite respectiv pe AD, DC, CB şi BA. Se cere:

1°. Să se arate că $M_1M_2M_3M_4$ este un pătrat;

2°. Ştiind că DC alunecă pe paralela dusă la AB la depărtarea constantă considerată, să se determine locurile geometrice ale punctelor M_1 şi M_3, precum şi al centrului de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$.

VIRGIL GHIŢESCU.

4907. Fie I centrul cercului înscris triunghiului ABC, B'C' picioarele bisectoarelor, α mijlocul lui BC.

1°. Iα taie pe B'C' pe simediana din A.

2°. Fie $\alpha\beta\gamma$ o dreaptă oarecare trecând prin mijlocul laturei BC; Iβ, Iγ taie pe AB, AC în C_a, B_a; $B_a C_a$, B'C', Iα sunt concurente.

N. N. MIHĂILEANU.

4908. Să se calculeze expresia:

$$E = \frac{5x^2}{9x^2-3y} - \frac{x^2(27x^2-y)}{3(9x^4-y^2)} + \frac{x^2-6y}{3y} - \frac{x^2(x^2-y)}{y(3x^2+y)}.$$

GH. VASILIU.

4909. Să se elimine λ şi μ între relaţiunile:

$$m(x-a)\mu - y(m\lambda + a) = 0$$
$$(x-\lambda)\mu + (a-2\lambda)(y-\mu) = 0$$
$$(x^2+y^2-ax)\mu - y\mu^2 + \lambda y(a-\lambda) = 0,$$

unde m şi a sunt nişte constante date.

G-L GH. BUICLIU.

4910. Să se demonstreze că expresia:

$$E \equiv \cos(2k+1)a + \sin(2k+1)a$$

este divizibilă cu $(\cos a \pm \sin a)$, după cum k este par sau impar.

GH. D. SIMIONESCU.

4911. Se dă un semicerc O cu diametrul $\overline{AOB} = 2r$. Fie C un punct pe acest diametru şi D punctul de intersecţie al semicercului cu perpendiculara în C pe AB. 1°. Punând $x = OC$, să se exprime aria S născută de dreapta AD printr'o rotaţie completă în jurul lui AB. Să se calculeze şi aria S_1 născută de arcul BD prin aceeaşi rotaţie. Să se determine x, astfel ca $\frac{S}{S_1} = \frac{3}{2}$.

2°. Să se formeze de asemenea ecuaţia în x când $\frac{S}{S_1} = m$. Să se discute după valorile lui m.

TH. ANGHELUŢĂ.

4912. Se consideră două conici omofocale C′ şi C″ şi punctele M′ pe C′, M″ pe C″, astfel ca tangentele în M′ şi M″ la conicele C′ şi C″ să fie paralele. 1°. Să se arate că înfăşurătoarea dreptei M′M″ este o conică C. 2°. Presupunând că C′ este fixă şi C″ o conică omofocală variabilă, să se găsească locul focarelor conicelor C.

N. ABRAMESCU.

4913. Se dau seriile simplu convergente $\sum_1^\infty u_n$, $\sum_1^\infty v_n$ cu termenii:

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad , \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

puşi în corespondenţă biunivocă prin notaţie (acelaşi indice).

Se schimbă ordinea termenilor în seria Σu_n astfel ca să se obţină o serie $\Sigma u_{n'}$ de sumă nulă. (Lucrul este posibil după teorema lui RIEMANN relativă la seriile simplu convergente). In corespondenţă cu $\Sigma u_{n'}$ rezultă pentru seria Σv_n o anumită ordonare $\Sigma v_{n'}$.

Se cere suma acestei serii $\Sigma v_{n'}$.

MIRCEA MĂNESCU.

4914. Să se găsească curbele plane a căror rază de curbură este invers proporţională cu ordonata.

M. GHERMĂNESCU.

ERATĂ. — 1°. In numărul din Decemvrie al Gazetei, pag. 186, rândul 8 de jos, în loc de „ecuaţia diferenţială comunală (!) globală" să se citească „ecuaţia diferenţială comună". Eroarea provine dintr'o neglijenţă a autorului, combinată cu o colaborare a zeţarului.

2°. De asemenea: la pag. 179, rândul 7 de sus să se citească „bilatere" în loc de „unilatere".

3°. La problema 4829 (pag. 175) membrul al doilea este: $-2\Sigma \cos A$

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexandrescu C. Mihail (4899); *Alexandrescu Gh.* (4857); *Atanasiu C. Virgil* (4857, 68); *Beiu Palade G. Ernest* (4829, 99, 900); *Cetățeanu G. Șt.* (4863); *Cornățeanu I. Aurel* (4829, 80, 91, 95, 96, 99); *Crișan A. Ion* (4868, 82); *Diaconescu D. Ion* (4845, 95, 99, 900); *Diaconescu Marcel* (4874, 80); *Florescu L. Victor* (4622, 48, 815, 29, 57, 61, 91, 95, 99); *Florescu M.* (4899); *Florescu Zoe* (4868); *Gheorghiu A. Al.* (4857, 68, 80); *Grumăzescu M. Subloc.* (4633, 829, 74, 80, 82, 84); *Herman Victor* (4730, 90, 861); *Ionescu B. N. Gh.* (4844, 95, 96, 99); *Ionescu Doru Alex.* (4753); *Ionescu M. Const.* (4882); *Jalbă Lucian* (4882); *Marcovici E.* (4868); *Mărculescu O.* (4874); *Matei D. D-tru* (4820, 29, 75); *Mihai C. I. Vlad Locot.* (4820); *Mihăilescu D. D.* (4857); *Mihalcea N. Nicolae* (4761); *Milu I. Nicolae* (4829, 44, 61, 68, 75, 900); *Modâlcă S. Emil* (4861, 64, 80, 82, 95, 99, 900); *Moțoc L. Remus* (4880, 82); *Pădureț A. Vasile* (4829, 52); *Pârvulescu V.* (4857); *Predoiescu-Țânțăreni Traian* (4707, 891, 99); *Reischer L. Herman* (4808, 81, 91, 99, 900); *Ripianu D-tru* (4724, 851, 74); *Roșculeț N. Marcel* (4663, 733, 829, 44, 82, 99, N); *Șaichin O. Adolf* (4820, 67, 78); *Segal Joe* (4573, 793, 829, 61, 99, 900), *Șerbănescu N. Ștefan* (4882); *Solomon I. Isac* (4861, 80, 82, 99, 900); *Streder Ion* (4829, 63, 74); *Tănăsescu Venera* (4829, 60, 67, 68, 74, 80); *Tătaru Nicolae* (4870); *Theodorescu N. Dorin* (3239, 802, 4470, 797); *Tilică C. Ștefan* (4496, 560, 634, 88, 89, 788, 818, 44, 45, 69, 70, 78, 80, 91, 93, 95, 99, 900); *Topalescu Gh.* (4753); *Tudoran M. Lidya* (4868); *Turtoiu Fănică* (4857, 75, 99); *Vasilescu-Stabu Al. Mircea* (4761, 829, 68, 72, 80, 82, 83, 84, 91, 93, 95, 96, 97, P); *Vijelie C. Eugen* (4857, 68).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia VI . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* 1926. (Epuizată).

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50
Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. **C. D. IONESCU-ŢIU**

C. 91203

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIII

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1938

BIBLIOTECA CENTRALĂ ... ASOCIAȚIUNII ... SIBIIU

SUMARUL

1. † Gh. Em. Filipescu . . . . . *Ion Ionescu.*
2. Primele aritmetici pentru Bucovina (urmare şi sfârşit) . . . . . *Victor Marian.*
3. Asupra unor patrate curioase . . . . *V. Thébault.*
4. Asupra punctelor lui Feuerbach . . . *M. C. Postelnicescu.*
5. Concursul „Gazetei Matematice" . . . *Delegaţia Societăţii.*
6. Note Matematice: 27 — 31.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 274.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2895, 3090, 3489, 3926, 4173, 4196, 4379, 4461, 4514, 4707, 4733, 4858, 4861, 4864, 4867, 4873, 4891.
11. Exerciţii: 22 — 26.
12. Probleme propuse: 4915 — 4926.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1938

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu,** Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **D. Stan,** Inginer; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii „Gazetei Matematice".

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1937 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4859, 71, 79, 88, 90, 94, 901, 03, 04, 05, 07, 09, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

† GH. EM. FILIPESCU

Sunt aproape opt ani de când regretatul nostru coleg, Gh. Em. Filipescu, scria următoarele într'un Necrolog făcut în *Buletinul Societăţii Politecnice,* pentru fostul său Director General la *Societatea Comunală a Tramvaielor Bucureşti,* Alexandru Fabiu Bădescu:

„Ca un trăsnet care într'o clipă sfarmă şi distruge un înalt şi frumos edificiu, tot aşa moartea nemiloasă a răpus într'o clipă, în ziua de Miercuri 15 Ianuarie 1930 ora 20, în timpul când îşi făcea datoria, pe Inginerul Şef Al. F. Bădescu, *Director general al Societăţii Comunale a Tramvaielor Bucureşti.*

Activitatea lui inginerească, munca lui neobosită, bunătatea lui fără margini, probitatea, perspicacitatea şi via lui inteligenţă l'au ridicat în mod real pe cele mai înalte culmi ale tecnicii şi ale industrii.

Poziţiunile ocupate de Al. F. Bădescu *au fost câştigate prin muncă cinstită şi perseverenţă, impunându-se prin personalitatea sa".*

Este cu totul surprinzător ca aceste rânduri, cu care regretatul nostru coleg Gh. Em. Filipescu, caracteriza viaţa, opera şi moartea fostului său Director acum opt ani, să i se poată aplica întocmai şi lui azi: înlocuiţi în cele de mai sus numele Bădescu cu Filipescu, şi data morţii primului, cu 24 Noemvrie 1937, orele 18,45 şi veţi avea caracterizarea exactă a vieţii, a operii şi a morţii celui de al doilea! Eu nu am de adăogat decât că Filipescu a pornit-o de jos şi a urcat şi alte culmi; el a mai reuşit să se ridice pe unele culmi ale învăţământului tecnic superior şi să se urce pe unele vârfuri ale ştiinţei tecnice naţionale.

* * *

Gheorghe Filipescu s'a născut în Bucecea din judeţul Botoşani la 29 Martie 1882 (dată luată după Statul său de Serviciu dela Ministerul Lucrărilor Publice). Tatăl său este Emanoil Filipescu, *fost cantonier la căile ferate* care este încă în viaţă şi care a avut marea durere de a conduce până la locaşul de veci pe iubitul său fiu! Acest român din talpa sănătoasă a ţării a căutat să ridice copiii săi pe scara socială; din slabele lui venituri, obţinute

prin muncă de zi şi de noapte, pe arşiţele din timpul verii şi pe gerurile din toiul iernii, a căutat să dea educaţie şi cultură copiilor săi. Pe GHEORGHE FILIPESCU l-a trimis de a făcut Şcoala Primară din Bucecea şi apoi Liceul Laurian din Botoşani, Secţiunea Modernă, după Liceul trifurcat al lui SPIRU HARET. Văzând însă pe inginerii cari controlau pe tatăl său la calea ferată copilul a căpătat dorinţa de a se face inginer şi de aceea, în ultimele trei clase liceale s'a ocupat şi de matematicile secţiunii reale, în vederea pregătirii pentru a putea intra în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele. In acest scop a început să lucreze la *Gazeta Matematică*, dar neavând mijloace să plătească abonamentul, — de 6 lei aur, de pe atunci, — a rugat Redacţiunea Gazetei ca să-i admită să fie tovarăş cu un altul pe acelaşi abonament! Cât timp a urmat clasele V, VI şi VII a trimis probleme rezolvate bine tratate. Intrebându-l odată în scris de ce nu desvoltă o activitate mai mare mi-a răspuns că face mai multe probleme, dar că nu le trimite pentrucă nu are bani pentru a plăti taxele poştale!

In toamna anului 1902 vine pentru prima dată în Bucureşti, la Concursul de admitere în Anul Preparator al fostei Şcoale Naţionale de Poduri şi Şosele. Ca să economisească din cheltuelile de găzduire în Bucureşti, nu a venit aici decât în dimineaţa zilei Concursului. Trenul de Botoşani sosea pe la 7 dimineaţa, iar Concursul începea la $8^1/_2$. In acest timp, el nu a putut nemeri Şcoala deşi era, ca şi acum, în faţa Gării de Nord. Din această cauză a pierdut prima teză, însă la oral a dovedit că este bine pregătit şi a fost admis venind direct din Liceu. Graţie burselor pe care le-a avut în Şcoală, a sumelor pe care le economisea în timpul practicilor de vară, a putut capăta mijloacele de a-şi termina studiile obţinând în Iulie 1907 Diploma de inginer.

Pe când era elev în Şcoală, încă din Anul I, am constatat că era un elev harnic, de ordine şi de disciplină. Deşi nu eram profesor în acel an, totuşi m'am dus de câteva ori în clasa respectivă rugat de fostul profesor de Desemn, EDGARD DUPERREX, care era bolnav. Către un sfârşit de oră, mă duc întâia dată în acea clasă: sala era aproape goală, câţiva elevi stăteau de vorbă, numai GH. FILIPESCU lucra activ la desemnul său, în fundul clasei. In anul II l-am avut elev la aplicaţiunile Staticei grafice. Dacă la predarea unei epure el nu era mulţumit sufleteşte cu ceea ce făcuse, cerea singur

să refacă lucrarea fără a mai aştepta cercetarea ei spre a vedea dacă obţine sau nu o notă suficientă. In Anul III şi IV l'am avut elev la Aplicaţiunile Rezistenţei materialelor, la Proiectele de Poduri şi de Instalaţiuni industriale. La toate se distingea prin priceperea cu care studia chestiunile, prin munca şi conştiinciozitatea pe care o punea la studiul şi la redactarea proiectelor. La proiectul unui coş de fabrică, de beton armat, deşi avusese mult de lucru pentru partea constructivă, totuşi, când am luat proiectul în cercetare, am rămas mirat găsind în memoriu şi un studiu complet al acelui coş din punct de vedere al fizicei industriale. Aceste calităţi ale fostului meu elev m'au determinat ca, chiar la un an după ce a terminat şcoala, să-l pun să mă suplinească în timpul unei misiuni a mele în străinătate, iar după un alt an să-l recomand ca asistent al meu la Aplicaţiunile de Rezistenţa materialelor şi Proiectele de Poduri. El şi cu regretatul TRAIAN LALESCU, au fost primii asistenţi în vechea Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele.

Activitatea la Căile Ferate

La terminarea Şcoalei, se găseau greu locuri în serviciile publice; locuri noi nu se creau decât pentru favoriţi şi cei bine susţinuţi; de lucrări şi întreprinderi, FILIPESCU nu se putea apuca, căci nu avea bani, nici credit şi chiar de ar fi avut ceva, nu ar fi putut lupta cu întreprinzători mai vechi şi mai experimentaţi. După ce a stat câtva timp fără ocupaţie, fostul său profesor D. MANY, i-a găsit un loc în industria petroliferă. El însă ţinea să intre inginer la Căile Ferate, pentrucă acolo, având din când în când drumuri gratuite, se putea duce mai des la Bucecea să îngrijească de părinţii şi fraţii săi. In toamna anului 1907 reuşeşte şi ia un loc de diurnist în Serviciul de Intreţinere al Căilor Ferate, sub conducerea Directorului I. BAIULESCU, care l-a apreciat repede şi l-a numit sub-şef de Secţie la 18 Martie 1908.

In acel Serviciu FILIPESCU a lucrat în Biroul tecnic central al Direcţiunii. Printre primele lucrări a fost reţeaua de linii ale gării de Triaj dela Ploeşti şi legăturile ei cu Gara, cu Depoul, şi cu linia Ploeşti-Predeal, acea pânză de linii pe care o vede oricine care intră în Gara Ploeşti venind dinspre Bucureşti. Acolo a fost nevoie şi de câteva Poduri pentru a se trece unele linii peste altele, care s'au făcut din beton armat, după proiectele elaborate de GH. FILIPESCU.

Tot în acel Birou el a mai proiectat peroanele de beton armat din gara Ploeşti, castele de apă la Ploeşti, Paşcani, etc.; a făcut apoi calcule de remise de beton armat. Cu ocazia proiectării acestor din urmă lucrări a făcut studii serioase asupra cadrelor elastice, pe care le-a calculat exact şi pentru care a căutat metode aproximative care să dea, prin ca'cule mai puţine şi mai uşoare, rezultate acceptabile în practică.

Problema aceasta a cadrelor elastice l-a pasionat de atunci încoace până la sfârşitul vieţii. O mulţime de comunicări şi de articole au fost rezultatul studiilor şi cercetărilor sale în acest domeniu, şi este posibil să aibă încă în această direcţiune lucrări neterminate şi nepublicate.

Pe când era la Căile Ferate s'a mai ocupat cu chestiuni privitoare la schimbătorii de cale ferată, studii pe care le-a continuat în urmă la liniile de tramvaie.

La 1 Aprilie 1911, FILIPESCU a *părăsit* Serviciul pe care-l avea la Căile ferate şi a trecut ca Şef de Secţiune în Direcţia Serviciului Hidraulic.

Intre timp, la 10 Mai 1910 fusese înaintat în Corpul tecnic al Statului la Gradul de Inginer ordinar clasa II.

Activitatea la Direcţiunea Serviciului Hidraulic

Pe când FILIPESCU era în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele, a făcut una din practicile de vară la *Harta hidrografică a Dunării*, el ştia câtă muncă trebuia depusă acolo în lunile de vară, când apele fluviului sunt scăzute şi când numai, se putea lucra pe maluri. Orele de lucru erau dela 5 dimineaţa la 21 seara, cu o întrerupere de o oră dela 13 la 14. Cu toate acestea, la propunerea ce i s'a făcut de a trece dela căile ferate la conducerea pe teren a lucrărilor pentru ridicarea hărţii hidrografice a Dunării nu a ezitat un moment. Vara se făceau ridicări noi, toamna revizuiri ale modificărilor aduse de viituri, iar iarna în birourile centrale din Bucureşti se lucra la raportarea hărţii.

O problemă interesantă însă la această lucrare era organizarea lucrului de azi pe mâine, căci condiţiunile se schimbau mult dela o zi la alta. Trebuia multă gândire pentru a se putea ridica din planul Dunării cât mai mult în fiecare zi, căci uneori furtunile şi ploile nu permiteau să se lucreze câte o săptămână întreagă. De

aceea, pe timpul bun de lucru, nu trebuia pierdut un minut; totul trebuia prevăzut şi pregătit dinainte. Cu modul acesta el a căpătat un spirit de organizare care i-a folosit mult în urmă şi care a făcut ca şi acea lucrare să meargă mult mai repede ca înainte.

Pe timpul cât FILIPESCU a stat la Serviciul Hidraulic a mai fost însărcinat şi cu alte lucrări importante. Astfel el a proiectat şi a executat la Herăstrău doi piloni de lemn, ancoraţi, de 80 m înălţime pentru susţinerea unei antene necesare primei instalaţiuni de telegrafie fără fir făcută la noi în ţară, iar în timpul pregătirii noastre pentru război a proiectat şi executat, cu o iuţeală uimitoare, şoselele strategice din jurul Turtucaiei, debarcadere noui la Dunăre şi întăriri pe malul fluviului, făcute din beton armat în toiul iernii pentru montarea pe ele a unor tunuri scoase după vasele noastre maritime.

La 1 August 1916 FILIPESCU a părăsit Serviciul Hidraulic şi a trecut la Direcţiunea Tramvaielor Comunale din Bucureşti.

Pe timpul cât se găsea la Serviciul hidraulic, GH. FILIPESCU a fost înaintat în Corpul tecnic al Statului la gradul de inginer ordinar cl. I.

Activitatea în timpul războiului

După terminarea Şcoalei de Poduri şi Şosele, FILIPESCU a făcut stagiul pentru a putea da examenul de ofiţer, şi s'a prezentat la acel examen. In timpul interogărilor de către Ofiţerul examinator şi a răspunsurilor ce le dădea FILIPESCU, ce i s'a părut acelui Ofiţer că soldatul FILIPESCU nu pricepe ce-i spune şi adresându-i-se îi zice: *„D-ta nici nu ştii ce sunt alea coordoate"*. FILIPESCU, indignat că vede un Ofiţer care e în stare să creadă că un inginer după cinci ani de studii nu ştie ce sunt coordonate, i-a replicat: *„n'oi fi ştiind, dacă spuneţi D-v"*. Ofiţerul a găsit în acest răspuns că FILIPESCU nu merită să fie Ofiţer, şi că să i se dea numai gradul de Plutonier. Şi ca plutonier a fost el mobilizat, la Decretarea războiului nostru.

Comisiunea tecnică pentru mobilizarea Ofiţerilor de rezervă, cunoscând însă pe FILIPESCU, a hotărît ca el să fie chemat, în caz de război, la conducerea exploatării liniilor înguste particulare şi astfel, la începutul războiului, a fost chemat la punerea în exploatare a liniilor din valea Oituzului şi a Uzului. Acolo a dezvoltat o

activitate extraordinară făcând ca acele linii să poată servi armatei cu toate lipsurile pe care le aveau la ocuparea lor.

Când în acea zonă au început luptele, FILIPESCU a fost trimis la Construcţia Liniei înguste Piatra-Prisăcani, unde de asemenea a desvoltat o activitate prodigioasă. De acolo, la terminarea Liniei, a fost trecut la Iaşi, unde a lucrat cu trupele de Căi ferate dela Socola, şi unde a avut de îndurat mizerii mari din partea trupelor ruseşti bolşevizate. Acolo l-a văzut D-l General Sc. PANAITESCU, care-l cunoştea de pe când lucra la liniile strategice dela Turtucaia; a rămas mirat când l-a văzut că are gradul numai de plutonier, şi atunci a făcut toate demersurile necesare, ridicându-l la gradul de sublocotenent.

Activitatea la Tramvaiele Comunale

După demobilizarea generală din 1918, FILIPESCU s'a reîntors la Bucureşti spre a-şi relua locul său de Director al Serviciului de Studii şi Construcţii la Tramvaiele Comunale. Liniile şi materialul rulant erau în stare deplorabilă în urma exploatării sălbatice a inamicilor. Societatea nu putea găsi bani de împrumutat în condiţiuni admisibile pentru a se putea reface repede; materiale necesare nu puteau fi aduse din străinătate, iar cererile orăşenilor de a li se pune la dispoziţie vagoane mai multe şi mai dese deveneau din ce în ce mai intense şi mai ameninţătoare. Pretenţiile Personalului de vagon mai ales, erau cu totul disproporţionate faţă de venituri, mai ales că Societatea mai avea de completat reţeaua pentru care luase concesiunea. In aceste condiţiuni FILIPESCU nu putea să se limiteze numai la atribuţiunile lui, ci era delegat ca să se ocupe şi cu alte servicii, care nu se refăceau cu toată intensitatea. Cu modul acesta, FILIPESCU s'a pus în curent cu toate Serviciile şi cu toate nevoile unei bune exploatări a Tramvaielor şi cu mijloacele de a face lucrări cât mai adaptate scopului, cât mai durabile şi cât mai economice.

Cu toate că FILIPESCU se formase repede şi cunoştea toate Serviciile dela Tramvaiele comunale, când unii din membrii din Consiliul de Administraţie în 1924 intenţionau să se numească un Subdirector general în acea administraţiune, locul îl pregătiseră pentru un altul. El aflând despre aceasta, a încunoştiinţat pe Directorul său general că el poate trăi numai cu veniturile pe care le are ca

profesor la Şcoală şi ca să-l considere demisionat pe ziua când se va numi un Subdirector general. Al. F. Bădescu, ca să nu piardă pe Filipescu care îi devenise de un mare ajutor, a spus Consiliului de Administraţie că nu găseşte necesar înfiinţarea acestui post şi a renunţat la crearea lui până la moartea sa.

De altfel, după cum mi-a spus d-l Inginer Luca Bădescu, fiul regretatului Al. F. Bădescu, acesta nu s'a gândit niciodată că altul decât Gh. Filipescu i-ar putea succede la Direcţiunea Generală a Tramvaielor Comunale.

Când locul de Director general a rămas vacant, altă amărăciune pentru Gh. Filipescu. Primarul de pe atunci al Capitalei, cu unii membrii din Consiliul de Administraţie ţineau să ridice la acel rang pe Directorul Comptabilităţii dela Tramvaiele comunale pe motivul că era cel mai vechiu funcţionar superior la acea Societate. Adevăratul motiv era altul şi anume că prin acea alegere Directorul general devenea mai flexibil pentru intervenţiuni politice. Eu eram atunci în Consiliul de administraţie, ca delegat al Primăriei şi am susţinut că în fruntea unei Administraţiuni tecnice ca aceia, trebue pus neapărat un inginer, că Filipescu este complet format pentru acel loc, şi dacă i se pune altul în cap, pleacă dela Tramvaiele Comunale. Primăria mi-a retras delegaţiunea ce aveam spre a dispune de un vot contra mai puţin. Am comunicat atunci în Consiliu că la locuri în Consilii de administraţie renunţ oricând, pe când la ideia mea expusă niciodată. Eu am plecat, dar faptul că Societatea ar fi putut să fie lipsită de serviciile lui Filipescu a dus la creiarea unui fel de Direcţii bicefale. De fapt însă, chestiunile erau mai toate studiate şi prezentate de Filipescu, lângă semnătura sa punându-se câte un *„da“* de către un consilier. Situaţia aceasta a durat până la moartea acestuia la 23 Ianuarie 1930, când a rămas Director General Gh. Filipescu cu puteri depline.

* * *

Un om capabil şi muncitor ca Filipescu nu se putea mărgini numai la ocupaţiunile lui dela Tramvaiele comunale şi de profesor, căci asemenea oameni sunt căutaţi şi solicitaţi pentru consultaţiuni, pentru rezolvarea unor situaţiuni grele, pentru arbitrage, pentru expertize, etc. Nu cunosc tot ce a făcut Filipescu în asemenea direcţiuni; voiu expune numai câteva mai importante pe care

le cunosc. Astfel FILIPESCU era un sfătuitor pentru Primăria Capitalei în chestiuni de ordin tecnic. Unele lucrări, ca acelea de acoperirea Dâmboviței, dintre Calea Victoriei și Calea Șerban Vodă, au fost controlate și recepționate sub Președinția lui. El a făcut parte din Comisiunea numită de Primărie pentru a se cerceta cauzele prăbușirii Tribunelor dela Cotroceni la 8 Iunie 1936 și consolidarea Tribunelor construite de Primărie la Institutul Național de Educație Fizică. De asemenea a făcut parte din Comisiunea care a cercetat rezistența Tribunelor de beton armat construite de Căile Ferate la Crângași.

Pentru Tribunalul Ilfov a făcut o expertiză asupra cauzelor care au provocat tasarea picioarelor podului peste Prut la Oancea.

Având fiicele sale eleve la *Școala Centrală de fete* din București, a fost solicitat să facă parte din Comitetul Școlar al acelei Școale, unde timp de 10 ani a fost un sfătuitor prețios în toate chestiunile tecnice și de învățământ.

Asociațiunea Patronală, unde a fost și Vice-Președinte, și *Camera de Comerț și Industrie* au făcut apel la dânsul pentru îndeplinirea misiunii lor.

GH. FILIPESCU a fost membru activ al *Institutului Român de Energie* dela înființare (1926). El a făcut parte din Comitetele pentru participarea României la Conferința Internațională a marilor Rețele electrice de înaltă tensiune la Paris; din Comitetul român al marilor baraje; din Comitetul mașinilor și aparatelor electrice și a colaborat la redactarea prescripțiilor pentru liniile aeriene de înaltă tensiune.

Înființându-se de curând o fabrică de becuri Tungsram la noi în țară, FILIPESCU a fost ales membru în Consiliul ei de Administrație.

FILIPESCU făcea parte din Consiliul de Administrație al *Institutului român pentru betoane, construcțiuni și drumuri* și era Președinte al grupului român afiliat *Asociațiunii internaționale de Poduri și Șarpante.*

GH. FILIPESCU a luat parte la Iași la întemeierea *Asociațiunii generale a Inginerilor din România,* care își propuse ca scop, apărarea intereselor profesiunii de inginer. In această Asociațiune el a desvoltat o activitate mare pentru apărarea intereselor inginerilor din întreprinderile particulare și în chestiunea învățământului tecnic.

El a făcut parte din Comitetul Secţiunii inginerilor funcţionari particulari în anii 1920 — 1930, Secţiune pe care a prezidat-o în anii 1921 — 1925. A fost şi membru în Consiliul de Administraţie al Asociaţiunii, în care se găsea şi anul trecut ; a luat parte la organizarea Congreselor Asociaţiunii, iar la cele din Iaşi 1921 şi Timişoara 1922 a fost Preşedinte de Secţie, la care a prezentat un raport asupra învăţământului tecnic.

Despre activitatea lui la *Societatea Gazeta Matematică*, la *Societatea Română de Ştiinţe, Secţiunea Matematică şi la Societatea Politecnică* voiu vorbi mai pe larg, mai târziu.

Cu toate aceste preocupări, cu toată grija pe care trebuia să o aibă ca părinte de familie, FILIPESCU nu şi-a uitat locurile lui de origină. Luând cunoştinţă de posibilitatea de a se devia o parte din apele Siretului în apropiere de Bucecea şi conducerea lor spre Botoşani, pentru ameliorarea economică a acelei regiuni, a studiat chestiunea şi a ţinut o Conferinţă la Botoşani asupra posibilităţilor de realizare a acestei idei.

Mă mulţumesc cu aceste semnalări de lucrări excepţionale lăsând la o parte pe altele mai mici şi pe cele de care nu am putut lua cunoştinţă până acum. Menţionez numai că el era numit de Ministerul Lucrărilor Publice în Comisiunea de prescripţiuni pentru siguranţa construcţiunilor, unde concursul lui ar fi fost foarte preţios, după cum a fost mai înainte la Ministerul de Industrie şi Comerţ în Comisiunile pentru stabilirea multor caiete de sarcini tip.

(Va urma). ION IONESCU.

PRIMELE ARITMETICI PENTRU BUCOVINA

(Urmare dela pag. 243)

Al doilea manual al lui ANDRIEVICI este iarăşi o traducere din limba germană. Ea poartă titlul: „ARITMETICA | *pentru* | *a doua şi a treia clasă a şcoalelor naţionale* | *din Bucovina.* | *Din compunerea germană a lui* | FRANCISC MOČNIK. | *Tradusă de* | SAMOIL ANDRIEVICI | *Paroh şi Asesor onorariu consistorial.* | *Costează nelegată 12 cr. K. M.* | *Legată în piele 16 cr. K. M.* | *Viena 1850.* | *La ediciunea c. r. administraţii de cărţi şco* | *lastice la St. Ana în strada lui Ioan*“. |

Cărticica are formatul 8⁰ mic, conţine 189 de pagini şi e tipărită cu litere cirilice.

Autorul cărţii, F. MOČNIK a fost inspector şcolar în Carintia (Austria) şi a scris o serie de manuale şcolare pentru învăţământul primar şi secundar. Multe din ele s'au menţinut în şcoalele secundare din Austro-Ungaria în toată jumătatea a doua a veacului al XIX-lea, ba chiar şi la începutul celui prezent. Unele din ele au fost traduse şi în limba română şi folosite în liceele din Ardeal până la Unire.

Cartea începe cu „*Preliminarii*“, în cari aflăm ce este o „*unătate*“ şi o „*multătate*“; aceste sunt „*numeri*“. Numerii sunt „*nenumiţi*“ sau „*numiţi*“: „*la un număr nenumit nu se caută la feliul unătăţilor, care se cuprind în el, ci numai la mulţimea lor*“. „*Un număr pentru care este un nume, se chiamă numit aice se însemnează nu numai mulţimea, ci şi feliul unătăţilor, ce se cuprind în el*“. Un număr poate fi *rostit* ori *scris*: „*A răspica prin cuvinte numerii cum urmează după olaltă, se chiamă a* **număra.** *Semnele numerilor cele scrise se numesc* **ţifre**“.

Capitolul întâiu se ocupă cu „*numerii sub sută şi a lor înpreunare*“. „*Dacă se adauge la unul eară unul, şi după aceea încă unul şi tot câte unul, apoi esu din oară în oară tot mai noui şi nai mari numeri*“. Numerii sunt „*nesfârşit de mulţi*“; ei se scriu cu „*ţifre arabe*“. Dela numărare se trece la „*adăogăciunea*“ sau „*adaosul*“ numerilor şi în special al „*zăciaţilor*“. La înmulţire ne ajutăm de „*odatunul*“. Capitolul se încheie cu „*cuprinsetul*“, adecă împărţirea numerilor.

Capitolul al doilea cuprinde exprimarea şi scrierea numerilor peste 100 până la numerii cei mai mari, cari se definesc astfel: „*Un milion de milioane se numeşte* **bilion,** *un milion de bilioane se numeşte* **trilion** *ş. m. d.* „O tabelă uşurează cetirea şi scrierea numerilor ce conţin până la 18 cifre. Mai aflăm că „*Aşezarea numerilor după o rânduială legiuită se numeşte o* **sistemă de numeri**“. Cea obişnuită e „*sistema de zăciari* sau *sistema decadică a numerilor*“. „Spre însemnarea numerilor se întrebuinţează adese ori şi *ţifrele romanice*“.

„*Cele patru speţii de* **computare (ambac)** *cu numerii nenumiţi şi de un feliu*“ se cuprind în capitolul al treilea. „*Computarea este de două feliuri,* **computarea de rost** *şi* **computarea**

în scris sau cu ţifre“. *La* **„adiciunea** *seau* **adaugăciunea“** numerilor aflăm că *„a* **adauge** *însemnează a căuta un număr, care este* **egal** *(întocma) cu doi sau mai mulţi numeri la olaltă. Numerii cei daţi se numesc* **adaugânzi,** *şi numărul care ese din adăugăciune se chiamă* **sută“** [eroare în loc de *sumă*]. In ce priveşte semnul adunării se spune: *„Semnul adăugăciunii este o cruce stătătoare + (şi cu)* care se pune între adăugânzi. Aici este de însemnat şi *semnul egalităţii = (întocma) prin care se arată, cumcă numerii între care stă el sânt între sine egali“.* Mai remarcăm că *„adăugăciunea cea scripturală dela cea de rost numai prin aceea se deosebeşte, că în cea scripturală se încep a se adauge unităţile apoi zăciarii,... eară în cea de rost, unde se scriu ţifre şi nu vine la vre o îndreptare, se începe adăugăciunea la locul cel mai mare“.*

Urmează *„subtragerea“* sau *„subtrăgăciunea“ : „La subtragere se dau tot de una doi numeri; cel mai mare, din care se scoate se numeşte* **micşorând,** *mai micul număr, care se scoate se numeşte* **subtrăgând,** *şi numărul, care ese la subtragere afară, se numeşte* **rămăşiţă“.**

A treia operaţie este *„mulţiciunea“.* Ni se spune că *„numărul, care să iea mai de multe ori, se numeşte* **mulţind** *eară numărul, care arată de câte ori se iea mulţindul se numeşte* **mulţitori;** *ori care de între acei numeri se numeşte şi* **făcători,** *numărul care ese din mulţiciune se chiamă* **produs“.** Mulţitorul poate fi din *„unaţifră“* sau *„multoţifric“.*

„La **împărţiciune** *se spun doi numeri; numărul care se împărţeşte, se numeşte* **împărţind;** *numărul prin care se împărţeşte se numeşte* **împărţitoriu;** *eară numărul care ese din* **divizie** *se numeşte* **cât** *seau* **parte...** *Semnul împărţiciunii sânt doaă puncturi (:)“.*

Capitolul al patrălea are ca obiect *„computăciune cu numeri* **multonumici“.** Iată ce sunt aceşti numeri: *„Un număr numit, care poartă numai un nume se chiamă* **unonumic.** *D. E. 5 fiorini, 27 coţi. Un număr numit ale cârui părţi au felurite numiri, se chiamă un număr* **multonumic;** *4 fr. 25 cr. este un număr multonumic“.* Ca şi în volumul anterior, aflăm aici o listă despre *„măsurile, cumpenele şi monetele din staturile austriece“,* dar mai completă.

Astfel, la monete mai avem următoarele lămuriri: *„Un galben înpărătesc (#) merge în 4 fr. 30 cr. sau 270 cr. Indeobște merge număratul în fiorini de Moneta convențională. Dară se fac computăciunile și în fiorini de valuta Vienei, din cari 5 fiorini fac 2 fr. în mon. conv.“*.

La măsurile de pâne aflăm că *„1 țuhal are 30 corețe“*, pe când în volumul amintit mai sus spunea că are 15 *corețe.*

La măsurile de pâne se specifică următoarele: *1 Bereu are 40 ocă (în computăciune). 1 Veadră de rachiu are 12 ocă, eară de alte băuturi 10 ocă. 1 ocă are 4 litre. 1 litră are 2 cincizece. Intru adevăr are bereul de vin 41 ocă, eară cel de bere 42 și jumătate de ocă. Polobocul de vin are 10 beree, eară bere are 2 beree“*.

Șirul operațiilor cu numeri complecși începe cu *„Desfacerea (Resolvirea)* și *reducerea“* acestora. Iată definiția acestor operații: *„Adeseori se întâmplă, că o însemnare mai mare se schimbă în una mai mică, și întors o însemnare mai mică în una mai mare. Cea de întâiu se chiamă desfacerea (resolvirea) unei însemnări mai mari în una mai mică, eară a doa lucrare se numește reducerea unei însemnări mai mici în una mai mare“*. Dintre multele exemple aleg următorul pentru desfacere: *„Câte degete fac 28 de stânjâni? Aici se vor desface întâiu stânjâni în picioare, și acestea în degete“*.

$$\begin{array}{r} 28^0 \\ 6 \\ \hline 168' \\ 12 \\ \hline 336 \\ 168 \\ \hline 2016'' \end{array}$$

Urmează apoi cele patru operațiuni cu numere complexe.

In capitolul al cincilea se tratează **„Impărțibilitatea** *numerilor“*. Se dă mai întâiu definiția numerilor primi. *„Aici* [eroare, în loc de acei] *numeri care sânt numai prin sine sânguri și prin 1 împărțibili, se numesc numeri* **simpli** *sau* **primari“**. Toți ceilalți sunt numeri *„compuși“*. Ni se dau apoi regulele de divizibilitatea numerilor prin 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000...

Obiectul capitolului al șeasălea îl formează *„Frânturile (Fracții)“*. Aceste se împart în *„frânture* **proprie** *seau* **adevărate“** *și* **„neproprie,** *seau* **neadevărate“.** Mai încolo: *„Un număr care se cuprinde din un număr întreg și din o frântură aninată, se chiamă un număr* **amestecat“.** Dintre operațiile cu fracții amintim: *„Schimbarea* **numărătoriului** *și a* **numitoriului** *odată“*, aflarea celui *„mai mic comun numitoriu“* precum și cele patru operații fundamentale cu fracții.

Capitolul al şaptelea se ocupă cu *„Referinţele (Rationes)“* şi *„Proporţiile“*. *„Ori care Alăturare între doi numeri de un feliu se chiamă o referinţă“*. Deosebim *„referinţă aritmetică“* şi *„referinţă geometrică“*. *„La o referinţă sânt doi numeri de trebuinţă... Acei numeri se numesc* **mădulările** *referinţei, şi ales cel dintâiu ce chiamă* **întâiele mădulariu,** *eară al doilea număr se chiamă* **al doilea mădulariu“.** Apoi: *„Numărul, care arată, de câte ori încape mădulariul al doilea în cel întâiu se numeşte* **spunintele referinţei“.** Deosebim: **„referinţă a egalităţii;** *d. e. 1:1, 2:2,...* **referinţă căzătoare;** *d. e. 3:2, 5:1,...* *şi* **referinţa suitoare;** *d. e. 1:2, 2:3...“*

Referitor la proporţii se spune: *„Ori care proporţie se cuprinde din doă referinţe egale, deci dară din 4 mădulari; aceştia se numesc pe rând dela stânga spre dreapta; întâile, al doile, al treia, al patrule mădulariu al proporţiei. Intâiul şi al patrule mădulariu se numesc* **mădulari din afară (ecsterne)** *eară al doile şi treile mădulariu se numesc* **mădulari din lăuntru (interne)“.** Apoi: *„Din o proporţie, unde sânt 3 mădulari cunoscuţi, a afla al patrule se chiamă a* **deslega proporţiea“.**

Capitolul al optălea se ocupă cu *„Regula de trei“*. Mai întâi se defineşte ce e *„o proporţie dreaptă“* şi ce e *„o proporţie întoarsă“*, apoi *„Regula de trei“ şi modul de operaţie.* Numeroase *„exemple şi probleme“* încheie acest ultim capitol al cărţii.

VICTOR MARIAN.

ASUPRA UNOR PATRATE CURIOASE

Patratul curios

$$7744 = 88^2$$

din sistemul zecimal, ne-a sugerat studiul patratelor perfecte de patru cifre de forma

$$aabb = (cc)^2$$

într'un sistem de numeraţie oarecare.

Voiu da câteva observaţiuni generale, care m'au condus la a determina multe patrate de această formă. Graţie acestor observaţiuni, cititorul va putea mări lista pe care am dat-o în diferite culegeri [1]).

1) *Mathesis,* 1936 (Suppléments par V. THÉBAULT).

1°. Descompunând în unităţile sale diverse un număr de 4 cifre de forma

$$N = aabb$$

scris în baza B, se obţine

$$N = aabb = aB^3 + aB^2 + bB + b \tag{1}$$

$$\therefore \quad N = (B+1)(aB^2 + b). \tag{2}$$

De asemeni:

$$cc = c(B+1). \tag{3}$$

Deci, dacă

$$N = aabb = (cc)^2 \tag{4}$$

vom avea şi

$$aB^2 + b = c^2(B+1) \tag{5}$$

şi reciproc.

Condiţia (5) putându-se scrie

$$a(B-1)(B+1) + a + b = c^2(B+1), \tag{6}$$

iar numerele a şi b neavând decât o cifră, suma lor este cel mult $B+1$ şi deci din (6)

$$a + b = B + 1 \quad \text{şi} \quad B = a + b - 1. \tag{7}$$

Eliminând pe a sau b între (2) şi (7) avem

$$B = (B+1)^2(B^2 - bB + b) = (B+1)^2(aB - a + 1) \tag{8}$$

apoi, ţinând seamă de (2) şi (6)

$$c^2 = B^2 - b(B-1) = a(B-1) + 1 \tag{9}$$

şi înlocuind pe B prin valoarea sa (7)

$$c^2 = (a-1)^2 + ab. \tag{10}$$

Exemple. $B = 5$, $N = 2244 = (33)^2$

$$B = 40 \text{ , } N = \overline{16}\ \overline{16}\ \overline{25}\ \overline{25} = (\overline{25}\ \overline{25})^2$$

unde notaţia $\overline{16}$ înseamnă un număr de o cifră în baza B, cifră exprimată în sistemul zecimal.

Observaţii. 1. Dacă produsul ab este un patrat perfect, numărul

$$c^2 = (a-1)^2 + ab \tag{11}$$

este suma a două patrate.

Mai mult, dacă $a = b$

$$c^2 = (a-1)^2 + a^2 \qquad (12)$$

este suma patratelor a două numere consecutive.

2. Având $a \leqslant B - 1$, relaţiunea (9) dă $c > a$ [1]).

2°. Procedând în acelaşi fel pentru un număr de 8 cifre

$$M = ababcdcd$$

scris în baza B, ceea ce dă

$$M = ababcdcd = abB^6 + abB^4 + cdB^2 + cd$$

se deduce [2])

$$M = (B^2+1)(abB^4 + cd) \qquad (14)$$

şi de asemeni pentru numărul de 4 cifre

$$mnmn = mn(B^2+1). \qquad (15)$$

Urmează deci că dacă

$$M = ababcdcd = (mnmn)^2 \qquad (16)$$

vom avea

$$abB^4 + cd = (B^2+1)(mn)^2 \qquad (17)$$

şi reciproc.

Această relaţie putându-se scrie

$$ab(B^2-1)(B^2+1) + ab + cd = (B^2+1)(mn)^2 \qquad (18)$$

şi numerele *ab*, *cd* neavând decât două cifre, suma lor dă

$$ab + cd = B^2 + 1 \qquad \therefore \qquad B^2 = ab + cd - 1. \qquad (19)$$

Eliminând pe *ab* sau *cd* între (14) şi (19), apoi din cauza lui (14) şi (17), se are

$$(mn)^2 = B^4 - cd(B^2-1) = ab(B^2-1) + 1 \qquad (20)$$

şi în fine înlocuind pe B^2 prin valoarea sa (19):

$$(mn)^2 = (ab-1)^2 + ab\,.\,cd. \qquad (21)$$

Exemple. $B = 3$

$$M_1 = 02022222 = (1111)^2$$

$$M_2 = 10102121 = (1212)^2.$$

---

1) V. THÉBAULT. *Mathesis* 1936, Suppléments.

2) O notaţie cu *ab* reprezintă numărul scris cu cifrele *a* şi *b* în baza B

Observații. 1. Dacă produsul $ab \,.\, cd$ este un patrat perfect, numărul

$$(mn)^2 = (ab - 1)^2 + ab \,.\, cd$$

este suma a două patrate.

Mai mult, dacă $ab = cd$

$$(mn)^2 = (ab - 1)^2 + (ab)^2$$

este suma patratelor a două numere consecutive.

2. Având $ab \leqslant B^2 - 1$, (20) arată că $mn > ab$.

3°. Mai general, dacă se consideră un număr de $4n$, cifre,

$$M = a_1 a_2 \ldots \; a_n \, a_1 a_2 \ldots \; a_n \, b_1 b_2 \ldots \; b_n \, b_1 b_2 , \ldots \; b_n$$

și un număr de $2n$ cifre

$$N = c_1 c_2 \ldots \; c_n \, d_1 d_2 \ldots \; d_n$$

așa încât

$$M = (N)^2$$

și dacă se pune

$$P = a_1 a_2 \ldots \; a_n \quad , \quad Q = b_1 b_2 \ldots \; b_n$$

avem

$$P \,.\, B^{2n} + Q = (B^n + 1)\,(N)^2 \tag{22}$$

și reciproc.

Această relațiune putându-se scrie

$$P\,(B^n - 1)\,(B^n + 1) + P + Q = (B^n + 1)\,(N)^2 \tag{23}$$

și numerele P, Q neavând decât n cifre, suma lor

$$P + Q = B^n + 1 \quad \text{sau} \quad B^n = P + Q - 1. \tag{24}$$

Rezultă, că pentru $n = 1$ sau 2, că

$$(N)^2 = B^{2n} - Q\,(B^n - 1) = P\,(B^n - 1) + 1 \tag{25}$$

și în fine înlocuind B^n prin valoarea sa din (24):

$$(N)^2 = (P - 1) + PQ.$$

Observațiuni. 1. Dacă produsul PQ este patrat perfect, atunci

$$(N)^2 = (P - 1)^2 + PQ$$

este suma a două patrate și dacă $P = Q$,

$$(N)^2 = (P - 1)^2 + P^2$$

este suma a 2 patrate consecutive.

2. Având $P \leqslant B^n - 1$, (25) dă $N > P$.

V. THÉBAULT.

ASUPRA PUNCTELOR LUI FEUERBACH

Se cunosc condiţiile pentru ca punctul φ al lui FEUERBACH să se găsească pe bisectoarea unghiului unui triunghiu. Ele au fost stabilite în *Gazeta Matematică* Vol. XL la pag. 278 în soluţia problemei 4325 şi Vol. XLI pag. 476 în articolul D-lui I. I. ŢIŢEICA.

In Vol. XL s'a demonstrat cu ajutorul coordonatelor normale că φ se află pe IA când

$$\sphericalangle A = \frac{\pi}{3} \text{ sau } \sphericalangle B = \sphericalangle C,$$

iar în Vol. XLI s'a demonstrat reciproca.

In cele ce urmează voi demonstra acelaşi lucru pe o cale directă şi elementară, însă pentru punctul φ_a de pe cercul exînscris unghiului A.

Fie triunghiul ABC; H_a piciorul înălţimei din A; I_a centrul cercului exînscris lui A; A_1, B_1, G punctele de tangenţă ale lui I_a cu laturile triunghiului; A'' mijlocul lui AI_a; A' diametralul lui A_1 în I_a; A_2 intersecţia lui BC cu AA'; M mijlocul lui BC; N şi P intersecţia lui AH respectiv cu A'A'' şi $I_a T$; T intersecţia lui BC cu tangenta în φ_a la I_a.

Din aceste construcţii rezultă imediat că A'A''N este paralelă cu I_a TP ca fiind perpendiculare pe $A_1\varphi_a$.

Dreptele AN, $A'I_a$ fiind paralele, iar A'' fiind mijlocul lui AI_a, figura $ANI_a A'$ este un paralelogram, deci $I_a N$ este paralelă cu A'A. De asemeni figura $A'NPI_a$ fiind prin construcţie paralelogram, rezultă

$$NP = A' I_a = I_a A_1$$

deci şi $APA_1 I_a$ este paralelogram şi prin urmare $I_a A$, $A_1 P$ sunt paralele.

Se ştie din *Culegere de probleme de Geometrie*, 11. XI, de D-l Prof. G. ŢIŢEICA, că A_1, A_2 sunt izotomice. Deci $I_a N$ trece prin mijlocul M al lui BC.

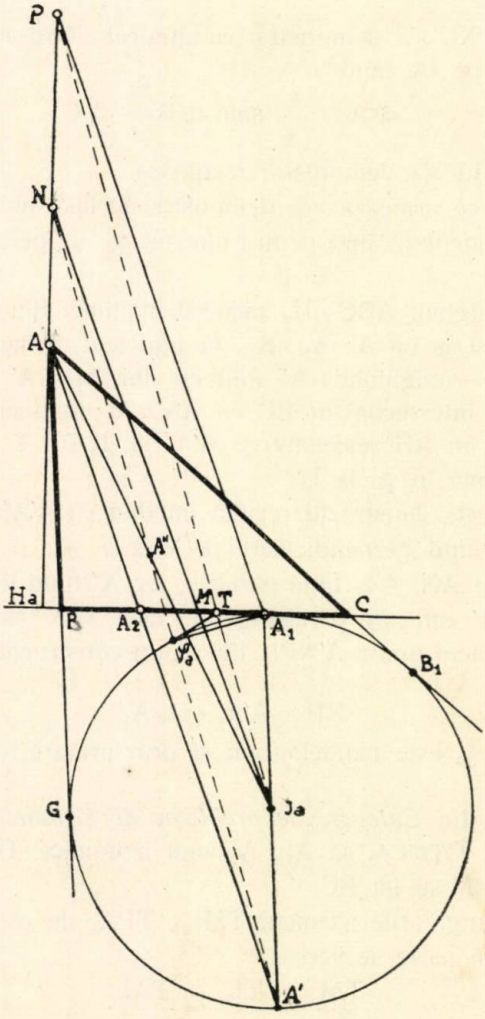
Din triunghiurile asemeni TMI_a, TPA_1 de o parte şi $TA_1 I_a$ $TH_a P$ de altă parte se scoate

$$\frac{TM}{TA_1} = \frac{TI_a}{TP} = \frac{TA_1}{TH_a}$$

$$\therefore \overline{TA_1^2} = \overline{TH_a} \cdot \overline{TM} = \overline{T\varphi_a^2}$$

ceea ce arată că T este pe axa radicală a cercului lui EULER şi a cercului I_a, şi că această axă este tocmai tangenta în φ_a la I_a.

Am ajuns deci la concluzia că *punctul* φ_a *de intersecţie al cercului* I_a *cu dreapta* A'A″ *este punctul lui* FEUERBACH de pe cercul exînscris.



Pentru ca φ_a să se găsească pe bisectoarea AI_a, se vede că este *necesar* şi *suficient* ca φ_a să se confunde cu A″.

Cu alte cuvinte trebue să avem

$$AA'' = \frac{AI_a}{2} = r_a.$$

Dar în acest caz triunghiul $AB_1 I_a$ dă

$$AI_a = \frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2}}$$

aşa că relaţia precedentă conduce la

$$\frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2}} = r_a$$

$$\therefore \quad \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad A = 60^0.$$

Când $A'A_1$ se confundă cu AH_a, când deci triunghiul este isoscel, A_1, M şi A'' se confundă cu φ_a şi reciproc.

Deci am ajuns la aceeaşi concluzie la care s'a ajuns în locurile citate la început pentru punctul φ de pe cercul înscris.

M. C. POSTELNICESCU
Elev Liceul militar M-rea Dealului.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

După cum s'a anunţat în numărul 1, din Septemvrie 1937, al *Gazetei Matematice,* anul acesta se va ţine un concurs de matematici între elevii liceelor din ţară şi elevii anului preparator al Şcoalei Politehnice REGELE CAROL II din Bucureşti.

Dintre candidaţii înscrişi au fost admişi a se prezenta la concurs următorii:

Pentru Clasa IV-a: *Aldea V. Virgil, Antonescu Mircea, Crăciunescu Marcel, Dumitrescu O. C., Floreşteanu D. Alex., Hristescu I. Ioan, Mănescu Gh. Ioan, Minea V. Aldea, Nedelea Fl. Ioan, Predoleanu E. Nicolae.*

Pentru Clasa V-a: *Predoleanu E. Lya, Glogojan Marius, Iliescu Traian, Nicolau V. Dinu, Popişca Mircea, Vasiliu C. D-tru.*

Pentru Clasa VI-a: *Anastasiu M. Mihail, Bădescu Fl. Const., Beşleagă N. Florea, Brătan Gh. M., Buznea Dinu, Cârdei D. Gh., Constantin V. P., Costescu Gh. Ioan, Deciulescu D. Gh. Ştefan, Diaconescu T. M., Gviadomorschi I. R., Ionescu D. Şt. Ştefan, Jareghie V. Ioan, Mihăilescu D. D-tru, Mironescu I. D-tru, Paparizu Ioan, Petcu T. Valentin, Petrescu V. Mihail, Petrescu V. Achile, Pop Gr. Ilie, Popa D. Mircea, Staicu I. Nicolea, Stoenescu M. M. D. M., Theodorescu N. Dorin, Turcu R. Sandu, Văduva Fl. Marin, Vasilescu Mircea.*

Pentru Clasa VII-a: *Burghelea S. Cesar, Cetăţeanu Stelian, Florescu L. Victor, Chituleasa C. Ioan, Ioan A. Ilie, Jipa C. Alex., Lupu C. Gruia, Pasere E. Aurel, Rădulescu Gh. Oct., Tătaru N. Nicolae, Zolotovici I. Th.*

Pentru Clasa VIII-a: *Romaşcan Georgeta, Apostol V. Radu, Cetăţeanu Nicolae, Cioc Ion Dumitru, Cornăţeanu I. Aur., Dalban C. Gh., Hortopan Gh. Grigore, Păduret A. Vasile, Ştefan C. Tilică, Ştefănescu D. Nicolae, Streder Gh. Ioan, Toma N. Nicolae.*

Pentru anul preparator al Şcoalei Politehnice: *Beiu-Palade Ernest, Metea Virgil, Postelnicescu Mircea.*

Adică 10 candidaţi pentru clasa IV-a, 6 pentru clasa V-a, 27 pentru clasa VI-a, 11 pentru clasa VII-a, 12 pentru clasa VIII-a şi 3 pentru anul preparator al Şcoalei Politehnice.

Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă din ambele materii la care s'a înscris. Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima teză va avea loc Joi 28 Aprilie 1938, dela ora 8^{30} până la 11^{30}, iar a doua teză, în aceeaşi zi, între orele 15 şi 18, la Şcoala Politechnică, Calea Griviţei, 132.

Oralul va începe Vineri 29 Aprilie, ora 8^{30}.

Candidaţilor înscrişi la concurs, cari nu dispun de mijloace materiale pentru venirea şi întreţinerea lor în Bucureşti (după cum au arătat în cererile lor), li se vor trimite în vacanţa de Paşti sumele necesare transportului la Bucureşti şi li se va comunica locul unde vor fi găzduiţi în tot timpul concursului.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

27. *Asupra problemei 2035.* D-l C. C-DOR GH. ZAPAN face cunoscut că proprietatea care face obiectul problemei 2035 rezolvată la pag. 256 din acest an, a mai fost publicată de D-l A. SIMIONOV în nota de la pag. 13 Vol. XIV, *Gazeta Matematică.*

In acea notă se demonstrează că dacă p este prim şi mai mare decât m, atunci

$$m!\,(p-m-1)+(-1)^m = Mp.$$

Dacă se înlocueşte aici m prin n se găseşte tocmai relaţiunea din enunţul problemei 2035.

Soluţia dată problemei 2035 diferă de aceea dată în nota D-lui A. SIMIONOV, care are tot dreptul la prioritate căci nota D-sale a fost publicată la 15 Sept. 1908 pe când problema 2035 a D-lui G. THIERRIN a fost propusă în Decembrie 1913.

G-L GH. BUICLIU.

28. *Asupra notei 20 G. M. XLIII — 190.* Distanţa între punctele M, N unde se întâlnesc sferele descrise pe laturele triunghiului ABC ca diametre, se poate regăsi scriind puterea ortocentrului H faţă de cele trei sfere; în adevăr, A′, B′, C′ fiind picioarele înălţimilor, sfera (AB) de ex., trece prin punctele M, N, A, A′; deci

$$h^2 = HM \cdot HN = HA \cdot HA' = \ldots = 2R\cos A \cdot 2R\cos B\cos C.$$

M şi N sunt punctele comune tuturor sferelor cu centrele în planul ABC şi cu acelaşi ax radical. (MN) este sfera minimă a reţelei.

Dacă triunghiul ABC este obtusunghiu, axa radicală a celor trei sfere continuă să treacă prin H, dar ortocentrul fiind exterior triunghiului, punctele M şi N sunt imaginare. Reţeaua de sfere de bază ABC şi axă, perpendiculara în H, admite atunci ca cerc limită, ortogonal tuturor cercurilor din planul ABC, cercul conjugat triunghiului, de rază r; astfel ca

$$r^2 = -4R^2\cos A\cos B\cos C \quad \text{şi} \quad h^2 = -r^2;$$

centrele sferelor, mijloacele laturelor, sunt exterioare acestui cerc.

N. M.

29. *Asupra coardelor unei curbe plane, văzute dintr'un punct fix sub un unghiu constant.*

In G. M. XXXIV, p. 366 D-l Ing. Şef M. NICOLAU a publicat teorema: *dacă* MN *este o coardă variabilă într'o curbă plană* T, *văzută dintr'un punct fix* P *sub un unghiu constant şi dacă* T *este intersecţia tangentelor în* M *şi* N la Γ, *punctul de contact al lui* MN *cu înfăşurătoarea sa, aparţine isogonalei lui* PT *în unghiul* MPN, căreia D-l R. GOORMAGHTIGH ia dat o nouă demonstraţie în G. M. XXXV, p. 81. Această teoremă a fost dată de D-l M. D'OCAGNE în Nouv. Ann. de Math. 1883 p. 252; 1886 p. 88; 1897 p. 238 şi reprodusă în al său Cours de Géom. Gauth. Villars, 1917, p. 136. Demonstraţia D-lui R. GOORMAGHTIGH care constă în a transforma prin polare reciproce relativ la un cerc de centru P, proprietatea tangentei isopticei unei curbe plane, se află şi ea indicată.

E. ARGHIRIADE.

30. *Asupra centrelor de curbură la conice.*

In G. M. XXXIII, p. 448 D-l LOCOT. M. FOCŞENEANU a dat următoarea construcţie a centrului de curbură la o conică: *fie* T *şi* N *proecţiile focarului* F *pe tangenta şi normala în* M *la conica* (M), *iar* O *centrul conicei; dreapta* NF *taie pe* OM *în* α, *iar paralela din* α *la* MN *taie pe* OT *în* β; *perpendiculara în* β *pe* Fβ *taie pe* MN *în centrul de curbură* D. Această construcţie se reduce uşor la următoarea construcţie cunoscută: din punctul în care normala taie axa focală se ridică o perpendiculară până întâlneşte pe MF_1, iar din acest punct se ridică o perpendiculară pe MF care întâlneşte normala în centrul de curbură.

Intr'adevăr N fiind centrul instantaneu de rotaţie în mişcarea unghiului NMT, punctele O, N, T sunt colineare şi fie r' intersecţia lui MN cu axa focală. Din triunghiuri asemenea se deduce $\beta r = \| \alpha N$ şi fie q punctul în care βr taie pe MF. Dreptele NT şi MF fiind egal înclinate pe NF_1 trapezul βNFq este isoscel, iar cercul descris pe DF ca diametru trece prin q; rezultă că Dq este perpendiculară pe MF. Mai putem deduce construcţia: *fie* r *punctul în care normala în* M *la o conică cu centrul în* O *taie axa focală şi* T *proiecţia focarului* F *pe tangenta în* M *la conică; perpendiculara în* r *pe normală taie pe* OT *în* β, *iar perpendiculara în* β *pe* Fβ, *taie normala în centrul de curbură.*

E. ARGHIRIADE.

31. *Viteza maximă a unui proectil.*

In problemele curente de balistică viteza proectilului este socotită aceea dela gura ţevei, care se notează cu V_0 şi este considerată ca viteză maximă. In realitate viteza maximă a proectilului nu este la gura ţevei ci la o depărtare x de gura ţevei.

Actualele tratate de balistică arată că valoarea vitezei maxime este dată de o expresiune de forma:

$$1) \qquad V_{max} = V_0 \cdot \left(1 + k \cdot \frac{\bar{\omega}}{p}\right)$$

dedusă din egalarea cantităţilor de mişcare, $\bar{\omega}$ fiind greutatea încărcăturei, p greutatea proectilului şi k un coeficient experimental (variind în jurul lui 0,5).

Abscisa x (faţă de gura ţevei) unde proectilul atinge viteza maximă este dată de literatura technică germană (HÄNERT „Geschutz und Schuss") sub forma:

$$2) \qquad x = V_0^2 \cdot \frac{2k \cdot \bar{\omega}}{g \cdot q \cdot P_1} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} k \cdot \frac{\bar{\omega}}{p}\right)$$

unde q este secţiunea dreaptă a interiorului ţevei şi P_1 o funcţie de presiunea maximă.

In cele ce urmează, căutând o justificare matematică a formulei (2), am găsit că, reprezentând grafic detenta interioară a gazelor, pe care apoi o continuăm şi la exterior, după un spectru stabilit deja (LINTEŞ „Teoria şi calculul frânelor de gură"), am ajuns la expresiunea:

$$3) \qquad x = k' \cdot \left(\frac{P_g}{R_a}\right)^{\frac{1}{r}}$$

unde k' este un coeficient determinat pe cale experimentală (similar lui k), P_g presiunea gazelor la gura ţevei, r raportul căldurilor specifice şi R_a rezistenţa aerului opusă proiectilului, la gura ţevei.

MAIOR I. LINTEŞ.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Anul X. Nr. 9. Noemvrie 1937. Buenos-Aires.

Idem. Nr. 10. Noemvrie 1937. Buenos-Aires.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLIII. Nr. 12. Decemvrie 1937. Menasha.

Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara. Tom. 7. Fascicola 3 — 4. Timişoara 1937.

Contribucion al Estudio de las Ciencias. Vol. V. Fascicola 1. Nr. 113. Decemvrie 1937. La Plata. Teoria generală a sistemelor polifazice de MIQUEL SIMONOFF.

Deutsche Mathematik editat de THEODOR VAHLEN. Anul II. Caietul 3. August 1937. Leipzig.

Gazeta Matematică Supliment cu Exerciţii. Anul IV. Nr. 5. 1 Februarie 1938. Bucureşti.

Journal des mathématiques élémentaires. Publicat de H. VUIBERT. Anul 62. Nr. 7. 1 Ianuarie 1938. Paris.

Idem. Anul 62. Nr. 8. 15 Ianuarie 1938. Paris.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVII. Nr. 11. 15 Ianuarie 1938. Timişoara. † NICOLAE G. BOTEA de V. ALACI. Asupra numerelor de forma $a^2 + ab + b^2$ de A. GLODEN.

Sphinx, revue mensuelle de questions récréatives. Publicată de M. KRAITCHIK. Anul VIII. Nr. 2. Februarie 1938. Bruxelles.

Ştiinţă şi Progres, revista ştiinţifică a Liceelor Militare. Anul IV. Nr. 7 — 8. Târgu-Mureş.

AXENTE CREANGĂ. *Din trecutul Matematicii.* Sibiu 1937.

MAIOR I. LINTEŞ. *Călăuza unui anteproect de gură de foc.* (Extras din Revista Artileriei 1937).

CERERI

274. Unde se găsesc primele tabele de patrate şi cuburi tipărite în limba română?

Menţionez că în *«Manualul Construcţiunei şi intreţinerei drumurilor»* de SPIRIDON IORCEANU, tipărit în anul 1869 la Bucureşti, este o *«Tablă de pătrate şi cubi»* pentru numerele dela 1 la 1000, (pag. 360—374).

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

P. LEYSSENNE. L'Année preparatoire d'Arithmétique. Paris.

P. LEYSSENNE. La première Année d'Arithmétique. Paris.

P. LEYSSENNE. La deuxième Année d'arithmétique. Paris.

P. LEYSSENNE & F. CUIR. Exercices et problèmes de deuxième Année. Paris.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

Principes d'algebre et d'analyse par E. BOREL (Bibliothèque d'éducation scientifique).

Théorie générale des nombres. Définition fondamentales par E. DUMONT. (Scientia Nr. 35).

Donate de D-l TEOFIL VESCAN.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2895. *Să se determine* m *şi* n *astfel ca expresiunile*

$$x^m\left[2\sin x + \mathrm{L}\frac{1+x}{1-x}\right] \quad \text{şi} \quad x^n[\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x]$$

să aibă limite finite şi diferite de zero, pentru $x = 0$.

I. RIZESCU.

Parantezele fiind nule pentru $x = 0$, iar x^m şi x^n sunt de asemenea nuli atunci când m şi n sunt mai mari ca zero, urmează că pentru a aduce expresiunile date la forma nedeterminată, trebue ca m şi n să fie negativi. Fie.

$$m = -m' \quad \text{şi} \quad n = -n'$$

unde m' şi n' sunt pozitivi. Expresiunile date devin

$$\frac{2\sin x + \mathrm{L}\dfrac{1+x}{1-x}}{x^{m'}} \quad \text{şi} \quad \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^{n'}}$$

care se prezintă sub forma nederminată $\frac{0}{0}$ când $x = 0$. Aplicăm regula lui L'HOSPITAL luând raportul derivatelor:

$$\frac{2}{m'} \cdot \frac{(1-x^2)\cos x + 1}{(1-x^2)\,x^{m'-1}} \quad \text{şi} \quad \frac{\cos^2 x - 1 - x^2}{n' x^{n'-1}(1+x^2)\cos^2 x}.$$

Pentru $x = 0$ numărătorii devin respectiv 4 şi -1. Pentru ca numitorii să fie finiţi şi diferiţi de zero este necesar şi suficient ca

$$m' = n' = 1 \quad \therefore \quad m = n = -1.$$

Cu aceste valori, cele 2 limite sunt respectiv

$$l_1 = 4 \quad \text{şi} \quad l_2 = -1.$$

S'au primit soluţiuni foarte bune dela D-nii: M. ADAM, E. BĂLAN, M. BLUMEN, D. BLUMENFELD, M. BRĂTESCU-DANUBIU, A. BURICHOVICI, GH. M. CĂLIN, T. DIACONESCU, M. M. FLORESCU, N. GEORGESCU-ROEGEN, GR. GOILAV, E. IACOB, LONGIN IONESCU, PAUL IONESCU, I. I. ISTINIE-BREZUICA, S. KATZ, L. KRICHENHOFEN, DAN POPOVICI, DORIN POPESCU, M. SĂVESCU, D. SCHILERU, A. TAUBER, I. C. VASILIU şi L. WEISS.

PROBLEMA 3090. *Să se afle centrul de greutate al ariei situate deasupra axei* Ox, *cuprinsă între curba* $y = ax^3$ *şi dreapta* $y = a^3x$.

GH. I. DUMITRESCU.

Soluţie şi generalizare. Ne propunem să aflăm centrul de greutate al ariei situate deasupra axei Ox, cuprinsă între curba $y = ax^n$ şi dreapta $y = a^n x$, unde $n \geqslant 2$.

Pentru construirea curbei $y = ax^n$ se consideră două cazuri: dacă $n = 2m$, curba are o formă; iar pentru $n = 2m+1$ are altă formă.

Pentru $n = 2m + 1$, avem fig. 1 sau fig. 2 după cum $a > 0$ sau $a < 0$.

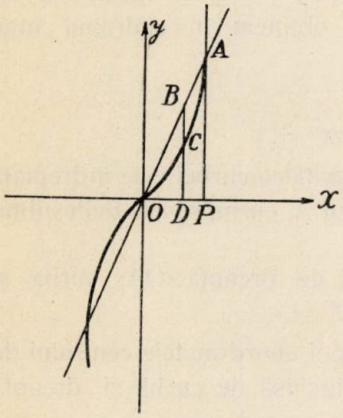


Fig. 1.

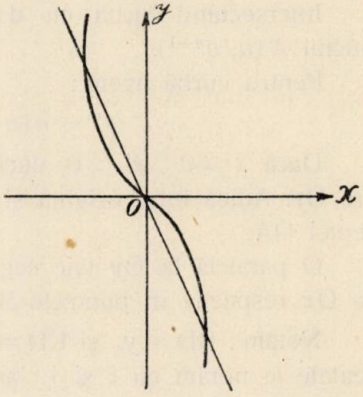


Fig. 2.

Pentru $n = 2m$, avem fig. 3 sau fig. 4 după cum $a > 0$ sau $a < 0$.

Pentru $n = 2m + 1$, curba admite origina ca punct de inflexiune şi este simetrică în raport cu origina.

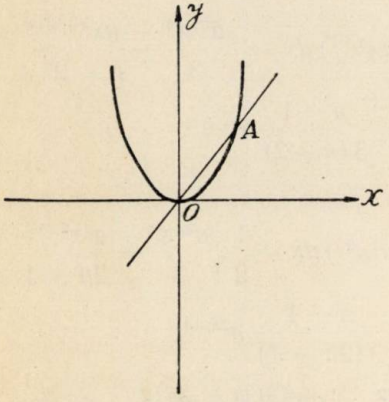


Fig. 3.

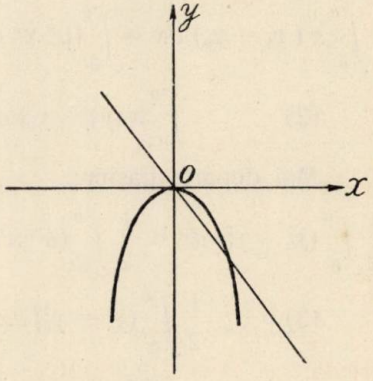


Fig. 4.

Pentru $n = 2m$, axa Ox este tangentă la curbă în origină. Curba admite axa Oy ca axă de simetrie.

Se observă uşor că este suficient să luăm $a > 0$, deoarece cazul $a < 0$ se tratează la fel.

Fie deci curba $y = ax^n$ şi dreapta $y = a^n x$ în ipoteza $a > 0$. Intersectând curba cu dreapta, obţinem în cadranul întâi punctul $A(a, a^{n+1})$.

Pentru curbă avem :

$$y'' = n(n-1)\,ax^{n-2}.$$

Dacă $x > 0$, $y'' > 0$, deci concavitatea curbei este îndreptată spre Oy. Adică între origină şi punctul A, curba se află dedesubtul dreptei OA.

O paralelă la Oy taie segmentul de dreapta OA, curba şi axa Ox respectiv în punctele B, C, D.

Notăm : $\overline{BD} = y_1$ şi $\overline{CD} = y_0$; apoi coordonatele centrului de greutate le notăm cu ξ şi η, iar aria închisă de curbă şi dreaptă cu S.

Putem scrie :

$$(1) \qquad S\xi = \int_0^a x\,(y_1 - y_0)\,dx \;;\; S\eta = \frac{1}{2}\int_0^a (y_1^2 - y_0^2)\,dx.$$

Ordonatele y_1 , y_0 corespund abscisei $\overline{OD} = x$. Avem :

$$y_1 = a^n x \;,\; y_0 = ax^n.$$

Deci :

$$\int_0^a x\,(y_1 - y_0)\,dx = \int_0^a (a^n x^2 - ax^{n+1})\,dx = \left| \frac{a^n x^3}{3} - \frac{ax^{n+2}}{n+2} \right|_0^a$$

$$(2) \qquad \int_0^a x\,(y_1 - y_0)\,dx = \frac{n-1}{3\,(n+2)}\,a^{n+3}.$$

Mai departe găsim :

$$\frac{1}{2}\int_0^a (y_1^2 - y_0^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a (a^{2n}x^2 - a^2x^{2n})\,dx = \frac{1}{2}\left| \frac{a^{2n}x^3}{3} - \frac{a^2x^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^a$$

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\int_0^a (y_1^2 - y_0^2)\,dx = \frac{n-1}{3\,(2n+1)}\,a^{2n+3}.$$

$$S = \text{aria}\,\Delta OAP - \int_0^a ax^n\,dx = \frac{a^{n+2}}{2} - \left| \frac{ax^{n+1}}{n+1} \right|_0^a = \frac{a^{n+2}}{2} - \frac{a^{n+2}}{n+1}.$$

$$(4) \qquad S = \frac{n-1}{2\,(n+1)}\,a^{n+2}.$$

Ţinem seamă de egalităţile (2), (3), (4), relaţiile (1) dau :

$$\xi = \frac{2(n+1)}{3(n+2)} a \ , \ \eta = \frac{2(n+1)}{3(2n+1)} a^{n+1} .$$

In cazul particular $n = 3$, obţinem :

$$\xi = \frac{8}{15} a \ , \ \eta = \frac{8}{21} a^4 .$$

Au rezolvat foarte bine şi au generalizat problema Domnii : N. BLAHA, OCTAVIAN S. IANCULESCU, ALEXANDRU NICULESCU şi TIBERIU POPOVICIU, pe vremea când unii dintre dânşii erau studenţi, iar alţii elevi de liceu.

Au rezolvat foarte bine problema Domnii : ION S. ANTONIU, CEZAR COŞNIŢĂ, ION COŞEREANU şi AL. A. ROŞU pe vremea când erau studenţi.

GH. D.

PROBLEMA 3489. *Să se găsească suma seriei :*

$$K_p^1 + K_p^1 K_p^2 r + K_p^2 K_p^3 r^2 + \ldots + K_p^n K_p^{n+1} r^n + \ldots ,$$

K_m^n *fiind simbolul combinărilor cu repetiţie a* m *obiecte luate câte* n.

M. GHERMĂNESCU.

Problema de mai sus este un caz particular ($m = 1$) al problemei 4401 ce am propus ulterior, dar a cărei soluţie am dat-o în G. M. XLI, p. 593, pierzând din vedere că prezenţa nu fusese încă rezolvată.

A făcut această observare şi D-l G. G. CONSTANTINESCU.

M. G.

PROBLEMA 3926. *Fie* BAC *un triunghiu dreptunghiu în* A, *şi fie* AA_1 *bisectoarea unghiului* BAC. *Cercul cu centrul în* A_1 *şi cu raza* A_1A *taie a doua oară cercul* O *circumscris triunghiului* ABC, *în punctul* D. *Dreapta* DA_1 *taie cercul* A_1 *a doua oară în* E, *iar dreapta* DA *taie ipotenuza* BC *în* F. *Să se arate că patrulaterul* DOEF *nu este niciodată paralelogram.*

JUSTIN I. VÂLCEANU.

Soluţiune. Triunghiul dreptunghiu BAC nu poate fi isoscel, căci în acel caz construcţiunea indicată în problemă nu poate fi executată, cercurile O şi A_1 fiind confundate. Să presupunem, de exemplu, $\overline{AB} < \overline{AC}$. Este cunoscută proprietatea că dreptele AF şi AO sunt simetrice în raport cu AA_1, rezultă de aci că $\overline{AA_1} < \overline{AO}$, deoarece $\overline{AF}$ este perpendiculară pe BC. De altă parte, dreptele DA_1 şi AA_1 fiind simetrice în raport cu BC, iar bisectoarea AA_1 trecând prin I, mijlocul arcului BDC, urmează că dacă $\overline{OE}$ ar fi paralelă cu FD ar fi în prelungirea perpendicularei $\overline{OI}$ la BC, iar punctele E şi I simetrice în raport cu BC. Insă, în acest caz, am avea:

$$\overline{AF} = \overline{FD} = \overline{OE} = \overline{OI} = \overline{OA} > \overline{AA_1};$$

adică perpendiculara $\overline{AF}$ mai mare ca oblica $\overline{AA_1}$ dusă din acelaşi punct la aceeaşi dreaptă BC, ceea ce este absurd.

Au rezolvat problema pe diferite căi Domnii: NICOLAE N. MIHĂILEANU (Lic. Constanţa); HARALAMB P. IONESCU-BISS (Lic. Olteniţa); N. N. ALDEA (student); AVRAM N. CONSTANTIN (Şcoala Militară Geniu), AURELIAN I. STAN MIRCEA D. MOTOC, GH. OPRESCU, I. G. ZAMFIRESCU, VLADIMIR I. CRIVĂŢ, MARIN P. CHIŢU, C. GH. LUPESCU, TITU GH. VELICESCu, ALEX. H. HALPERIN.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4173. *Să se prelungească segmentul dat* $\overline{AB}$ *cu o lungime* $\overline{BC}$ *egală cu o lungime dată* a, *construind noua extremitate* C *numai cu compasul. Să se construiască apoi de asemenea numai cu compasul, un al doilea punct al perpendicularei ridicată în punctul* B *pe* AB.

O. N. ŢINO.

Vom deosebi două cazuri: α) lungimea dată *a* mai mică sau cel mult egală cu segmentul dat $\overline{AB}$; β) lungimea dată *a* mai mare ca segmentul dat AB.

α. Presupunem noua extremitate C construită. Simetricul său C' în raport cu punctul B se găseşte pe segmentul $\overline{BA}$ şi îl obţinem trăgând cercul cu centrul în B şi cu raza cât *a*.

Punctele C' şi C, fiind extremităţile unui diametru în cercul B, distanţa între ele pe cerc este cât un semicerc. Prin urmare

pentru ca invers plecând dela punctul C′ să determinăm punctul C, trebue să determinăm extremitatea semicercului cu centrul în B, cu raza a şi origina în C′.

Noi ştim să construim în orice cerc dat un arc a cărui măsură este $\frac{\pi}{3}$ (luând o coardă egală cu raza), iar într'un semicerc sunt cuprinse trei arce de măsură egală cu $\frac{\pi}{3}$.

Din aceste consideraţiuni rezultă următoarea construcţie: Din punctul B centru cu raza cât lungimea dată a construim un cerc şi însemnăm cu C′ punctul unde el taie segmentul $\overline{AB}$. Apoi, păstrând aceeaşi rază măsurăm pe cercul tras plecând din C′ consecutiv trei arce C′M, MN, NC având coarda de lungime a. Punctul C astfel obţinut este extremitatea cerută.

β. Dacă lungimea dată $a > \overline{AB}$, atunci cu o rază cât $\overline{AB}$ descompunem lungimea a în segmente egale cu $\overline{AB}$ plecând dela una din extremităţile ei. Operaţia se poate face exact sau nu; ultimul segment poate fi egal sau mai mic ca $\overline{AB}$. Exprimând aritmetic această operaţie, avem: $a = n \cdot \overline{AB} + b$, unde n e întreg (pozitiv), iar $b \leqq \overline{AB}$.

In acest caz vom prelungi în primul rând segmentul $\overline{AB}$ cu o lungime BB_1 egală cu b, apoi segmentul $\overline{AB_1}$ cu o lungime $\overline{B_1B_2}$ egală cu $\overline{AB}$, segmentul $\overline{B_1B_2}$ cu o lungime egală cu $\overline{AB}$ şi aşa mai departe. După a $(n+1)^a$ operaţie punctul obţinut este extremitatea cerută C. Construcţiunea indicată este posibilă, deoarece la prima şi a doua suntem în condiţiunile primului caz, iar în celelalte este deajuns să observăm că în cazul când lungimea a este egală cu $\overline{AB}$, *nu este necesar ca segmentul* $\overline{AB}$ *să fie trasat* pentru a putea construi în felul arătat extremitatea C.

Pentru a doua construcţiune, a unui al doilea punct al perpendicularei în B pe $\overline{AB}$ este de ajuns să considerăm două, din punctele însemnate, simetrice în raport cu B şi cu o rază arbitrară mai mare ca jumătatea distanţei lor să descriem cercurile cu centrele în cele două puncte simetrice. Unul oarecare din punctele de intersecţie ale acestor două cercuri este punctul cerut.

Au rezolvat problema considerând cazuri Domnii: S-LT CONSTANTIN AVRAM, MIRCEA MĂNESCU, DIMITRIE D. MAVRODIN (Elevi Lic. M. Eminescu Bucureşti); VINTILĂ GRIGORESCU, ION GH. ŞABAC (Elevi Lic. Milit. Tg.); MARTIN ZIFF, MARIUS MARGULIUS.

Au examinat numai cazul $a < \overline{AB}$ următorii rezolvitori: TH. N. PANAITE, GH. I. BOIANGIU, ILIE IOAN ŢIŢEICA, MIRCEA POSTELNICESCU, PRED. D. BUNGEŢEANU, GEORGE SILAŞ, ALFRED H. GEIER (Studenţi Cluj); CEZAR IVĂNESCU, COSTIN N. TRUFINESCU, NICOLAE D. ZANE, VASILE CEAUŞESCU.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4196. *Fie* D *piciorul bisectoarei (interioară sau exterioară) a unghiului* A *în triunghiul* ABC. *Se proiectează* A *în* A_1 *pe* BC, *apoi* B *în* B_1 *pe* AD *şi* D *în* D_1 *pe* AC. *Să se arate că* A_1, B_1, D_1 *sunt în linie dreaptă.*

S-LT A. I. STAN.

Soluţiune dată de D-rele: DORINA FABIUS, MARGARETA LEBER şi D-nii: N. N. ALDEA, IANCU SAGER, IOAN CURCHI, CEZAR IVĂNESCU, ALFRED GEIER, GEORGE SILAŞ (Studenţi Matematice); S-LT ION PARAPEANU, S-LT TH. PANAITE, ION I. PETRESCU, PANAIT C. MAZILU (Elev Lic. Intern. Iaşi); VASILE I. CEAUŞESCU, GHEORGHE ŞTIRBU, VICTOR COZMA (Elevi Lic. milit. Iaşi); ALEXANDRU D. STOICA (Lic. Marele Voevod Mihai); N. AL. BORZA (Elev cl. VII-a Cluj); NICOLAE PATRAULEA, M. C. POSTELNICESCU (Liceul militar „N. Filipescu"); MARTIN S. ZIFF (Sc. Pol. Bucur.) şi GH. M. ŞEREMET.

Fie D piciorul bisectoarei interioare a unghiului A. Cercurile de diametre $\overline{AB}$ şi $\overline{AD}$ trec respectiv prin perechile de puncte B_1, A_1 şi A_1, D_1. In aceste două cercuri avem respectiv:

$$\sphericalangle DA_1B_1 = \sphericalangle B_1A_1B = \sphericalangle B_1AB = \sphericalangle B_1AC$$
$$= \sphericalangle DAD_1 = \pi - \sphericalangle DA_1D_1 \qquad (1)$$

sau încă:

$$\sphericalangle DA_1B + \sphericalangle DA_1D_1 = \pi,$$

adică unghiul sumă $B_1A_1D_1$ este un unghiu cu laturile în prelungire.

2. Dacă D′ este piciorul bisectoarei exterioare a unghiului A, iar D'_1 şi B'_1 respectiv proiecţiunile punctelor D şi B pe AC şi AD′, în cercurile de diametre $\overline{AB}$ şi $\overline{AD'}$ avem:

$$\sphericalangle D'_1A_1A = \pi - \sphericalangle D'_1D'A = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle D'AD'_1$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sphericalangle B'_1AC = \pi - \sphericalangle B'_1BA = \pi - \sphericalangle B'_1A_1A,$$

sau încă:

$$\sphericalangle D'_1A_1A + \sphericalangle B'_1A_1A = \pi. \qquad (2)$$

C. C. T. D.

Observări. 1°. D-l N. N. MIHĂILEANU (Student Bucureşti) arată că cele două drepte $D_1A_1B_1$ şi $D'_1A_1B'_1$ sunt două drepte perpendiculare (formând cu BC unghiuri complementare).

2°. Mai mulţi rezolvitori atrag atenţia că problema a mai fost propusă de autor în *R. M. T.* sub Nr. 1018 an. XI. Că apoi a fost reprodusă în *Boletin Matematico* şi rezolvată în Nr. 10 an. IV cu soluţia dată de D-nii: O. MARQUEZ şi A. PANTA unde se atrage atenţia că problema poate fi rezolvată şi cu ajutorul reciprocei teoremii lui MENELAUS.

3°. Au rezolvat problema cu ajutorul reciprocei teoremii lui MENELAUS: D-ra PREDUŢA D. BUNGEŢEANU şi D-nii: CEZAR IVĂNESCU (Student Iaşi); MIRCEA LEONTE A. NEGREA, PETRE M. VARLAM (Şcoala Polit. Bucureşti); S-LT AUREL EM. BĂDESCU, DIMITRIE D. MAVRODIN (Lic. M. Eminescu, Bucureşti); NIC. N. VELICESCU (Muscel); TRAIAN M. PREDOIESCU (Lic. militar Craiova); IOAN GH. SABAC, ILIE IOAN ŢIŢEICA, GHEORGHE I. BOIANGIU (Elevi Lic. mil. „N. Filipescu"); VASILE V. GHIOCEL (bacaulaureat); MARIUS MARGULIUS (Bucureşti).

4°. Domnul CEZAR IVĂNESCU a generalizat problema pentru *două ceviene izogonale,* generalizare care a fost publicată ca problemă propusă sub *Nr. 4265* în *G. M.* Ulterior acestei propuneri D-l MIRCEA ADAM (Constanţa) dă o soluţiune comună celor două probleme *4196* şi *4265* şi următoarea generalizare: *Fie* M_a M_b M_c *triunghiul podar al unui punct* M *în raport cu un triunghiu* ABC. *Prin punctele* M_a, M_b, M_c *se duc drepte izocline în raport cu laturile* BC, CA, AB *ale triunghiului* ABC, *formând un triunghiu* $A_1B_1C_1$. *a) Triunghiurile* ABC *şi* $A_1B_1C_1$ *sunt asemenea: b) Dreptele* AA_1, BB_1, CC_1 *sunt perpendiculare pe* MA_1, MB_1, MC_1; *c) Unghiurile* AMA_1, BMB_1, CMC_1 *sunt egale.* Demonstrarea este imediată pe figura construită.

D-l CEZAR IVĂNESCU arată că dacă consideră *cele două ceviene izogonale* perpendiculare pe primele luate, ele dau o dreaptă Δ′ perpendiculară pe dreapta Δ corespunzătoare primelor două. Această proprietate, particularizată pentru cazul bisectoarelor, dă proprietatea dreptelor Δ şi Δ′ arătată de D-l N. N. MIHĂILEANU.

5°. Tot cu ocaziunea soluționării problemelor *4196* și *4265* D-l TH. G. COCEA observă că *două izogonale* ale unghiului A anume AD și AE față de laturile AB și AC, sunt de asemenea izogonale privite față cu laturile AC și AB; de altă parte vârfurile B și C în construcția problemii pot să-și schimbe rolul între ele, astfel că pot fi obținute pentru aceeași pereche de izogonale AD și AE patru grupe de câte trei puncte colineare, determinând astfel patru drepte Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, reduse numai la două în cazul când ele coincid în bisectoarea (interioară sau exterioară). Regăsește proprietatea semnalată de D-l N. N. MIHĂILEANU considerând și dreptele corespunzătoare bisectoarei exterioare. In cazul general găsește că triunghiurile, formate de dreptele Δ corespunzătoare la trei vârfuri, sunt asemenea cu triunghiul de referință ABC. In urmă particularizând izogonalele relative la un vârf și luând ca exemplu înălțimea corespunzătoare și diametrul cercului circumscris trecând prin acel vârf găsește proprietăți interesante în triunghiu și pentru triunghiurile formate de triplele de drepte Δ.

6°. Soluțiunea problemei *4265* a fost publicată în G. M. Vol. XXXIX, pag. 115.

O. N. Ț.

PROBLEMA 4379. *Să se rezolve ecuațiunea:*

$$(\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x)^3 = \sin^3 x + \cos^3 x + \operatorname{tg}^3 x.$$

BOIAN IOAN.

Folosind identitatea:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

ecuația dată se reduce la:

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \operatorname{tg} x)(\cos x + \operatorname{tg} x) = 0,$$

iar arcele ce verifică ecuația le găsim din:

(1) $\sin x + \cos x = 0 \quad \therefore \operatorname{tg} x = -1 \qquad x_1 = k\pi + \frac{3\pi}{4}, \; x'_1 = 2k\pi + \frac{7\pi}{4}$

(2) $\sin x = 0 \qquad \therefore x = 0 \qquad x_2 = k\pi$

(3) $1 + \cos x = 0 \qquad \therefore \cos x = -1 \qquad x_3 = (2k+1)\pi$

(4) $\cos + \operatorname{tg} x = 0 \qquad \therefore \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \text{si} x = \frac{1 - 2{,}23606}{2} = \frac{-1{,}23606}{2} = -0{,}61803$$

$$\sin(-x) = 0{,}61803 \quad \log \sin(-x) = \bar{1}{,}79101 \; ; \; -x = 38^\circ 10' 23''$$

$$x = -38^\circ 10' 23'' = 321^\circ 49' 37''$$

$$x_4 = 2k\pi + 321^\circ 49' 37'' \; ; \; x'_4 = (2k+1)\pi - 321^\circ 49' 37''.$$

Pentru x'_1 mai putem lua valoarea:

$$x'_1 = 2k\pi - 45^0.$$

Au dat soluţiile de mai sus Domnii: CEAUŞESCU VASILE (E. pl. m., cl. VII-a B, L. M. Iaşi), CHIRIŢĂ M. MIHAIL (Şc. ofiţeri marină, Constanţa), COJOCARU P. PETRE (Piatra Neamţ), MÂNAC M. (Lic. militar „N. Filipescu" dela Mânăstirea Dealului) şi GAVRILESCU N. CONSTANTIN (cl. VII-a A, L. M. Iaşi), care a calculat aproximativ arcul x_4. Au dat soluţiile fără a calcula arcul (x_4): Domnişoara CARACUDOVICI MARGARETA şi Domnii: CEAUŞESCU F. VASILE (cl. VII-a B, Lic. Militar „Mihai Viteazul" Târgul Mureş), BUZINCU I. IOAN (L. M. Iaşi), ŞABAC GH. T. (cl. VII-a Lic. M. „N. Filipescu" dela Mânăstirea Dealului).

Au dat greşite unele soluţii, aşa cum se arată în dreptul fiecăruia, Domnii: BUCUR N. VIRGIL Ploeşti (x_1); COSTESCU COSTEL (Lic. M. Iaşi), (x_1); FLORESCU HARALAMBIE, Peşteana-Vulcan, Gorj, (x_3).

Au dat numai soluţiunile arătate în dreptul fiecăruia, Domnii, AMĂRĂŞTEANU F. MARCEL, Craiova (x_2); PREDOESCU I. MARIN: Şc. Politechnică (x_2) şi o alta ce nu verifică.

Generalizare: Ecuaţiunea dată se poate scrie astfel:

$$(5) \qquad (f_1+f_2+f_3)^3 = f_1^3+f_2^3+f_3^3$$

în care f_1, f_2, f_3 sunt funcţiuni de aceeaşi variabilă.

Soluţiunile ecuaţiunii sunt:

$$(I) \qquad f_1 = f_2 = f_3 = 0$$

şi

$$(II) \qquad \begin{cases} f_m + f_n = 0 \\ f_p = a \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 1, 2, 3 \\ n = 2, 3, 1 \end{cases} \qquad p = 3, 1, 2,$$

iar a o constantă oarecare. Aceste soluţiuni sunt în realitate şi condiţiuni pentru ca (5) să devină identitate.

Soluţiunile din (I) au fost date numai de Domnul STĂNESCU M. EMIL (Lic. M. Craiova):

$\sin x = 0 \therefore x = k\pi$; $\operatorname{tg} x = 0 \therefore x = k\pi$; $\cos x = 0 \therefore x_5 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

ultima verificând ecuaţia în modul următor:

$$(1+\infty)^3 = 1^3 + (\infty)^3 \quad \therefore \quad \infty = \infty$$

dar acest corespondent nu a dat celelalte soluţiuni din (1), (3) şi (4).

Soluţiunile (II) pentru cazul particular al problemei 4379, unde f_1, f_2, f_3 sunt funcţiuni trigonometrice legate între ele aşa cum ştim, mai dau o soluţiune şi anume din cazul sistemului :

$$\cos x + \operatorname{tg} x = 0 \qquad \sin x = a$$

care duce la condiţiile :

$$(\alpha)\quad a^2 - a - 1 = 0 \qquad (\beta)\quad a^2 + a - 1 = 0.$$

Condiţia (α) ne-a dat soluţia x_4, iar (β) ne dă soluţia :

$$\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2{,}23606 - 1}{2} = 0{,}61803 \quad x_6 = 2k\pi + 38^0 10' 23''.$$

Această soluţie verifică ecuaţia dată prin faptul că vom lua : $\cos x = -\operatorname{tg} x$, iar pentru : $\cos x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Această ultimă soluţiune nu a fost dată de niciun corespondent. O extindere mai mare a generalizării nu mai prezintă importanţă.

Soluţiile trimise de : Domnişoara BĂLĂCEANU ANGELA şi de Domnii : BĂLĂCEANU A. BOIAN I. (!), DOBRESCU D. P., GRIGORESCU VINTILĂ, MARIN DAN, MAVRODIN D. D., MIHALCEA ST. D., STOICESCU T. şi ŞTEFĂNESCU D. N. nu au fost cercetate, căci nu au mai fost găsite. Indicarea numelor a fost luată după copertă, de membrul însărcinat cu redactarea, D-l GH. V. N.

PROBLEMA 4461. 1°. *Paralelele duse dintr'un punct al elipsei lui* STEINER *circumscrisă, la laturile unui triunghiu* ABC, *întâlnesc laturile triunghiului în şase puncte situate pe două drepte* Δ_1, Δ_2.

2°. *Fie* I *punctul comun lui* Δ_1 *şi* Δ_2 : a) *paralele duse prin* B *şi* C *la* Δ_1 *şi* Δ_2 *se întâlnesc într'un punct* O_1 *situat pe* AI ; b) O_1 *şi punctele* O_2 *şi* O_3 *obţinute în mod analog, sunt coliniare.*

3°. *Centrul de greutate al triunghiului* ABC *se găseşte pe dreapta ce uneşte polurile lui* Δ_1 *şi* Δ_2 *faţă de* ABC.

GH. D. SIMIONESCU

Soluție dată de D-nul I. I. ȚIȚEICA. Alegem triunghiul ABC ca sistem de referință pentru coordonate baricentrice. Fie $P(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ un punct al elipsei lui STEINER circumscrisă.

$$\alpha_0(\beta+\gamma)-(\beta_0+\gamma_0)\alpha=0$$
$$\beta_0(\gamma+\alpha)-(\gamma_0+\alpha_0)\beta=0$$
$$\gamma_0(\alpha+\beta)-(\alpha_0+\beta_0)\gamma=0.$$

Aceste drepte întâlnesc laturile AB, BC, CA respectiv în punctele:

$$A_b(\alpha_0, \beta_0+\gamma_0, 0)\ ;\ B_c(0, \beta_0, \gamma_0+\alpha_0)\ ;\ C_a(\alpha_0+\beta_0, 0, \gamma_0),$$

iar laturile AC, BA, CB respectiv în punctele:

$$A_c(\alpha_0, 0, \beta_0+\gamma_0)\ ;\ B_a(\gamma_0+\alpha_0, \beta_0, 0)\ ;\ C_b(0, \alpha_0+\beta_0, \gamma_0).$$

Pentruca punctele A_b, B_c, C_a să fie colineare, trebue ca:

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_0 & \beta_0+\gamma_0 & 0\\ 0 & \beta_0 & \gamma_0+\alpha_0\\ \alpha_0+\beta_0 & 0 & \gamma_0\end{vmatrix}=(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)(\alpha_0\beta_0+\beta_0\gamma_0+\gamma_0\alpha_0)=0$$

condiție îndeplinită, deoarece punctul P este pe elipsa lui STEINER.

Punctele A_c, B_a, C_b sunt și ele colineare, căci condiția este ca un alt determinant $D'=D$ să fie nul.

2°. Ecuația dreptelor $\Delta_1\equiv A_b B_c C_a$, $\Delta_2\equiv A_c B_a C_b$ sunt:

$$(\Delta_1)\quad(\beta_0+\gamma_0)(\gamma_0+\alpha_0)\alpha-\alpha_0(\gamma_0+\alpha_0)\beta+\alpha_0\beta_0\gamma=0$$
$$(\Delta_2)\quad\beta_0(\beta_0+\gamma_0)\alpha-(\beta_0+\gamma_0)(\gamma_0+\alpha_0)\beta-\alpha_0\beta_0\gamma=0,$$

iar punctul lor de intersecție este:

$$I\ [\alpha_0\beta_0(\gamma_0+\alpha_0)\ ,\ \alpha_0\beta_0(\beta_0+\gamma_0)\ ,\ -\gamma_0(\beta_0+\gamma_0)(\gamma_0+\alpha_0)]$$

unde s'a lăsat la o parte factorul $(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)$.

Ținând seama că punctul P este pe elipsa lui STEINER, deci $\beta_0(\gamma_0+\gamma_0)=-\alpha_0\gamma_0$ etc., coordonatele lui I se mai pot scrie $I(\alpha_0^2, \beta_0^2, \gamma_0^2)$.

a) Paralela dusă prin B la Δ_1 este:

$$(\gamma_0+\alpha_0)\alpha+\alpha_0\gamma=0\quad\text{sau:}\quad\gamma_0\alpha-\beta_0\gamma=0,$$

iar cea dusă prin C la Δ_2:

$$\beta_0\alpha-\gamma_0\beta=0$$

Punctul lor de intersecție $O_1(\beta_0\gamma_0, \beta_0^2, \gamma_0^2)$ verifică ecuația dreptei AI:

$$\beta_0^2\gamma-\gamma_0^2\beta=0.$$

Analog se arată că punctele $O_2(\alpha_0^2, \alpha_0\gamma_0, \gamma_0^2)$ şi $O_3(\alpha_2^0, \beta_0^2 \alpha_0\beta_0)$, se găsesc respectiv pe dreptele BI şi CI.

b) Punctele O_1, O_2, O_3 sunt pe polara trilineară a lui P, căci înlocuind coordonatele curente ale acestei drepte:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} + \frac{\beta}{\beta_0} + \frac{\gamma}{\gamma_0} = 0$$

prin coordonatele celor trei puncte, găsim:

$$\alpha_0\beta_0 + \beta_0\gamma_0 + \gamma_0\alpha_0 = 0$$

verificată de P $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ de pe elipsa lui STEINER.

3°. Polurile trilineare ale lui Δ_1 şi Δ_2 sunt:

$$P_1(\alpha_0^2\beta_0, \beta_0^2\gamma_0, \gamma_0^2\alpha_0) \; ; \; P_2(\alpha_0^2\gamma_0, \beta_0^2\alpha_0, \gamma_0^2\beta_0)$$

Ele sunt colineare cu G (1, 1, 1) deoarece:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_0^2\beta_0 & \beta_0^2\gamma_0 & \gamma_0^2\alpha_0 \\ \alpha_0^2\gamma_0 & \beta_0^2\alpha_0 & \gamma_0^2\beta_0 \end{vmatrix} = \alpha_0\beta_0\gamma_0 \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_0} & \frac{1}{\beta_0} & \frac{1}{\gamma_0} \\ \alpha_0\beta_0 & \beta_0\gamma_0 & \gamma_0\alpha_0 \\ \alpha_0\gamma_0 & \beta_0\alpha_0 & \gamma_0\beta_0 \end{vmatrix} = 0$$

căci adunând coloanele II-a şi III-a la prima obţinem toate elementele primei coloane nule.

Notă. Proprietăţile din această problemă le-am dedus din studiul triunghiurilor triomologice [1]). Prima proprietate am şi dat-o ca un caz particular în articolul citat sub *(a)*.

Să observăm că centrul de greutate are ca dreaptă polară dreapta dela infinit şi drept conică polară elipsa lui STEINER. Unind un punct de pe elipsa lui STEINER cu punctele unde dreapta dela infinit taie laturile triunghiului ABC, avem cele trei paralele la laturile triunghiului, care taie aceste laturi în 6 puncte situate pe două drepte Δ_1, Δ_2. Δ_1, Δ_2 şi dreapta dela infinit formează deci un triunghiu triomologic cu ABC, iar centrele lor de omologie sunt colineare. Or O_1, O_2, O_3 sunt tocmai aceste centre de omologie. Aceasta demonstrează proprietăţile dela punctul 2°.

Proprietatea de sub 3° e o consecinţă a următoarei propoziţiuni pe care o voi propune în „G. M.“:

Dacă ABC *şi* A'B'C' *sunt două triunghiuri triomologice cu centrele de omologie colineare, polurile laturilor lui* ABC *faţă de* A'B'C' *şi polurile laturilor lui* A'B'C' *faţă de* ABC, *sunt şase puncte colineare.*

1) A se vedea articolele: *a)* „Sur les triangles trihomologiques et triorthologiques“ par M. G. D. SIMIONESCU, „Bull. de Math. et de Physiques“ de l'école Polytechnique Roi Carol II, Bucarest, 1936 fasc. 16, 17, 18, pag. 191. *b)* „Triunghiuri triomologice cu centrele de omologie colineare“, G. M. vol. XLII, pag. 296.

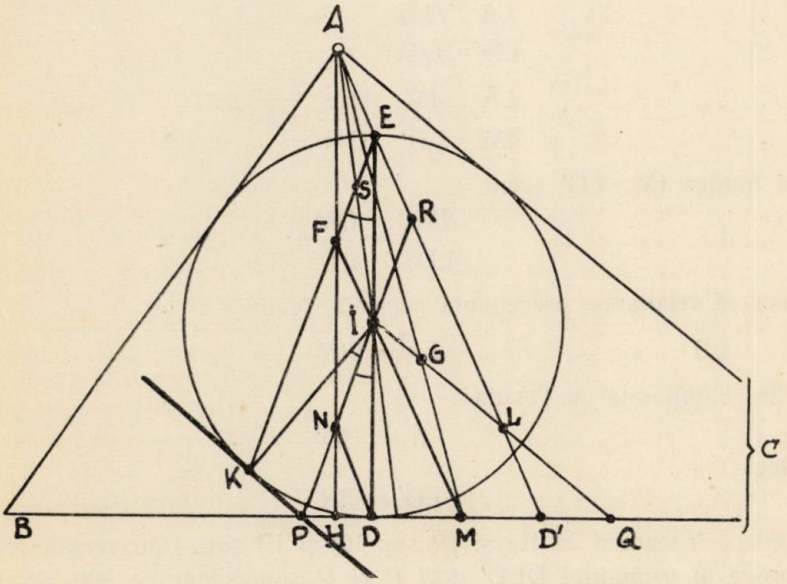
PROBLEMA 4514. *Fie* G *şi* I *centrul de greutate şi centrul unuia din cercurile tritangente laturilor unui triunghiu* ABC.

Să se demonstreze că transversala reciprocă a dreptei IG *este tangentă la cercul celor nouă puncte ale triunghiului* ABC.

G-L GH. BUICLIU.

Vom demonstra proprietatea pentru cazul cercului înscris I, acelaşi raţionament se întrebuinţează şi pentru cazul cercurilor exînscrise.

Fie: D punctul de tangenţă al lui I cu BC, H şi M piciorul înălţimii şi al medianei ce pleacă din A, E diametralul opus lui D în I, D′ intersecţia lui IG cu BC, Q şi L intersecţiile lui IG cu BC şi AE, S mijlocul lui AI, F şi K intersecţia lui ES cu IM şi cu cercul I, N intersecţia lui AF cu parabola din D la IM, P şi R intersecţia lui IN cu BC şi AE.



Se ştie că D′ este punctul de tangenţă a lui BC cu cercul I_a şi cum

$$BD = D'C$$

M este mijlocul lui DD′ şi deci MIF este paralelă cu AED′ ca unind mijloacele laturilor ED, D′D în triunghiul EDD′. Apoi MI

trecând prin mijlocul lui DD' şi fiind paralelă cu laturile paralele DN, D'A ale trapezului DNAD' punctul F va fi mijlocul lui AN; deoarece AE, IF sunt paralele, iar S este mijlocul lui AI figura IFAE este un paralelogram, deci AF fiind paralelă cu EI se confundă cu înălţimea AH. Rezultă din cele de până aici că IF este egală şi paralelă cu AE şi DN şi deoarece F este mijlocul lui AN urmează că IF este egală şi paralelă şi cu ER, deci EFK este paralelă cu RIP.

Avem deci

(1) $$2IM = ED'$$

(2) $$FI = AE = ER = ND.$$

Triunghiul MAD' tăiat de transversala QLG dă

$$\frac{GM}{GA} \cdot \frac{LA}{LD'} \cdot \frac{QD'}{QM} = 1$$

$$\therefore \frac{LA}{LD'} \cdot \frac{QD'}{QM} = 2$$

$$\therefore \frac{LA}{IM} \cdot \frac{IM}{LD'} \cdot \frac{QD'}{QM} = 2$$

şi fiindcă IM ∥ LD' avem

$$\frac{IM}{LD'} = \frac{QM}{QD'}$$

aşa că relaţiunea precedentă acesteia devine

(3) $$LA = 2IM$$

care comparată cu (1) dă:

$$LA = ED'$$

deci

$$LD' = ER$$

ceeace înseamnă că IG şi IR sau IQ şi IP sunt transversale reciproce în triunghiul DED' deci P şi Q sunt simetrice faţă de M.

S'a arătat precedent că EK ∥ IP deci

$$\measuredangle KED = \measuredangle PID$$

dar $\measuredangle KDD$ are ca măsură jumătate din arcul DK, deci

$$\measuredangle KIP = \measuredangle PID$$

şi prin urmare PK este tangentă în K la I şi

$$\overline{PK}^2 = \overline{PD}^2 = PH \times PM$$

adică punctul K este punctul de tangenţă al cercului I cu un cerc care trece prin H şi M. Se ştie însă că singurul cerc trecând prin H şi M şi tangent lui I este cercul celor 9 puncte O_9 al triunghiului ABC şi că punctul de tangenţă al cercurilor O_9 şi I este punctul lui FEUERBACH al triunghiului ABC.

Se arată la fel că punctele P corespunzătoare de pe laturile AB şi AC se află tot atât pe tangenta la O_9 sau I în punctul K al lui FEUERBACH.

Notă. 1°. D-l D. O. SACTER a rezolvat foarte bine problema prin coordonate baricentrice. D-sa a stabilit ecuaţia locului punctelor M pentru care transversala reciprocă a dreptei GM este tangentă la O_9 şi apoi a dovedit că acel loc trece prin I, I_a, I_b, I_c.

Metoda elementară pe care am dat-o în soluţia precedentă este la îndemâna tuturor şi are avantajul că determină şi punctul de tangenţă.

2°. Urmând o cale analoagă se poate demonstra şi teorema reciprocă anume tangenta la I în punctul lui FEUERBACH este transversala reciprocă a lui IG. Atât proprietatea directă cât şi cea reciprocă sunt prea frumoase pentru a fi necunoscute. E probabil ca anterior unii geometri să se fi ocupat de ele. Ar fi interesant dacă s'ar găsi cine şi unde.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4707. *Să se demonstreze că dacă ecuaţia*

(1) $$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

are toate rădăcinile reale, atunci şi ecuaţia

(2) $$x^3 + \sqrt[3]{2}px + q = 0$$

are toate rădăcinile reale. Reciproca este adevărată?

M. GHERMĂNESCU.

Au dat soluţie D-nii: A. ARSAVSCHI, I. BUZINCU, V. ECKSTEIN, MIRCEA LEONTE NEGREA şi ŢIŢEICA.

Dacă ecuaţia dată are toate rădăcinile reale, atunci şi ecuaţia derivată

(3) $$4x^3 + 2px + q = 0$$

va avea toate rădăcinile reale. Ori, condiţiunea necesară şi suficientă pentruca ecuaţia

$$x^3 + ux + v = 0$$

să aibă toate rădăcinile reale este $4u^3 + 27v^2 \leqslant 0$, care este verificată de coeficienţii ecuaţiilor (2) şi (3).

Reciproca este evident neadevărată, căci la ecuaţia derivatei (3) corespund o infinitate de ecuaţii (1) în cari r este arbitrar şi se poate întotdeauna determina r astfel ca (1) să aibă rădăcini imaginare.

Există însă valori ale lui r pentru cari (1) are toate rădăcinile reale, odată cu (2) şi (3). Este interesant de găsit aceste valori, când p şi q sunt daţi, în ipoteza enunţului, ceeace n'au făcut rezolvitorii de mai sus.

M. G.

PROBLEMA 4733. *Dacă primii trei coeficienţi ai unei ecuaţii algebrice de gradul* n, *cu coeficienţi reali,*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

sunt legaţi prin relaţiunea $(n-1)\,a_1^2 - n a_0 a_2 = 0$, *atunci ecuaţia are neapărat rădăcini imaginare.*

M. GHERMĂNESCU.

1°. *Soluţie* dată de D-nii: G. G. CONSTANTINESCU, HERMAN VICTOR, TR. PREDOESCU, D. RIPIANU şi N. ŞTEFĂNESCU.

Dacă ecuaţia dată ar avea toate rădăcinile reale, acelaşi lucru s'ar putea spune şi despre ecuaţiile derivate, în particular, despre ecuaţia derivată de ordinul $n-2$. Aceasta este, după simplificări

$$n(n-1)\,a_0 x^2 + 2(n-1)\,a_1 x + 2a_2 = 0,$$

al cărei realizant simplificat

$$(n-1)\,a_1^2 - 2n a_0 a_2 = (n-1)\,a_1^2 - 2(n-1)\,a_1^2 = -(n-1)\,a_1^2 < 0$$

arată contrariul. Deci ecuaţia propusă are rădăcini imaginare.

2°. *Soluţie* dată de D-nii: P. COJOCARU, M. L. NEGREA şi I. ŢIŢEICA.

S'a arătat cu ocazia rezolvării problemei 4472 (G. M. XLI, p. 541), (NEUBERG) că ecuaţia dată are rădăcini imaginare dacă

$$(n-1)\,a_1^2 - 2n a_0 a_2 < 0,$$

Restul ca mai sus.

3°. *Soluție* dată de D-nii: MIRCEA L. NEGREA și BIVOLARU LIVIUS.

Calculând suma pătratelor rădăcinilor ecuației date, găsim

$$S_2 = \sum_1^n x_i^2 = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0} = \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{a_0^2}.$$

Dacă toate rădăcinile sunt reale, S_2 este pozitiv. Insă

$$a_1^2 - 2a_0a_2 = a_1^2 - \frac{2(n-1)}{n}a_1^2 = -\frac{(n-2)}{n}a_1^2 \leqslant 0$$

ceeace arată că nu toate rădăcinile sunt reale.

4°. *Soluție* dată de D-l BAL LASCU (student, Cluj). Dacă ecuația dată are toate rădăcinile reale, de aceeași proprietate se bucură și ecuațiile

$$f(x) + kf'(x) = 0,$$

unde k este real. Ori

$$f(x) + kf'(x) = a_0x^n + (a_1 + kna_0)x^{n-1}$$

$$+ [a_2 + k(n-1)a_1]x^{n-2} + [a_3 + k(n-2)a_2]x^{n-3} + \ldots = 0$$

și dacă luăm

$$-k = \frac{a_1}{na_0} = \frac{a_2}{(n-1)a_1}$$

ecuația de mai sus devine

$$f(x) - \frac{a_1}{na_0}f'(x) = a_0x^n + \left[a_3 - \frac{(n-2)a_1a_2}{na_0}\right]x^{n-3} + \ldots = 0.$$

Această ecuație având o lacună de doi termeni, are neapărat rădăcini imaginare, deci la fel și ecuația inițială.

Notă. 1°. D-l D. MAVRODIN efectuiază schimbarea de necunoscută $x = X - \frac{a_1}{na_0}$ și conchide că relația din enunț trebue modificată, ceeace se vede că nu este adevărat. D-sa a simțit că în această problemă este vorba de aplicarea teoremei *lacunelor* dar calea pe care a pornit l-a obligat să... forțeze această aplicare, ajungând la o concluzie injustă. Ii era suficient să observe că în ecuația transformată

$$a_0X^n + \left[a_2 - \frac{(n-1)n_1^2}{2na_0}\right]X^{n-2} + \ldots = 0$$

coeficienţii lui X^n şi X^{n-2} sunt de acelaşi semn în baza enunţului şi atunci, conform teoremei lacunelor, ecuaţia are rădăcini imaginare.

2°. D-l I. BUZINCU s'a întemeiat pe problema 4781.

3°. D-l TILICĂ ŞTEFAN s'a inspirat din soluţia elegantă dată problemei 4472 de D-l A. STOICA, dar la concluzii s'a cam încurcat.

M. G.

PROBLEMA 4858. *Fie* M *punctul de întâlnire al diagonalelor* AC *şi* BD *ale patrulaterului* ABCD *înscris în cercul* O. *Perpendiculara dusă prin* M *pe* OM *intersectează pe* AB *şi* CD *respectiv în* M_1 *şi* M_2.

Să se arate că patrulaterul format de centrele de greutate ale triunghiurilor AM_1M_2, BM_1M_2, CM_1M_2 *şi* DM_1M_2 *este inscriptibil.*

THEODOR GH. COCEA.

Soluţie şi generalizare dată de D-nii: NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU (Liceul Militar „N. Filipescu"), M. C. POSTELNICESCU (Şc. Polit. Bucureşti), VICTOR L. FLORESCU, RADU APOSTOL (Liceul Militar „N. Filipescu"), ADOLF ŞAICHIN şi IACOB GOLDBERG (Lic. „Matei Basarab" Bucureşti).

Fie în general un patrulater ABCD şi M_1M_2 două puncte arbitrare pe AB şi CD. Fie *a, b, c, d* centrele de greutate ale triunghiurilor AM_1M_2, BM_1M_2, CM_1M_2, DM_1M_2 şi L mijlocul segmentului M_1M_2.

Este evident că *a* se găseşte pe mediana AL, şi avem:

$$\frac{La}{LA} = \frac{Lb}{LB} = \frac{Lc}{LC} = \frac{Ld}{LD} = \frac{1}{3},$$

de unde rezultă că patrulaterele ABCD şi *abcd* sunt omotetice, centrul de omotetie L; punctele *a, b, c, d* se găsesc pe cercul omotetic cercului dat în aceeaşi transformare.

In general $A_1, A_2, \ldots A_n$ fiind un poligon înscris într'o curbă (Γ) şi M, N două puncte în planul lor, poligonul format de centrele de greutate ale triunghiurilor A_iMN ($i = 1, 2, \ldots n$), este inscriptibil într'o curbă (r), omotetică lui (Γ) cu centrul de omotetie în mijlocul segmentului MN şi cu modulul 3.

Soluţii bune au mai dat D-nii: ADRIAN N. GRIGORIU (Şc. Polit. Bucureşti), V. A. PĂDUREŢ (Lic. Mil. Chişinău), C. ŞT. GÂLEA (Lic. „Codreanu" Bârlad), A. VASILESCU-STABU (Lic. Alba Iulia).

C. I. Ţ.

PROBLEMA 4861. *Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{x-a+a\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-a^2}}{x-a+a\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{1-ax+\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}{x-a}$$

$$\equiv\frac{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}}.$$

P. SERGESCU.

Soluția I, dată de D-rele GEORGETA ROMAȘCAN, VENERA TĂNĂSESCU; D-nii S-LȚI GR. MARTEȘ, MIHAI VLAD: C. D. MIHĂILESCU, FL. OANȚĂ, V. PĂDUREȚ (lic. militar Chișinău); I. STREDER (lic. militar Iași); GH. DECIULESCU (lic. militar Târgoviște); H. BODNĂRESCU, A. POPESCU-ZORICA, A. ȘAICHIN (București); OCT. MIHALCEA (Buzău); H. REISCHER (lic. Internat Iași); ȘT. TILICĂ (lic. Traian T.-Severin).

Avem:

$$\frac{x-a+a\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-a^2}}{x-a+a\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-a^2}}$$

$$=\frac{(x-a+a\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-a^2})\,(x-a-a\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-a^2})}{(x-a)^2-(a\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-a^2})^2}$$

$$=\frac{2x(x-a)(1-\sqrt{1-a^2})}{-2ax(1-ax+\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-x^2})}.$$

Prin urmare, membrul I al identității propuse devine

$$\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}.$$

Pe de altă parte:

$$\frac{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}}=\frac{(\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a})^2}{(1-a)-(1+a)}=\frac{2-2\sqrt{1-a^2}}{-2a}=\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}.$$

Identitatea este astfel stabilită.

Soluția II, de D-nii A. NADOLU, I. STREDER (lic. militar Iași); G. SILAȘ.

Ne mărginim la cazul când radicalii sunt reali, adică

$$|a|\leqslant 1 \quad \text{și} \quad |x|\leqslant 1,$$

căci identitatea fiind adevărată pentru o infinitate de valori, este generală. Să punem atunci:

$$a = \cos\alpha \quad , \quad x = \cos\xi.$$

Membrul I al identității devine succesiv:

$$\frac{\cos\xi - \cos\alpha + \cos\alpha\sin\xi - \cos\xi\sin\alpha}{\cos\xi - \cos\alpha + \cos\alpha\sin\xi + \cos\xi\sin\alpha} \times \frac{1 - \cos\alpha\cos\xi + \sin\alpha\sin\xi}{\cos\xi - \cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\xi - \cos\alpha + \sin(\xi - \alpha)}{\cos\xi - \cos\alpha + \sin(\xi + \alpha)} \cdot \frac{1 - \cos(\xi + \alpha)}{\cos\xi - \cos\alpha}$$

$$= \frac{-2\sin\frac{\xi+\alpha}{2}\sin\frac{\xi-\alpha}{2} + 2\sin\frac{\xi-\alpha}{2}\cos\frac{\xi-\alpha}{2}}{-2\sin\frac{\xi+\alpha}{2}\sin\frac{\xi-\alpha}{2} + 2\sin\frac{\xi+\alpha}{2}\cos\frac{\xi+\alpha}{2}} \cdot$$

$$\frac{2\sin^2\frac{\xi+\alpha}{2}}{-2\sin\frac{\xi+\alpha}{2}\sin\frac{\xi-\alpha}{2}} = -\frac{\cos\frac{\xi-\alpha}{2} - \sin\frac{\xi+\alpha}{2}}{\cos\frac{\xi+\alpha}{2} - \sin\frac{\xi-\alpha}{2}}$$

$$= \frac{-\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{a} = \frac{\sqrt{1-a} - \sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a} + \sqrt{1+a}} \cdot$$

c. c. t. d.

Soluția III, dată de D-nii: M. D. POPA (lic. mititar Iași), A. VASILESCU-ȘTABU (lic. Mihai Viteazul, Alba-Iulia).

Să facem substituțiile

$$1 + x = y^2, \quad 1 - x = z^2, \quad 1 + a = b^2, \quad 1 - a = c^2$$

de unde

$$x = \frac{y^2 - z^2}{2}, \quad a = \frac{b^2 - c^2}{2}$$

iar:

$$y^2 + z^2 = b^2 + c^2 = 2$$

aşa că în cele ce urmează putem înlocui pe 1 fie prin $\frac{y^2+z^2}{2}$, fie prin $\frac{b^3+c^2}{2}$, după nevoile calculului. Avem:

$$\frac{x-a+a\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-a^2}}{x-a+a\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-a^2}}=\frac{(y^2-z^2)(1-bc)-(b^2-c^2)(1-yz)}{(y^2-z^2)(1+bc)-(b^2-c^2)(1-yz)}$$

$$=\frac{(y^2-z^2)(b-c)^2-(b^2-c^2)(y-z)^2}{(y^2-z^2)(b+c)^2-(b-c^2)(y-z)^2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{bz-cy}{bz+cy}$$

$$\frac{1-ax+\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}{x-a}=\frac{4-(y^2-z^2)(b^2-c^2)+4bcyz}{2(y^2-z^2)-2(b^2-c^2)}$$

$$=\frac{(y^2+z^2)(b^2+c^2)-(y^2-z^2)(b^2-c^2)+4bcyz}{2(y^2-z^2-b^2+c^2)}=\frac{(bz+cy)^2}{y^2-z^2-b^2+c^2}$$

$$\frac{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+a}}=\frac{c-b}{c+b}.$$

Făcând toate înlocuirile, şi simplificând cu $\frac{b-c}{c+b}$, identitatea pe care trebue s'o stabilim se reduce la:

$$\frac{(cy-bz)(cy+bz)}{y^2-z^2-b^2+c^2}\equiv 1$$

sau:

$$c^2y^2-b^2z^2\equiv y^2-b^2-z^2+c^2$$

$$(1-a)(1+x)-(1+a)(1-x)\equiv 2x-2a.$$

Această din urmă identitate se verifică imediat, ceeace dovedeşte identitatea propusă.

Soluţia IV, dată de D-l G. Silaş.

Se observă că cele două funcţiuni

$$y_1=\log\left|\frac{x-a+a\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-a^2}}{x-a+a\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-a^2}}\right|$$

$$y_2=\log\frac{|x-a|}{1-ax+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}}$$

au aceeaşi derivată $\frac{\sqrt{1-a^2}}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}$. Deci $y_1 - y_2 = \text{const.}$ adică:

$$\log . \left| \frac{x-a+a\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-a^2}}{x-a+a\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-a^2}} \right| . \frac{1-ax+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}}{|x-a|} = \text{const.}$$

Logaritmul fiind constant, urmează că membrul I al identităţii din enunţ e constant. Pentru a găsi valoarea constantei, e destul să facem $x = 1$ şi obţinem tocmai identitatea propusă.

D-nii SANDU TURCU şi I. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI au dat soluţiuni asemănătoare cu cele de mai sus.

Identitatea din enunţ a fost sugerată de problema 39 din cartea de *Exerciţii şi Probleme* a D-lui TH. ANGHELUŢĂ.

PROBLEMA 4864. *Să se demonstreze că într'un triunghiu oarecare avem :*

$$A + C = \operatorname{arctg}\left(\frac{a^2}{S} - \operatorname{cotg}C\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{c^2}{S} - \operatorname{cotg}A\right).$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-ra VENERA TĂNĂSESCU şi de D-nii : M. F. AMĂRĂŞTEANU, R. APOSTOL, A. CĂLINESCU, A. I. CORNĂŢEANU, I. D. DIACONESCU, S-LT. N. GRUMĂZESCU, E. I. MODÂLCĂ, A. N. POPESCU-ZORICA, TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI, N. D. ŞTEFĂNESCU, I. STREDER, ŞT. C. TILICĂ, I. GOLDBERG, H. L. REISCHER şi A. O. ŞAICHIN. In baza formulei cunoscute

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C)}$$

avem

$$\frac{a^2}{S} - \operatorname{cotg}C = \frac{2\sin(B+C)}{\sin B \sin C} - \operatorname{cotg}C = 2\frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\sin B \sin C} - \operatorname{cotg}C$$

$$= 2(\operatorname{cotg}C + \operatorname{cotg}B) - \operatorname{cotg}C = \operatorname{cotg}C + 2\operatorname{cotg}B$$

şi analog

$$\frac{c^2}{S} - \operatorname{cotg}A = \operatorname{cotg}A + 2\operatorname{cotg}B.$$

Fie acum E partea dreaptă a relaţiei ce vrem să demonstrăm.

Găsim succesiv

$$\mathrm{tg}E = \frac{\mathrm{tg}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{a^2}{S} - \mathrm{cotg}C\right)\right] + \mathrm{tg}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{c^2}{S} - \mathrm{cotg}A\right)\right]}{1 - \mathrm{tg}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{a^2}{S} - \mathrm{cotg}C\right)\right]\mathrm{tg}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{c^2}{S} - \mathrm{cotg}A\right)\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2}{S} - \mathrm{cotg}C\right) + \left(\frac{c^2}{S} - \mathrm{cotg}A\right)}{1 - \left(\frac{a^2}{S} - \mathrm{cotg}C\right)\left(\frac{c^2}{S} - \mathrm{cotg}A\right)}$$

$$= \frac{\mathrm{cotg}A + 4\,\mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C}{1 - (\mathrm{cotg}A + 2\mathrm{cotg}B)(\mathrm{cotg}C + 2\mathrm{cotg}B)}.$$

Insă

$$\mathrm{cotg}A\,\mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}B\,\mathrm{cotg}C + \mathrm{cotg}C\,\mathrm{cotg}A = 1$$

(a se vedea *Culegere de probleme de trigonometrie*, Partea I de V. CRISTESCU revăzută de GH. TH. GHEORGHIU, Cap. X, ex. 11, a), aşa încât

$$(\mathrm{cotg}A + 2\,\mathrm{cotg}B)(\mathrm{cotg}C + 2\,\mathrm{cotg}B)$$
$$= \mathrm{cotg}B\,(\mathrm{cotg}A + 4\mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C) - 1$$

şi deci

$$\mathrm{tg}E = -\mathrm{tg}B = -\mathrm{tg}\,[180^0 - (A + C)] = \mathrm{tg}\,(A + C)$$

relaţie care ne spune că

$$E = A + C.$$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4867. *Să se demonstreze că se pot găsi şapte patrate consecutive care au aceeaşi cifră la zecimi.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-ra V. TĂNĂSESCU (Studentă, Bucureşti), şi de D-nii: M. D. POPA, (Liceul Militar, Iaşi), A. D. SAICHIU (Liceul Matei Basarab, Bucureşti), ST. C. TILICĂ (Liceul Traian, Turnu Severin), G. D. TURCU.

După *Culegere de Probleme de aritmetică*, de I. IONESCU, XLVIII, 1, grupând terminaţiile patratelor după cifra zecilor găsim că grupele 16, 36, 56, 76, 96 nu pot proveni decât dela numere terminate cu 6; că grupele 21, 24, 25, 29 nu pot proveni decât dela numere terminate cu 1, 9, 2, 8, 5, 3, 7 cu care nu putem forma 7 numere consecutive. Acelaşi lucru cu grupele începând cu 4, 6 sau 8. Grupele începând cu 0, pot proveni dela numere terminate cu 0, 1, 9, 2, 8, 3, 7 cu care putem forma şapte numere consecutive terminate în 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3 şi acestea ar putea da 7 patrate consecutive cu cifra zecilor 0.

Pentru ca să se îndeplinească condiţia cerută ar trebui să avem

$$(10a \pm 3)^2 = 100a^2 \pm 60a + 9$$

cu 0 la zeci.

Pentru aceasta este necesar ca să avem

$$a = 0 \quad \text{sau} \quad a = 5.$$

Dar atunci avem şi:

$$02^2 = \ldots 04\,;\ 01^2 = \ldots 01\,;\ 00^2 = \ldots 00.$$

$$52^2 = \ldots 04\,;\ 51^2 = \ldots 01\,;\ 50^2 = \ldots 00.$$

Deci problema este posibilă şi îi corespund numerele terminate cu 97, 98, 99, 00, 01, 02, 03 sau cu numerele 47, 48, 49, 50. 51, 52, 53.

PROBLEMA 4873. *Dacă a', b', c' sunt laturile triunghiului ortic al triunghiului* ABC, *iar* r_a, r_b, r_c *razele cercurilor exînscrise aceluiaşi triunghiu, există relaţia:*

$$\begin{vmatrix} 1 & a' & r_a \\ 1 & b' & r_b \\ 1 & c' & r_c \end{vmatrix} = 0.$$

SUBLT. MIRCEA GRUMĂZESCU.

Soluţie dată de D-l DUMITRU I. CIOC, clasa VIII-a, Liceul Militar Craiova.

Fie A', B', C' vârfurile triunghiului ortic. Se ştie că înălţimile triunghiului de referinţă sunt bisectoarele interioare ale triunghiului ortic [1]), deci laturile triunghiului ABC sunt bisectoare exterioare

1) TRAJAN LALESCO: La Géométrie du triangle: 3.3.

ale triunghiului A'B'C', iar A, B, C centre ale cercurilor exînscrise triunghiului A'B'C'. Deducem că r_a, r_b, r_c sunt înălțimile triunghiurilor asemenea AB'C', BC'A', CA'B' corespunzătoare vârfurilor A, B, C.

Cum în două triunghiuri asemenea există proporționalitate între înălțimi și laturile omoloage,

$$\frac{a'}{r_a} = \frac{b'}{r_b} = \frac{c'}{r_c},$$

încât determinantul problemei, având elementele a două coloane proporționale, este nul.

Observare. Deoarece A'B'C' poate fi triunghiu de referință, determinantul este nul când a', b', c' sunt laturi ale unui triunghiu oarecare, iar r_a, r_b, r_c razele cercurilor sale exînscrise.

C. I. B.

PROBLEMA 4891. *Putem transforma o progresiune aritmetică în alta geometrică sporindu-i toți termenii cu aceeași cantitate?*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-ra ANA C. GEZEANU și D-nii: A. I. CORNĂȚEANU, V. FLORESCU, TR. PREDOIESCU, ST. C. TILICĂ, VASILESCU-STABU AL. M., REICHER L. HERMAN, G. I. WEISBERG, I. SEGAL, D. MAVRODIN, I. D. DIACONESCU, M. ARHIZESCU, G. D. BOSINCEANU, GR. GR. BOȘOLDEA, M. DIACONESCU, A. M. FLORIAN, I. V. JAREGHIE, A. I. LUPULESCU, N. V. NEDELCU, C. P. PANTELIMON, B. C. POPA, M. D. POPA, AL. I. ROHR, R. S. ROSENBLATT, E. I. RUSSU, A. O. ȘAICHIN, I. STREDER, S. R. TURCU.

O progresie aritmetică rămâne tot progresie aritmetică dacă îi sporim toți termenii cu aceeași cantitate. Chestiunea revine dar de a cerceta dacă termenii unei progresiuni aritmetice pot forma în același timp și o progresiune geometrică.

Fie $(a - r)$, a și $(a + r)$ trei numere în progresie aritmetică. Ele vor forma o progresiune geometrică numai dacă

$$(a - r)/a = a/(a + r) \quad \text{sau} \quad a^2 = (a - r)(a + r) = a^2 - r^2$$

ceeace nu se poate decât dacă $r = 0$.

Conchidem dar că numai numerele egale pot fi deodată în progresie aritmetică și geometrică, prima cu rația 0 și a doua cu rația 1.

EXERCIŢII

22. Să se demonstreze că produsul distanţelor dela vârfuri la centrul de greutate al unui triunghiu dreptunghic este:

$$\frac{a}{27}\sqrt{4a^4+9c^2b^2},$$

unde a, b, c sunt laturile triunghiului.

T. STOICESCU.

R. Dacă G este centrul de greutate, iar A, B, C sunt vârfurile triunghiului, segmentele $\overline{AG}$, $\overline{GB}$, $\overline{CG}$ sunt $\frac{2}{3}$ din medianele respective; avem astfel:

$$\overline{AG}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{3};\ \overline{BG}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{4}+c^2}=\frac{1}{3}\sqrt{b^2+4c^2};$$

$$CG=\frac{2}{3}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{4}}=\frac{1}{3}\sqrt{c^2+4b^2};$$

făcând produsul distanţelor şi ştiind că $a^2=b^2+c^2$, avem:

$$\overline{AG}\cdot\overline{BG}\cdot\overline{CG}=\frac{a}{27}\sqrt{(b^2+4c^2)(4b^2+c^2)}=\frac{a}{27}\sqrt{4a^4+9b^2c^2}.$$

23. Se dă sistemul

$$\frac{x}{ac}+\frac{y}{bc}=\frac{1}{ab};\ az=b-cx;\ \frac{y+1}{b}+\frac{z}{c}=\frac{a+c}{bc}$$

în care a, b, c sunt laturile unui triunghiu; să se demonstreze în acest caz identităţile:

1°. $x^2+y^2-z^2\equiv 1-2z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$.

2°. $x^4+y^4+z^4+2xyz\equiv\frac{1}{2}[1+(2x^2-1)(2y^2-1)(2z^2-1)]$.

TUDOR STOICESCU.

R. Rezolvând sistemul, găsim:

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\ y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac};\ z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Ţinând seamă de relaţiile dintre laturi şi unghiuri într'un triunghiu, vedem că: $x=\cos A$, $y=\cos B$, $z=\cos C$, aşa că identităţile de cunoscut sunt:

$$\cos^2A+\cos^2B-\cos^2C=1-2\sin A\sin B\cos C.$$

$$\cos^4A+\cos^4B+\cos^4C+2\cos A\cos B\cos C=[1+\cos 2A\cos 2B\cos 2C]$$

identităţi cunoscute [a se vedea Culegere de Probleme de Trigonometrie Partea I, V. CRISTESCU, revăzută de GH. T. GHEORGHIU, pag. 20, ex. 6 şi ex. h din 3].

Demonstraţia relaţiilor se poate face şi direct.

24. Să se stabilească inegalitatea:

$$(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) \geqslant \sin^2(\alpha - \beta)\cos^2(\alpha + \beta).$$

D. D. MATEI.

R. Consider inegalitatea:

$$(ad - bc)^2 \leqslant (a^2 + b^2)(c^2 + d^2),$$

în care fac:

$$a = \sin\alpha,\ b = \sin\beta,\ c = \cos\beta,\ d = \cos\alpha,$$

obțin inegalitatea:

$$(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta)^2 \leqslant (\sin^2\alpha + \sin^2\beta) \times (\cos^2\alpha + \cos^2\beta).$$

Dar: $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, iar $2\sin\beta\cos\beta = \sin 2\beta$, deci:

$$(\sin 2\alpha - \sin 2\beta)^2 \leqslant 4(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta).$$

Cum însă:

$$\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 2\sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta),$$

reese că avem inegalitatea din enunț.

25. Să se găsească arcele x și y cu extremitățile în primul cadran, care satisfac în același timp ecuațiile:

$$\cos(4x - 3y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{cotg}(x + 2y) = 1.$$

(Prob. 32 Cap. V. Culegerea de Probleme de Trigonometrie Ed, II).

MIRCEA ADAM.

R. In afară de soluția:

$$x = \frac{5\pi}{44}\ ,\ y = \frac{3\pi}{44}$$

dată acestei probleme; mai avem și următoarele trei soluții:

$$x = \frac{\pi}{44},\ y = \frac{5\pi}{44}\ ;\quad x = \frac{17\pi}{44},\ y = \frac{19\pi}{44}\ ;\quad x = \frac{13\pi}{44},\ y = \frac{21\pi}{44}\ .$$

26. Polara unui punct M de pe o hiperbolă, în raport cu hiperbola conjugată acesteia, înfășoară hiperbola descrisă de M.

NICOLAE D. ȘTEFĂNESCU.

R. Fie $(H_1)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ și $(H_2) - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ecuațiile celor două hiperbole și M $(x_0\ ,\ y_0)$ curent pe H_1.

Polara lui față cu H_2 este $-\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

sau:

$\frac{(-x_0)x}{a^2} - \frac{(-y_0)y}{b^2} = 1$ adică această polară este și polara punctului $(-x_0\ ,\ -y_0)$ în raport cu H_1.

Însă punctul $(-x_0\ ,\ -y_0)$ este simetricul lui M față de origine, deci M găsindu-se pe hiperbola H_1, se va găsi și $(-x_0\ ,\ -y_0)$ pe această hiperbolă,

Atunci polara lui $(-x_0\ ,\ -y_0)$ față cu H_1 este tangentă la H_1 adică tocmai ceeace voiam să demonstrăm.

PROBLEME PROPUSE

4915. Un echer de lemn având un gol triunghiular, asemenea cu conturul echerului, se aşează pe un vârf de ac. In ce cazuri el poate rămâne în echilibru?

I. IONESCU.

4916. Orice număr nedivizibil prin *2*, *3* şi *5* admite o infinitate de multipli de forma 1111...1.

P. SERGESCU.

4917. Dacă numărul $(2n+1)$ este prim, să se arate că expresiunea:

$$E = (1 . 2 . 3 \ldots n)^2 + (-1)^n$$

este totdeauna divizibilă prin $(2n+1)$.

CPT. COMANDOR GR. ZAPAN.

4918. Să se găsească soluţiile întregi pozitive ale ecuaţiei

$$x(5x-4) = y^2$$

şi să se demonstreze că x este pătrat perfect.

V. THÉBAULT.

4919. Să se construiască triunghiul ABC, dreptunghic în A, cunoscând lungimea bisectoarei $\overline{BB'}$ şi poziţia punctelor C şi B'.

G-L GH. BUICLIU.

4920. Fie $\alpha\beta\gamma$ o transversală a triunghiului ABC cu centrul de greutate în G.

1°. βG, şi γG retaie laturile AB, AC în B_a, C_a, $B_a C_a$ taie pe αG pe ceviana reciprocă cu $A\alpha$.

2°. O secantă arbitrară, dusă prin α, taie mediana AG şi paralela din A la BC în O şi O'; $O\beta$, $O\gamma$ şi $O'\beta$, $O'\gamma$ taie pe AB, AC în C_a, B_a şi C'_a, B'_a. Dreptele $B_a C_a$, $B'_a C'_a$, OO' se întâlnesc pe ceviana reciprocă cu $A\alpha$.

N. N. MIHĂILEANU.

4921. Se dă un triunghiu ABC şi un punct P în planul său, se notează A', B', C' baricentrele triunghiurilor PBC, PCA, PAB. Fie α intersecţia dreptei B'C' cu dreapta ce uneşte mijlocul lui

AP cu simetricul piciorului cevienei AP pe latura BC față de mijlocul acestei laturi. Fie β, γ punctele analoage pe dreptele C'A', A'B'.

Să se arate că drepte A'α, B'β, C'γ sunt concurente în G, baricentrul triunghiului ABC.

AD. GHEORGHIU.

4922. Dacă două triunghiuri triomologice ABC și A'B'C' au centrele de omologie colineare, să se arate că polurile laturilor lui ABC față de A'B'C' și polurile laturilor lui A'B'C' față de ABC sunt șase puncte situate pe aceeași dreaptă [1]).

GH. D. SIMIONESCU.

4923. Fie ABC un triunghiu oarecare, A'B'C' triunghiul său ortic, $A_1B_1C_1$ triunghiul său tangențial (format de tangentele duse la cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A, B, C). Se notează: $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, aria ABC = S; $\overline{B'C'} = a'$, $\overline{C'A'} = b'$, $\overline{A'B'} = c'$, aria A'B'C' = S'; $\overline{B_1C_1} = a_1$, $\overline{C_1A_1} = b_1$, $\overline{A_1B_1} = c_1$, aria $A_1B_1C_1 = S_1$ și R raza cercului ABC.

Să se demonstreze relațiile:

1) $$\frac{a^2}{a_1} + \frac{b^2}{b_1} + \frac{c^2}{c_1} = \frac{2S}{R}$$

2) $$\frac{a + a' + 2a_1}{a(1 + \cos A + \sec B \sec C)} = \frac{b + b' + 2b_1}{b(1 + \cos B + \sec C \sec A)} = \frac{c + c' + 2c_1}{c(1 + \cos C + \sec A \sec B)}$$

3) $S^2 = S_1 . S'$.

GH. DUMITRESCU.

4924. Să se rezolva ecuația

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x - 2} = 0.$$

MAIOR I. LINTEȘ.

4925. Să se studieze variația funcției

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + \arcsin \frac{x}{a}$$

și să se construiască curba corespunzătoare.

---

1) Se poate consulta: G. D. SIMIONESCU. Sur les triangles trihomologiques et triorthologiques (Bull. Math. de l'École Polytechnique 1936. VI. p. 191 sau G. M. Vol. XLII. p. 286).

2°. Să se calculeze aria $A(x)$ mărginită de această curbă, de ax şi dreptele paralele Oy având abscisele x şi a. Să se calculeze cu două zecimale exacte aria $A\left(\frac{a}{2}\right)$.

TH. ANGHELUŢĂ.

4926. Se consideră un trapez ABCD, baza mică fiind AB, iar laturile neparalele fiind BC şi AD. Pe laturile neparalele se construesc în afara trapezului patratele BB'C'C, AA'D'D. Se notează cu x baza mică a trapezului şi cu λ, μ cotangentele unghiurilor dela bază ADC şi BCD.

Perpendiculara în mijlocul M al lui AB pe AB întâlneşte pe A'B' în M', iar perpendiculara în mijlocul N al lui CD întâlneşte pe C'D' în N'.

1°. Să se arate că M' este mijlocul lui A'B', că N' este mijlocul lui C'D', că figura NM'N'N este un paralelogram şi că dreapta care uneşte centrele celor două pătrate trece prin centrul paralelogramului NM'N'N. In ce caz paralelogramul MM'N'N este romb?

Să se calculeze MM', A'B' şi aria patrulaterului AA'B'B în funcţie de x, h, λ şi μ. Să se calculeze de asemenea tangentele unghiurilor AA'B', A'B'B în funcţie de x, h, λ şi μ.

2°. Să se determine x în funcţie de h, λ şi μ astfel ca patrulaterul AA'B'B să fie inscriptibil. Să se arate că în acest caz dacă se notează cu H intersecţia perpendicularei din D cu perpendiculara din D pe BC şi cu H' intersecţia perpendicularei din B pe CD cu perpendiculara din C pe AD şi dacă unghiul format de AD cu BC este obtus, figura AHH'B este un pătrat. Dacă însă unghiul format de AD cu BC este ascuţit şi figura AHH'B este un pătrat, atunci simetricul lui A' în raport cu A, simetricul lui B' în raport cu B şi punctele A, B sunt pe acelaşi cerc.

3°. Se consideră un patrulater oarecare AA'B'B. Pe laturile AA', BB' se construesc în afară de pătratele AA'D'D, BB'C'C. (Se presupun unghiurile A şi B obtuse). Să se arate că condiţia ca patrulaterul ABCD să fie trapez este ca dreapta MM' care uneşte mijloacele laturilor AB, A'B' să fie perpendiculară pe AB.

D. V. IONESCU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăștеanu F. Marcel (4745, 868, 76, 86, 99, 900); *Andrievici N.* (4829, 77); *Apostol Gh. N.* (4911); *Arhipescu M. C.* (4899, 908); *Bancea N. Nic.* (4899, 908); *Bârlea Gh. V.* (4868); *Bartic Gh. Gh.* (4908); *Basacov Gh.* (4866, 78, 902); *Beiu Palade Gh. E.* (4773, 886); *Bodnărescu M. H.* (4829, 80, 81); *Boian D. Emil* (4858, 68); *Bosinceanu D. Gh.* (4908); *Bosoldea Gr. Gr.* (4899, 908); *Buznea Dinu* (4876, 99); *Cetățeanu Stelian* (4829); *Chiriac C. I. Subloc.* (4856, 57, 92, 93, 900); *Cornățeanu Aurel* (4861, 87, 906, 10, 11); *Cotulbea I. C.* (4829); *Crăciunescu I. Mioara* (4829, 63, 76, 78, 99, 900); *Curcă Const.* (4899, 908); *Deciulescu Gh.* (4899); *Diaconescu D. Ion* (4753, 65, 92, 823, 29, 908, 11); *Diaconescu Marcel* (4829, 89); *Florescu L. Victor* (4824, 58, 64, 75, 81, 84); *Gâlea St. C.* (4858); *Gereanu C. Ana* (4829, 61, 63, 74, 76, 77, 78, 99, 906); *Goldberg Iacob* (1869, 4829, 87, 98, 99, 908); *Grumăzescu M. Subloc.* (4885, 95, 99, 900, 08); *Gviazdomorschi E. Romulus* (4829, 80, 99, 911); *Heroiu N. Spiridon* (4877); *Iliescu I. Vițu* (4911); *Ionescu D. Stelian* (4829, 80); *Ionescu-Fulger M. C.* (4829, 99); *Jareghie V. Ion* (4899); *Marcovici Eugen* (4875); *Mărculescu O.* (4902); *Mavrodin D-tru* (4844, 48, 52, 68, 75, 76, 77, 86, 902); *Mingea Marin* (4858); *Mironescu D. D.* (4899); *Mironescu Tr. Dinu* (4880); *Modâlcă S. Emil* (4765, 92, 820, 23, 29, 44, 911); *Moessner A.* (N, P); *Motaș Camil* (4829, 68, 69, 99); *Moțoc L. Remus* (4900); *Nedelcu V. Nic.* (4899, 908); *Negrea A. Mircea* (4829, 42, 50, 60, 76, 77, 99, 902, 11); *Niculescu Corneliu* (4908); *Obreja Dorin* (4829, 61, 76, 99, 908); *Pădureț A. Vasile* (4858); *Pantelimon V. Const.* (4829, 58, 81, 99, 908); *Pârvulescu Vladimir* (4899); *Pascaru I. Ioan* (4829, 44, 68, 76); *Pasere S. Emil* (4857); *Peptu S. Const.* (4899); *Petrescu Achilla* (4908); *Petrescu I. Ion* (P); *Petrescu Mihai* (4829, 80, 911); *Pop Gr. Ilie* (4858); *Popa D. Mircea* (4829, 44, 58, 80, 81, 93, 99, 906, 08, 10); *Popescu Adrian Subloc.* (4829, 80); *Popescu I. G. G-l* (A); *Popescu-Zorica Al.* (4432, 527, 644, 810, 29, 73, 75, 86, 99, 900); *Preciado Th.* (4908); *Predoiescu Traian* (4850); *Reischer L. Herman* (4736, 892, 93, 908); *Rohr I. Alex.* (4858, 60, 68, 81); *Roșculeț N. M.* (4908, 11); *Rosenblatt S. M.* (2643, 4829, 68, 74, 80); *Rusu I. Eugen* (4899, 908); *Șaichin O. Adolf* (4717, 4809, 29, 44, 81, 97, 99), *Savin I. Ion* (4899, 908); *Secu V. Adrian* (4899); *Segal Joe* (4829, 58, 67, 68); *Șerbănescu N. Șt.* (4899, 909); *Solomon I. Isac* (4829, 44, 74, 77); *Staicu I. N.* (4900); *Stănculescu Mircea* (4899); *Ștefanov P. Ștefan* (4895, 99, 900, 08, 11); *Stoenescu D. Mirel* (4809, 29, 64, 68, 74, 77, 99, 900); *Streder Ion* (4897, 99, 906, 08, 10, 11); *Tătaru N. Nicolae* (4875, 99); *Teodorescu N. Dorin* (4829, 51); *Tilică C. Șt.* (4833, 92); *Toma N. N.* (4829); *Turcu R. Sandu* (4644, 78, 81, 844, 74, 80, 93, 99, E); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (4830, 72, 906, 08); *Vijelie Gh. Eugen* (4875, 908); *Zancu C. Aurel* (4899).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de geometrie, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia VI . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* 1926. (Epuizată).

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50
Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

C. 50.132

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIII

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1938

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. † Gh. Em. Filipescu (urmare) . . . . . *Ion Ionescu.*
2. O clasă însemnată de suprafețe . . . . . *A. Myller.*
3. Aritmetica lui Gheorghe Asachi (urmare) . *P. V. Cazanacli.*
4. Matematica la expoziția internațională din Paris . . . . . *G-l Gh. Buicliu.*
5. Note Matematice: 32 — 36.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2318, 4238, 4524, 4530, 4746, 4754, 4784, 4786, 4824, 4868, 4900.
10. Exerciții: 27 — 29.
11. Probleme propuse: 4927 — 4938.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1938

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stan,** Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan; Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1937 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4859, 71, 79, 88, 90, 94, 901, 03, 05, 09, 12, 13, 14, 15, 20, 22, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLIII. No. 7 *SUPLIMENT* MARTIE 1938

RECREAŢIUNI

1. **Anul 1938.** El admite următoarele descompuneri curioase:

$$1938 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 17 \cdot 18.$$

$$1938 = 2 \cdot 6! + 3 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 5 \cdot 3! + 6 \cdot 2!.$$

I. I. PETRESCU.

*

2. **Aritmetica în Licee!** Se cere o regulă de divizibilitate pentru numărul 407. Un elev din clasa III-a a Liceului din Turnu Severin răspunde:

„ $407 = 11^2 \times 7$.

El se divide mai întâiu cu 11 decât cu 7!"

I. I.

*

3. **O aplicaţie a sistemului binar de numeraţiune.** Se dă 1000 lei şi zece plicuri. Se cere să se distribuie acea sumă în cele 10 plicuri aşa ca atunci când cineva ar cere o sumă oarecare, să i se poată da în plicuri nedesfăcute.

Pentru aceasta este destul a pune în plicuri sumele de 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 489 lei. Ultima este restul pânala 1000 din suma celorlalte în progresie aritmetică cu raţia 2.

ALEXANDRU N. POPESCU-ZORICA.

*

4. **Măsura în zicătorile Românilor.**

A măsura câmpurile.
Orice lucru cu măsură.
Nu te măsura cu cei mari.
Cele d'o potrivă tot o măsură şi tot un număr au.
Nu te măsura cu cine nu ai deaface.
Toţi se măsoară după al lor fel.
Iubirea peste măsură aduce în urmă ură.

I. I.

*

5. **Iar numărul 13.!** Ziarul *« La Dépêche »* din 29/VII 1930 spune:

« ... ce que fut la guerre de 1194 — 1918, et que serait celle-ci par comparaison à une guerre de demain ... »

După cum se vede, a mai fost un războiu care a întrecut pe cel de 100 ani, adică unul de 724! Greşeala se datoreşte numărului nefast 13, căci avem:

$$13 = 7 + 2 + 4.!$$

V. C. POPESCU.

*

6. **Numărul 16.** Numărul 16 erea puţin considerat în vechime. Romanii aveau chiar zicătoarea: « *Sesqui pedalia verba* » echivalentă cu zicătoarea românească: « *Vorbe lungi de un stânjen* ».

Acest număr şi multipli de ai lui se întâlnesc prin Biblie. Se vorbeşte de Domnii care a durat 16 ani, de 16 cetăţi, de Impărat la 16 ani etate, altul la 32 de ani, de 32 de Impăraţi, de 32 fii ai unuia, de 80 de bărbaţi, de 80 de elefanţi, de 80 de oameni cu barba rasă, de durată de 80 de ani, etc. MOISE era de 80 de ani când a vorbit cu FARAON. In fine găsim 160 de oameni, 160 de ani.

I. I.

*

7. **Toate numerele au trei cifre.** Exerciţiul 37 din Volumul XXIX cere: „Să se găsească numerele având cele trei cifre în progresie aritmetică".

† N. BOTEA.

*

8. **De necrezut!** Lipsa obiceiului de a se gândi cineva puţin asupra rezultatului unei probleme duce la lucruri bizare. Rezolvitorul ar fi de sigur gata să râză dacă le-ar auzi dela altul. Iată câteva exemple preţioase, luate din teze autentice, la examene de matematici:

1. — Se cerea iuţeala unui alergător. Răspunsul dat a fost 300 m/sec.!

2. — Câtă apă pune cârciumarul la litrul de vin? Răspuns 100 l!

3. — Se cerea vârsta unei mame. Un elev de clasa VII-a dă rezultatul: 13 ani.

X.

Dacă credem pe unii statisticiani, ultimul rezultat nu ar fi inadmisibil la unele popoare.

I. I.

*

9. **Un nou punct remarcabil, dar... negeometric!** Intr'un discurs politic, şeful unui partid, pentru a sublinia mai puternic unul din punctele programului său a spus: « ... *căci ideia naţională este punctul archimedic pe care vom sprijini* ... ».

Nu cunoaştem în geometrie nici un punct de' al lui ARCHIMEDE sau archimedic.

Se poate ca oratorul, care este şi poet, să fi făcut aluzie la pârghia lui ARCHIMEDE şi la punctul de sprijin pe care-l cerea el, pentru a ridica lumea de pe atunci la cer, sau poate că punctul lui ARCHIMEDE să fi rămas în nisipul în care marele învăţat studia o problemă înainte de a fi fost ucis de un soldat roman la cucerirea Siracuzei.

GH. B.

ARCHIMEDE nu şi-a botezat nici un punct, însă în onoarea lui unii geometri dau numele de punct al lui ARCHIMEDE, centrului de greutate al unui triunghiu.

I. I.

*

10. CAŢAVENCU **matematician.** Dintr'un manual de Algebră pentru clasa V-a secundară (pag. 144. Ediţia I).

Fie puterile:

$$8^{\frac{2}{3}};\quad 49^{\frac{1}{2}};\quad 32^{0,4}.$$

Au ele vre-un înţeles? Se pot calcula?

Pentru a răspunde la aceste întrebări, să demonstrăm identitatea:

$$\sqrt[m]{A^n} = A^{\frac{n}{m}}.$$

Demonstraţia autorilor, — căci sunt trei, — probează că stau rău cu Radicalii, dar sunt tari în vorbărie.

Y.

*

11. **Asemănări sentimentalo-algebrice.** Găsesc într'o nuvelă franceză: *« L'âme des femmes est en effet, d'une complication à étages, tout comme certaines équations algébriques ».*

De aceea lipseşte atracţia dintre femei şi matematici; sunt şi aci complicaţii de aceeaşi natură. Ca şi în electricitate: polii de aceeaşi natură...

GH. B.

*

12. **Lăcomia nu este bună!** Să presupunem că ni se cere maximum lui:

$$E = \sin^2 A \sin 2B + \sin^2 B \sin 2A.$$

Dacă vrem *deodată mult*, luăm $A = 90^0$ şi $B = 90^0 - \varepsilon$, în care ε este o cantitate foarte mică. Atunci E este foarte puţin diferit de 1. Dacă căutăm maximum după cum se cuvine, găsim că el este $3\sqrt{3}/4$ care este mai mare ca 1.

Este adevărat că s'a luat la început mai mult, dar mai târziu a rămas nimic, căci $\sin 2A = \sin 180^0 = 0$. E dar mai bine să se meargă după regulă!.

*

*

13. **Calculul dobânzilor.** Pe coperta cărţii de Limba franceză a D-lui CHARLES DROUHET de clasa VII-a din 1925, editorul a scris:

Preţul cărţii . . . 77,90 Lei.
Taxa 5% . . . . 4,10 „

N. M.

*

14. **Pasiunea matematică.** In această chestiune RUYSSEN scrie următoarele:

« Cineva poate să fie pasionat pentru matematici, adică să caute unitatea în cantitate şi în figură, obiectul cel mai obicinuit al atenţiunii lui, însă pasiunea nu improvizează soluţia problemelor matematice. Motivul este că, ori cât de mare ar fi pasiunea geometrului, ea nu afectează, ca pasiunile morale, sociale şi religioase, masa profundă a obiceiurilor motrice şi intelectuale cele mai indispensabile vieţii fizice şi mintale. Un matematician poate fi un cetăţean bun sau rău, un tată de familie delicat sau ciudat, îndemânatic sau nepriceput, în lucrările lui. Ipoteza, adică îndoiala, nu este în matematică decât un procedeu metodic, care interesează sistemul general al credinţelor noastre practice sau chiar ştiinţifice. Astfel, ipoteza

gravitațiunii universale rămâne în spiritul savantului o afirmațiune provizorie, totdeauna revocabilă; căci nu importă a o afirma decât în măsura în care ea unifică totalitatea cunoștințelor cosmologice, pe când ea nu afectează sistemul credințelor practice, morale, sociale sau chiar metafizice ale savantului. Îndoiala științifică nu este dintre acelea de care cineva poate suferi sau muri». I. I.

*

15. **Extemporal la matematici.** Intr'o zi lipsind profesorul de matematici, directorul unui Liceu trimite pe Profesorul de Științe naturale să dea elevilor un extemporal. Acesta ia o carte din Biblioteacă, de Geometrie Analitică, se duce în clasă și dictează enunțul și spune elevilor și rezultatul la care are să ajungă: *«M pe lângă R cos de alfa înmulțit cu R sin de alfa»*. In realitate era scris M (R cosφ, R sinφ) !, coordonatele punctului M !

V. C. POPESCU.

*

16. **Ideile lui** DESCARTES **despre matematică.** In Studiile sale asupra metodei DESCARTES spune:

Apoi referitor la Analiza învățaților vechi și la Algebra învățaților noi, observaiu că ele sunt prea abstracte și de nici un folos practic. Prima este așa de legată de figuri în cât nu poate exercita inteligența fără să nu obosească imaginația; a doua este atât de legată de anumite reguli și cifre în cât seamănă mai curând cu o artă care turbură spiritul decât cu o știință care să-l cultive.

I. G. CONSTANTINESCU.

*

17. **Matematica în literatură.** In *«Universul literar»* Anul XVII No. 1. la rubrica *«Critica literară»* găsim: *«Romanul se străduește astfel cu necontenit repetate sforțări să extragă rădăcina patrată a unei cantități negative»*, E. ST. IACOB.

In *Nuit et Jour* de MARTIN MAURICE găsim:

a) *«Ses paroles mal assurées traçaient autour de nous un cercle glacial»*.

b) *«Aucun regret ne deviait ce soir la parabole de nos corps»*.

V. C. POPESCU.

*

18. **Zestre eternă.** Matematicianul BHASKARA a scris o carte de matematici pe care a dedicat-o ficei sale LILAVATI. In prefață spune:

«Am scris o carte care va purta numele tău și care va viețui în secolele viitoare. Un bun renume este o a doua viață și baza vieții eterne».

I. I.

*

19. **Extinderea regulii semnelor.** In *«Politica»* din 1926, luna Octomvrie 1926, în foiletonul Romanului *«Tragica viață» a jocheului* HENRI STEMER, se poate citi următoarele:

«Ca și în fizică și în dragoste, + cu — dă minus...»

CORNELIU N. POPESCU.

*

20. **„O piesă de teatru este o problemă geometrică".** Găsiți această propoziție enunțată în adevărul Literar Anul VIII pag. 335 în articolul *„De vorbă cu* GEORG KAISER". Reciproca o fi adevărată?

GH. BALABAN.

† GH. EM. FILIPESCU

(Urmare dela pag. 289).

Activitatea didactică

Am spus mai înainte, că la 1 Iunie 1909 am luat ca asistent al meu, pentru lucrările de Aplicaţiuni la rezistenţa materialelor şi la Proiectele de poduri şi de Instalaţiuni industriale, pe GH. FILIPESCU. Locul acesta l-a luat cu învoirea Directorului său, căruia se angajase de a suplini orele ce le lipsea dela Serviciu în alte ore, şi eventual sărbătorile.

Ca asistent FILIPESCU şi-a împlinit datoriile cu zel şi activitate. A căutat pe de o parte să se ţină în curent cu progresele ştiinţei şi să îndrumeze pe elevi la studiile şi lucrările lor. Susţinerile le făcea cu toată atenţiunea arătând elevilor greşelile şi lipsurile constatate, iar pentru a face ca elevii să nu piarză timp prea mult cu acele susţineri, îi chema şi seara şi în zile de sărbători chiar, stând toată ziua la şcoală. Căuta ca elevii să facă toate calculele cât mai repede, prin diferite mijloace, însă de multe ori mergea prea departe în această direcţiune. Elevii nu trebuesc să fie numai nişte simpli căutători prin cărţi şi tabele, ci trebue să-şi dea seama de cea mai mică transformare de formule şi de valoarea tuturor aproximaţiunilor ce le fac. Singura divirgenţă dintre mine şi dânsul era numai asupra acestei chestiuni, însă numai la început, căci pe urmă şi-a dat seama că elevii întrebuinţează adesea mijloace simplificatoare fără a-şi da seama de admisibilitatea lor.

Ca asistent a mai suplinit pe C. M. MIRONESCU la cursul său de Statică grafică, iar în anul şcolar 1915—1916 Cursul de Rezistenţa Materialelor în urma demisiunii titularului, care fiind german şi luptând pentru intrarea României în Războiu, alături de Puterile Centrale, primea dese manifestări displăcute dela Elevi. In fine, în Anul şcolar 1913—1914 am făcut împreună cu FILIPESCU primul Curs de Beton armat, deşi Conferinţe despre beton armat făcusem încă din 1903. Pentru acel Curs neplătit, FILIPESCU venea dela lucrările lui de pe Dunăre odată pe săptămână, fără restituire de cheltueli.

Catedra de Rezistenţa Materialelor rămânând vacantă, a fost scoasă la concurs în 1916. S'au înscris mai mulţi candidaţi, printre

care şi FILIPESCU; mai erau însă unii care aşteptau să fie chemaţi căci făcuseră de mult studiile înginereşti în străinătate! Nu mai încăpea nicio îndoială că dintre toţi, cel mai bine pregătit ca asistent harnic timp de 7 ani, şi ca suplinitor de cursuri în legătură cu Rezistenţa Materialelor era GH. FILIPESCU. Comisiunea de trei profesori însărcinaţi cu cercetarea titlurilor şi lucrărilor ajunsese la acestă concluzie. Din acea comisiune făcea parte regretatul ION D. TEODOR, D-l A. G. IOACHIMESCU şi cu mine. Totuşi, se pregătise totul ca FILIPESCU să fie înlăturat pentru ca să fie numit un altul, susţinându-se că FILIPESCU nu ştie să facă o bună lecţie.

De aceea s'a aranjat o lecţiune predată de FILIPESCU. La ascultarea lui FILIPESCU, am rugat eu personal să vie să-l asculte şi pe D-l G. ŢIŢEICA, care era Profesor la Seminarul pedagogic şi care era şi este reputat ca un bun pedagog în materie ştiinţifică. Lecţia s'a făcut în Seria Inginerului SEVER CRISTESCU; ea a fost ireproşabilă, şi ca prezentare şi ca expunere. Intrând în sala Profesorilor, Directorul a exclamat; *„uite cum se fac legendele"*, iar D-l G. ŢIŢEICA a spus că ar fi o fericire pentru ţară dacă ar fi mulţi profesori care să nu ştie să vorbească ca FILIPESCU. Cu aceasta, punerea în scenă a căderii lui FILIPESCU a fost doborîtă. La alegerea de Profesor el a obţinut majoritatea şi a fost numit pe ziua de 1 Octomvrie 1916 ca titular la *Catedra de Rezistenţa Materialelor*.

Din cauza războiului, FILIPESCU nu şi-a putut începe cursul decât în 1918 la Iaşi şi l-a continuat în Bucureşti după izgonirea inamicului. El a lucrat an de an la modificarea şi completarea cursului spre a-l face din ce în ce mai folositor elevilor săi. In anul 1924, murind I. D. TEODOR, profesorul de Statica Grafică, acest curs a fost alipit cursului de Rezistenţa Materialelor. Aceasta a necesitat o transformare şi o adaptare a celor două cursuri. Pentru tratarea mai în general şi pe o cale mai scurtă a multor chestiuni FILIPESCU a dat o mare aplicare metodei vectoriale. In acest scop a publicat note asupra vectorilor şi un articol asupra elementelor teorii vectorilor în Buletinul Societăţii Politecnice, pe care le-a publicat şi în broşuri a parte. In 1935 Cursul său a fost închegat şi tipărit în 3 fascicole coprinzând 800 pagini în care sunt tratate toate chestiunile moderne care se prezintă în ştiinţa construcţiunilor, şi în care FILIPESCU are o bună parte din cercetările

şi munca lui proprie. La unele serii a trebuit să sumeze până la 83 de termeni! Această carte a fost bine apreciată şi de profesori streini de Rezistenţa Materialelor şi i-a adus, în Sesiunea din Mai 1935, alegerea ca Membru Corespondent al Academiei Române. De curând îmi spusese că lucrează la ediţia II a acestei cărţi, în care va trata mai simplu unele chestiuni şi va introduce şi chestiuni noi şi că e posibil ca această nouă ediţie să o publice în limba franceză.

Ca profesor a adus servicii Şcoalei Politecnice în Consiliile profesorale, în Comitetul ei de Direcţiune şi în diferite Comisiuni. In toamna Anului acesta fusese ales Preşedinte al Secţiunii Constructorilor şi începuse să se ocupe serios cu reorganizarea acelei Secţiuni, în special cu separarea cursului ei superior în două subsecţiuni pentru uşurarea elevilor. Se mai gândise şi la alte reforme de făcut, dar moartea i-a distrus năzuinţele lui.

Activitatea la Gazeta Matematică

Am spus că, încă de pe când Gh. Filipescu era în clasa V la Liceul din Botoşani, lucra la *Gazeta Matematică*. El a păstrat tot timpul o recunoştinţă deosebită acestei Reviste care a înlesnit mult pregătirea sa pentru a putea intra în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele. De aceea, când după terminarea Şcoalei a ajuns să poată contribui la susţinerea acestei Reviste, a cerut înscrierea în Redacţia ei, şi a fost admis în 1 Iulie 1909. La 1 Septemvrie al aceluiaşi an, acea Redacţie s'a constituit în Societate, astfel că printre membrii constitutivi ai acelei Societăţi a luat parte şi Filipescu, dela începutul ei.

O primă activitate a lui Filipescu la *Gazeta Matematică* este de natură ştiinţifică. El a publicat chestiuni în legătură cu calculul vectorial, şi probleme în legătură cu chestiunile care l-au preocupat în practica lui de inginer. Ca un exemplu de cercetarea minuţioasă a chestiunilor cu care se ocupa, este destul a spune că la o recenzie, pe care a făcut-o unor tabele de pătratele şi cuburile numerelor dela 1 la 1000, le-a verificat pe toate, a găsit că, deşi acele tabele au cam 13.500 de cifre, au numai 31 de greşeli, dar acestea nu sunt prea puţine pentru nişte tabele de întrebuinţat în practică şi a sfătuit pe autor să cumpere asemenea tabele streine, de care sunt destule.

La tipărirea *Gazetei Matematice*, FILIPESCU a dat un concurs foarte prețios, mai ales în primii ani după războiu, când era lipsită de mijloace și trebuia readusă la vechea ei stare și mărime. S'a ocupat cu tipărirea și cu corecturile, a primit și a distribuit manuscrisele destinate Gazetei, a fost Membru în Delegațiunea Societății în anii 1 Septemvrie 1924 — 1 Septemvrie 1926 și Casier al Societății în anul 1927.

Fapta cea mai măreață a lui GHEORGHE FILIPESCU la *Gazeta Matematică* este concursul pe care i l-a dat pentru construcțiunea localului ei propriu. Societatea obținuse un teren pe Calea Griviței, aproape în fața Gării de Nord, și strânsese din donațiuni aproape 2.000.000 lei. Această sumă, deși suficientă pentru un local corespunzător nevoilor Societății, nu era îndestulătoare ca să se facă o casă de mărimea pe care o cerea Regulamentul Comunei București pe acea stradă, și anume de cel puțin 17 m înălțime. S'a căutat să se facă împrumuturi convenabile și nu s'au găsit; s'au căutat copropietari cu care să se facă acea casă în devălmășie și să se exploateze în comun și nu s'a ajuns la nici un rezultat. Teama de o eventuală nouă devalorizare a banilor era îngrozitoare. In aceste condițiuni vine GH. FILIPESCU și propune ca societatea să construiască Localul împreună cu *Casa de Pensiuni a Personalului Societății Comunale de Tramvaie București,* care dispunea de fonduri de plasat pentru fructificare. Această Casă lua etajele 2, 3, 4, 5, 6, iar *Gazetei Matematice* îi rămânea parterul cu prăvălii și primul etaj pentru nevoile Revistei, subsolul fiind comun. Cu modul acesta s'a putut clădi măreața casă din Calea Griviței Nr. 158 care poarte numele *„Casa Gazeta Matematică"* și s'a realizat și un isvor de venituri sigure pentru Casa de Pensiuni a Tramvaielor Comunale. Figura lui GH. FILIPESCU va fi așezată în loc de cinste în Sala de ședințe a Societății pentru a se avea necontenit în vedere la întruniri, imaginea acelui care a contribuit în o mare măsură la scoaterea *Gazetei Matematice* din starea ei nomadă anterioară.

Pentru ca să vedeți cât de mult ținea GHEORGHE FILIPESCU la *Gazeta Matematică,* reproduc aci sfârșitul cuvântării pe care a ținut-o la Jubileul de 40 de ani al Revistei în ziua de 17 Decemvrie 1935:

„După cum Romanii spuneau cu mândrie: „Cives romanus sum", tot cu aceeași mândrie spunem și noi astăzi: și eu am fost corespondent al Gazetei".

„Acest monument, Gazeta Matematică, nouă Românilor trebue să ne stea mereu în minte, pentrucă el ne arată la ce rezultate admirabile am ajunge dacă în mod sincer ne-am călăuzi de deviza ei anume: entusiasm, armonie, sacrificii continui, muncă desinteresată".

Activitatea la Societatea Română de Ştiinţe, Secţiunea Matematică

Gh. Filipescu a făcut parte din *Societatea Română de Ştiinţe, Secţiunea Matematică.* Cu toată bunăvoinţa pusă de d-ra Secretară Preduţa Bungeţeanu, nu s'a putut găsi data admiterii în această Societate; ştim însă că în anul 1914 era Secretar de şedinţe la Secţiunea matematică şi că a făcut o Conferinţă asupra maşinilor de calcul. Cu începere din 1922 a făcut la Societate mai multe comunicări, cele mai multe privitoare la probleme de mecanică aplicată la ştiinţa construcţiunilor, ca: ipoteze asupra ruperii materialelor, stabilitatea grinzilor supuse la înconvoire, grinzile suprapuse, teoria cadrelor rigide, teoria plăcilor elastice, precum şi chestiuni de racordarea aliniamentelor cu cercurile, sau ale acestora între ele, la traseele de tramvaie, unde prin introducerea unor radioide de ordin mai înalt a reuşit să suprime aproape complet isbiturile şi rotirile brusce ale vagoanelor la trecerea pe la punctele de contact ale racordărilor.

In anul 1923 — 1924 a fost Vice-Preşedinte, iar în anul următor Preşedintele Secţiunii Matematice a Societăţii. La 10 Februarie 1927 a făcut parte dintre semnatarii actului de Constituire legală a Societăţii Române de Ştiinţe sub noua şi actuala ei organizare.

Gh. Filipescu a făcut parte din Comisiunea care a elaborat *Vocabularul Matematic* al Societăţii.

Dragostea pe care o avea regretatul nostru coleg pentru matematici, l-a făcut să se manifesteze pentru ele şi sub alte forme. Astfel după stăruinţele lui, Societetea Comunală a Tramvaielor Bucureşti a subvenţionat Buletinul Societăţii cu sume destul de importante, care au permis apariţiunea şi mărirea lui.

La multe din manifestările matematicianilor noştri, Filipescu a participat cu multă plăcere, ori de câte ori dispunea de timp. Astfel a participat şi a făcut o comunicare la Primul Congres al Matematicianilor ţinut la Cluj în anul 1929, iar anul trecut a luat

o parte activă la Congresul Interbalcanic al Matematicianilor, unde a reprezentat Societatea Politecnică, unde a făcut o comunicare asupra grinzilor continui frânte în plan şi unde a prezidat o Secţiune.

Ca să vedeţi cúm apreciau Matematicianii români pe Gh. Filipescu găsesc îndestulător să vă citesc aci telegrama pe care mi-au trimis-o D-nii Profesori de Matematici dela Universitatea din Cluj: N. Abramescu, Th. Angheluţă, G. Bratu, G. Călugăreanu, D. V. Ionescu, G. Juga şi P. Sergescu, a doua zi după moartea lui:

„Suprinşi şi adânc întristaţi de pierderea atât de timpurie a distinsului fruntaş al Gazetei Matematice, marele român, Inginer Gh. Em. Filipescu, *vă rugăm să primiţi şi să transmiteţi Familiei, profund îndureratele noastre sentimente“.*

(Va urma). Ion Ionescu.

O CLASĂ INSEMNATĂ DE SUPRAFEŢE

Propriétés des surfaces données en coordonnées semi-polaires par l'équation $r = \varphi(\omega) + \Psi(z)$; leur génération, relation avec les surfaces moulures.

Suprafeţele date în coordonate semi-polare prin ecuaţia

$$z = \varphi(r) + \psi(\omega),$$

şi în special cazul particular $\psi(\omega) = m\omega$ al suprafeţelor helicoidale, au făcut obiectul unor studii numeroase. In schimb n'au fost considerate suprafeţele date de

$$r = \varphi(\omega) + \psi(z), \tag{1}$$

de care ne vom ocupa aci.

Secţiunea suprafeţei (1) prin planul prin oz $\omega = \omega_0$ este curba dată în coordonate carteziane r şi z prin ecuaţia

$$r = \psi(z) + \varphi(\omega_0). \tag{2}$$

Când planul se învârteşte în jurul lui oz, adică ω_0 variază, această curbă execută în planul ei o translaţie în direcţie perpendiculară pe oz, generând suprafaţa. Translaţia se face astfel ca curba generatoare (2) să întâlnească necontenit curba directoare din planul $z = 0$, dată de ecuaţia în coordonate polare

$$r = \varphi(\omega) + \psi(0). \tag{3}$$

In particular când

$$\varphi(\omega) = m\omega \tag{4}$$

curba (3) devine o *spirală a lui* ARCHIMEDE. Pe când planul prin *oz* se roteşte uniform în jurul axei, curba generatoare din planul acesta se mişcă uniform în direcţia perpendiculară axei.

Dacă facem în suprafaţa (1) secţiunea $z = z_0$, obţinem în planul de secţiune curba

$$r = \varphi(\omega) + \psi(z_0). \tag{5}$$

Când z_0 variază, această curbă, al cărei plan se mută paralel, se transformă necontenit în alta *conchoidală* ei. Considerată ca generatoare ea trebue să întâlnească necontenit o directoare (2). In cazul particular (4) curbele generatoare (5) *sunt spirala lui* ARCHIMEDE şi *conchoidele* ei, care sunt aceleaşi spirale rotite de unghiuri diferite în jurul polului.

Să consider curba strâmbă numită *spirala conică:*

$$\begin{aligned} \omega &= a + hr \\ z &= b + kr. \end{aligned} \tag{6}$$

Prin două puncte oarecare $A(\omega_1, r_1, z_1)$ şi $B(\omega_2, r_2, z_2)$ trece o *spirală conică* (6) şi numai una şi pe aceeaşi curbă se află şi punctul C cu coordonatele:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Să numim acest punct *mijlocul semi-polar* al segmentului de *spirală conică* AB. Locul *mijloacelor semi-polare* ale tutulor segmentelor de *spirală conică,* ce unesc un punct al curbei

$$\begin{aligned} r &= 2\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

cu un altul al curbei

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \\ r &= 2\psi\left(\frac{z}{2}\right) \end{aligned}$$

este suprafaţa (1).

Să considerăm o *suprafață modanată*, născută de o curbă plană, zisă de profil, al cărei plan se rostogolește fără să alunece pe un cilindru cu generatoarele paralele cu *oz* și cu baza oarecare. Suprafața desfășurabilă, circumscrisă *suprafeței modanate* de-a-lungul unei curbe de profil, este un cilindru cu generatoarele perpendiculare pe planul curbei. Locul intersecției acestui cilindru cu un plan prin *oz* paralel cu planul curbei de profil este o suprafață (1). In cazul particular (4) cilindrul *suprafeței modanate* e circular cu axa *oz*.

A. MYLLER.

ARITMETICA LUI GHEORGHE ASACHI

(Urmare dela pag. 239)

Un capitol special (§§ 101 — 109, pag. 96 — 111) tratează „*De numere complexe sau de întregi unite cu fracții*". Vedem că autorul numește astfel atât numerele mixte cât și numerele complexe, deși, într'o notă el spune: „*Vorbind absolut un număr complex este un număr fracțional, adecă compus de întregi unite cu fracții. 2 stânjini 4 palme sau* $2\frac{1}{2}$ *stânjini, sau* $\frac{5}{2}$ *stânjini sunt expresii echivalente*".

Adunarea și scăderea numerelor complexe (§§ 101 și 102) sunt ușoare. Citez exemplul adunării și al scăderii cu numere complexe:

Stânjini,	Palme,	Palmace.
3	5	4
5	3	7
6	0	6
15	2	1.

Stânjini,	Palme,	Palmace.
7	4	1
5	9	5
1	3	1.

Se dă și câteva exemple cu numere mixte:

$$27\frac{5}{8}+12\frac{7}{8}=40\frac{4}{8}=40\frac{1}{2}; \quad 8\frac{3}{7}-5\frac{4}{7}=2\frac{6}{7}.$$

„*Inmulțirea numerelor complexe este numai aplicația teoriei fracțiilor. Se poate întâmpla două cazuri: înmulțitoriul poate fi un număr simplu sau un număr complex* (§ 103)". In cazul 1-iu

avem, ca exemplu: $7\frac{3}{5} \times 6$ (*„înmulțesc 7 prin 6, care îmi dă 42, aceste le scriu sub cele întregi, după aceasta înmulțesc fracția* $\frac{3}{5}$ prin 6, care după regulă (82) îmi dă $\frac{18}{5}$, sau 3 întregi și $\frac{3}{5}$, scriu 3 întregi la coloana celor întregi, și după adiție productul ecvalează cu $45\frac{3}{5}$ “).

Alt exemplu: 5 stânjini, 2 palme, 3 palmace $\times 4 = 5\frac{19}{64}$ stânjini $\times$ 4, ceeace se poate face ca în cazul precedent. Sau, altfel: $\frac{639}{64}$ stânjini $\times$ 4. Cazul al 2-lea: *„Fie* $4\frac{2}{5}$, *a se înmulți prin* $3\frac{3}{7}$. *Inmulțesc pe întregii 4 prin 3, care îmi dă 12 de product a întregilor prin întregi. Inmulțesc fracția* $\frac{2}{5}$ *prin 3, și vine* $\frac{6}{5}$, *sau 1 întreg plus* $\frac{1}{5}$; *scriu pe întregul sub 12 ce am căpătat, și înmulțesc 4 prin* $\frac{3}{7}$, *care îmi dă* $\frac{12}{7}$, *sau 1 întreg și* $\frac{5}{7}$; *scriu pe întregul sub întregile și alăturea* $\frac{5}{7}$ *ce rămân. In urmă înmulțesc fracția* $\frac{2}{5}$ *prin* $\frac{3}{7}$, *și vine, precum s'au zis (93),* $\frac{6}{35}$ *care scriu la coloana fracțiilor.*

Incât productul total este: $12\ 1\frac{1}{5}\ 1\frac{5}{7}\ \frac{6}{35}$

ecval cu $14\frac{38}{35}$, *sau după cele lămurite (81)*

$15\frac{3''}{35}$. Precum vedem, înmulţirea numerelor mixte se face altfel (şi mai complicat) de cât o facem de obicei.

Alt exemplu: *„A înmulţi 42 lei 80 bani prin 5 stânjini 6 palme 7 palmace“*. Formularea este desigur, greşită, dar sensul este clar. Autorul înlocuieşte această înmulţire cu următoarea: a înmulţi $42\frac{80}{120}$ lei prin $5\frac{55}{64}$ stânjeni, reducând, astfel, lucrarea la cazul înmulţirii a două numere mixte. Mai sunt două observaţii: *„Dacă voim ca produsul să exprimeze lei, apoi fracţia care se va afla în urma celor întregi să o socotim fracţie a leului, şi a o tractarisi, spre a preţui în bani, precum s'au zis (99). Voind ca productul să însemneze stânjini, atunce fracţia se va socoti cum ar exprima părţi de stânjen, şi a o preţui în palme... să se urmeze după No. (99)“*. Aceeaşi chestiune este tratată într'o *„altă manieră“*, care nu este altceva decât metoda *„părţilor alicvote“*, şi e explicată destul de complicat. Aici autorul lămureşte cum se poate întâmpla să avem de făcut o asemenea înmulţire: *„Să zicem cum că s'au făcut această întrebare: la săpatul unui puţ s'au tocmit de stânjen 42 lei 80 bani, adâncimea puţului au eşit 5 stânjini 6 palme 7 palmace, cât se cuvine a se plăti pentru acest lucru?“*. Răspunsul este 250 lei.

La împărţire (§§ 105 — 109) avem iar câteva cazuri. De exemplu, $14\frac{2}{5} : 4$. Autorul împarte întâiu 14 prin 4 şi se găseşte câtul 3 şi restul 2, pe care-l preface în cincimi; împărţind $\frac{12}{5}$ prin 4 se găseşte al doilea cât $\frac{3}{5}$, iar răspunsul este $3\frac{3}{5}$. In § 106 găsim: *„Fie 18 stânjini 4 palme 3 palmace de un pământ a se împărţi între 5 fraţi“*. Se lucrează în mod analog, prefăcând resturile succesive în unităţi de ordin imediat următor; se găseşte câtul: 3 stânjini 5 palme $5\frac{3}{5}$ palmace. Cazul al 2-lea e ceva mai greu:“ *A împărţi un număr complex prin un număr complex* (§§ 107 şi 108). *„Fie* $8\frac{3}{5}$ *a se împărţi prin* $4\frac{2}{3}$ ·

$8\frac{3}{5}$	$4\frac{2}{3}$	*Aceste două numere aşezându-se după cuviinţă, reduc pe acei întregi 4 a împărţitoriului în triimi (82), care îmi dă* $\frac{14}{3}$; *şterg pe numitoriul 3 ale acestui împărţitori, şi înmulţesc pe împărţitul prin 3 (96), care îmi dă* $24\frac{9}{5}$, *sau mai simplu* $25\frac{4}{5}$ *de nou împărţit, Nu rămâne alta decât de a împărţi* $25\frac{4}{5}$ *prin numărul întreg 14, precum s'au arătat (105)".*
3	$\frac{14}{3}$	
$24\frac{9}{5}$	14	
$25\frac{4}{5}$		

Vedem că şi impărţirea numerelor mixte se făcea altfel decât o facem acuma. Un alt exemplu: a se împărţi 36 lei 34 bani prin 3 stânjini 5 palme; se lucrează astfel: împărţitorul fiind egal cu $\frac{29}{8}$ ale stânjenului, înmulţim deîmpărţitul cu 8 şi numărul astfel căpătat (307 lei 24 bani) îl împărţim prin 29; e clar că vom avea acelaş cât. Răspunsul este 10 lei $71\frac{5}{29}$ bani. In sfârşit, avem (§ 109) problema: *„A împărţi un număr simplu prin un număr complex".* Autorul zice: *„Nimic mai uşor decât această operaţie, dacă s'au pătruns bine marşa urmată în împărţirile trecute. Căci, nu este alta decât a face pe împărţitoriul necomplex, şi a înmulţi pe împărţitul prin numitoriul a împărţitoriului, ce l'am fost şters".* De exemplu, $15 : 3\frac{1}{7} = 15 : \frac{22}{7}$ se înlocuieşte cu $105 : 22 = 4\frac{17}{22}$.

Din cele spuse până aci rezultă că ASACHI nu spune niciun cuvânt despre *unităţile sistemului metric.* E posibil, deci, că el n'a scris cărţile sale după modelele franţuzeşti. Pe de altă parte, se poate ca el să fi omis sistemul metric, care pe vremea cărţilor lui n'a fost declarat obligator nici în Franţa (unde s'a introdus în mod legal, — după cât ştiu, — abia în 1840). Deocamdată nu sunt în măsură să găsesc explicaţia acestei lacune.

In numărul viitor ne vom ocupa de rapoarte, proporţii, progresii, şi analiza combinatorie.

(Va urma). P. V. CAZANACLI.

MATEMATICA
LA EXPOZIȚIA INTERNAȚIONALĂ DIN PARIS

Expoziția internațională din Paris, deschisă în Mai 1937, a fost consacrată artelor și tehnicei.

Pe țărmul drept al **Seinei** și anume între *Avenue Emmanuel III* și *Avenue Alexandre III*, comisariatul expoziției a construit un pavilion denumit **Le Palais de la Découverte** și consacrat exclusiv descoperirilor.

Construirea acestui pavilion pornește dela ideea logică că tehnica nu s'a putut desvolta decât prin invenții și că invențiile sunt urmări ale *descoperirii* lucrurilor necunoscute. Iată deci necesitatea ca în cadrul expoziției tehnicei moderne să se consacre un colț aparte pentru descoperiri.

In pavilionul *Descoperirilor* sunt organizate pe secțiuni toate ramurile de știință pură și aplicată. Aci se găsesc cot la cot:

Microbiologia, dedicată operei lui PASTEUR dela care emană aproape întreaga știință a vietăților infinit mici, *Chirurgia*, *Medicina*, *Botanica*, *Biologia*, *Chimia* cu toate ramurile ei, *Fizica*, *Optica*, *Electricitatea*, *Geografia*... și *Matematica*.

Mă opresc asupra acesteia din urmă, pentrucă interesează mai deaproape pe cetitorii noștri.

Matematica propriu zisă, *Astronomia*, *Fizica* și celelalte ramuri de științe mai intim înrudite cu matematica sunt așezate în etajul superior al pavilionului, în săli și secțiuni aparte, după cum se poate urmări pe schița dela pag. 351. In aripa din continuarea săgeții, spre sălile K, 16,... au fost instalate secțiuni pentru:

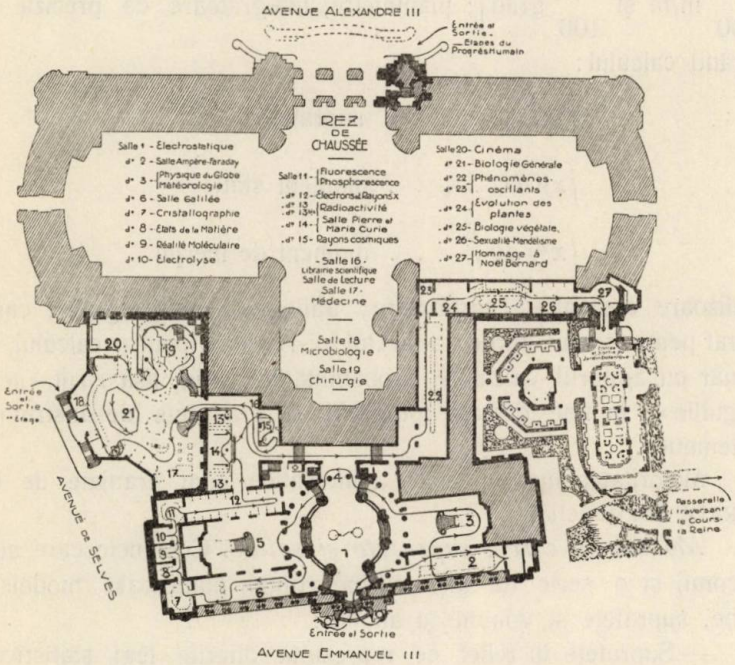
— *Influența descoperirilor științelor asupra artelor.*

— *Etapele progresului uman.*

Precum se vede din schiță, *Matematica* a fost așezată la loc de cinste în partea cea mai înaltă a etajului, pentru a domina toate celelalte științe și invențiuni care derivă în esență din gândirea matematică.

Fiecare secțiune și subsecțiune a fost organizată de comitete speciale în care se întâlnesc numele celor mai de seamă oameni de știință.

Secţia *Matematică* a fost aranjată de un comitet prezidat de D-l E. BOREL, membru la Institut de France, Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Paris, având ca vice-preşedinte pe D-l P. MONTEL, Membru la Institut de France, Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Paris şi ca membri pe D-na MAZUEL, inginer civil de aeronautică şi pe D-nii R. BRICARD, profesor la Conservatorul de arte şi meserii şi la Şcoala Centrală de Arte şi Manufacturi, G. DARMOIS, Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Paris, A. SAINTE-LAGUË, şef de conferinţe la Conservatorul de Arte şi Meserii, G. BILLY.



La acest comitet se adaogă un impresionant cadru de colaboratori francezi şi străini. Dintre cei din urmă se citează în special D-nii EMDEN (Germania), DECHEVENS şi DUDENEY (Anglia), KRAÏTCHIK (Belgia), S. LYOD (Statele Unite), V. VOLTERRA (Italia), KUROKAWA (Japonia), C. STÖRMER (Norvegia), GYLLSTRÖM (Suedia).

Matematicei pure i s'au rezervat sălile 31 şi 32.

Sala 31 are pe laturi un balcon susţinut de 10 coloane şi 2 scări de acces.

Organizatorii secțiunii matematice au reușit să expună în această sală tot ce matematică pură, și anume toate ramurile ei, are mai sugestiv.

Instrumente matematice. In 4 vitrine de diferite forme sunt frumos aranjate diferite instrumente matematice ca: compasuri de mare precizie; coordinograf-coordinometru rulant, rectangular de mare precizie $\left(\frac{1}{50}\ m/m\right)$ pentru cadrilatul hărților și ridicări de puncte prin coordonate rectangulare; coordinografe polare de precizie $\left(\frac{1}{100}\ \text{m/m și } \frac{1}{100}\ \text{grad}\right)$; planimetre, integratoare de precizie permițând calculul:

$$\int y\,dx \ldots\ldots \text{suprafețe}$$

$$\int xy\,dx \ldots\ldots \text{moment static}$$

$$\int x^2 y\,dx \ldots\ldots \text{moment de inerție}$$

analizoare armonice; curbimetre; afinografe; elipsografe; campilograf pentru trasat curbe; aparatul lui BUFFON pentru calculul unui număr cu ajutorul calculului probabilităților prin așa zisul « jet de l'aiguille »; în fine diverse fotografii și prospecte de instrumente matematice.

Majoritatea instrumentelor matematice sunt aranjate de casa CORADI din Elveția.

Modele de curbe, suprafețe și solide. Coloanele care susțin balconul și o serie de alte vitrine conțin numeroase modele de curbe, suprafețe și volume și anume:

— Suprafețe în relief ce reprezintă diferite legi statistice și demografice, ca aplicațiuni ale calculului probabilităților;

— O formă tăiată într'un bloc de lemn reprezintă suprafața lui CASSINI, a cărei ecuație polară este

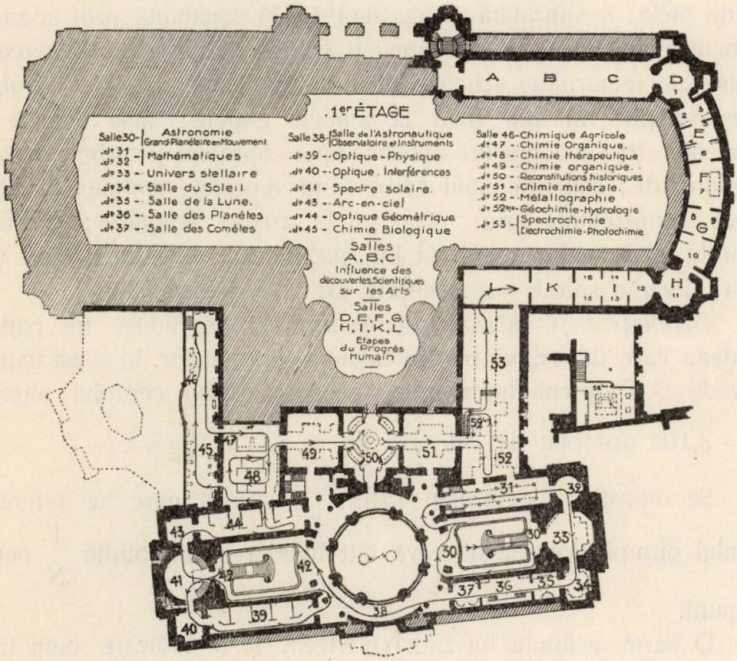
$$rr' = z^2.$$

— Modele formate din fire colorate și reprezentând: doi cilindri eliptici ce se interceptează și dând imagina suprafeței desfășurabile a tangentelor; două conoide cu baza eliptică comună, hiperboloid; paraboloid hiperbolic cu conul asimptotic și planul tangent la con;

suprafața desfășurabilă determinată de tangentele la o cubică strâmbă; o suprafață de ordinul III având 27 generatoare reale; un cilindru; un con; doi comoizi;

— Modele de lemn sau de ghips reprezentând:

Suprafața minimă a lui ENNEPER; două modele ale unei suprafețe de ordinul III având 27 generatoare reale; doi paraboloizi hiperbolici; poliedre regulate și semiregulate; suprafețe cu curbură totală constantă; solide ce permit echipartiția spațiului; numeroase suprafețe de gradul 4; diverse suprafețe riglate; modele pentru studiul corecțiunilor; diferite suprafețe de gradul 3; torul; sfera; ciclide;



— Modele realizate prin celule poliedrice și dând: reprezentarea în spațiul cu 3 dimensiuni a unui solid cu 4 dimensiuni.

Sunt 2 astfel de modele luate din colecțiunile Institutului « H. POINCARÉ ». Mărturisesc că de și materializată prin aceste modele o părticică din lumea cu 4 dimensiuni, ea totuși ne este complet inaccesibilă în afara spiritului formulelor și ecuațiunilor.

Camere întunecoase. Pentru reprezentarea unor curbe speciale s'au folosit efectele de lumină date de instalațiile cunoscute în camerele obscure. Se obțin astfel fie prin umbre fie prin puncte luminoase o serie de curbe dintre care cea mai caracteristică este o cuartică strâmbă.

Viața și Geometria. O serie de panouri intitulate «La vie et la géometrie» expune diferite forme din natură care sunt asemenea cu unele forme întâlnite în geometrie. Panoul indică ființa sau forma așa cum se întâlnește în natură, apoi o transfigurare a formei din natură eliminându-i detaliile de prisos, în fine figura geometrică. In această categorie se găsesc expuse următoarele forme: suprafața spirală cu înfășurare helicoidală prin cochilia caracteristică a unui soi de melc; o suprafață cu curbură totală constantă prin segmentarea unei picături de untdelemn; o familie de curbe prin taberculele osoase ale femurului; schelete de radiolar dând poliedre regulate; lănțișorul, prin un lanț fixat la ambele capete; vase diferite ale căror suprafețe și contururi au forma unor suprafețe și curbe cunoscute în geometrie; coarnele unui cerb, dând suprafețe spirale; linii geodezice reprezentate prin cunoscutele coșuri japoneze; turbillon, umbrela unei meduze; spirala lui ARCHIMEDE, eventaliul cozii unui păun; diverse spirale reprezentate prin diferite cochilii.

Geometria și măsura pământului. Se reproduce un papirus egiptean care dă reguli pentru calculul suprafețelor. In acest papirus se vede că Egiptenii întrebuințau pentru calculul cercului numărul $\frac{16}{9} = 3{,}104$ apropiat de valoarea lui π.

Se reproduce papirusul RHIND D'AHMES care se referă la calculul piramidelor. Se observă întrebuințarea simbolului $\frac{1}{N}$ pentru fracțiuni.

O hartă atribuită lui ERATOSTHENE și o indicare cum ERATOSTHENE a măsurat un arc de meridian.

Odometrul «HERON» care servea cu 100 ani înainte de CHRISTOS la măsurarea distanțelor.

O vitrină specială cuprinde date și lămuriri relative la *„arpentajul în Roma antică"* și scene cu descrieri a instrumentului GROMA de care se serviau «argumensares», vechii ingineri topometri.

Descrierea metodei pe care a întrebuințat-o în secolul XVI FERNEL, medicul lui HENRI II, pentru a măsura un arc de meridian.

Formulele de rezolvarea triunghiurilor, principiul triangulației, tabele de transformarea diferitelor unități de lungime, etc.

Legătura între matematici și celelalte științe. O serie de panouri pun în evidență demonstrativă această legătură. Astfel avem de exemplu:

Aplicația matematicilor la construcția unui pod. Panoul arată fotografia podului «Oved-Chiffa» și indică metodele de calcul folosite, precum și diferite calcule și grafice.

Aplicații la biologie. Se arată un calcul făcut de VOLTERRA asupra cazului speciilor ce se mănâncă între ele.

Un calcul de asigurări, cu aplicații la asigurări.

Calculul condițiilor de muncă, aplicație la economia politică.

Termica: enunțul câtorva legi termice.

Hidrodinamica: O pagină din cursul lui H. VILLAT.

Diverse calcule cu aplicațiuni la telefonie.

O serie de panouri speciale arată rolul matematicei în fizică în diferite timpuri. Citez: o pagină dintr'un curs vechiu care explică principiul lui ARCHIMEDE; diferite tabele și calcule la teoria interferenței, în fine un panou a parte consacrat teoriei lui EINSTEIN cuprinzând fragmente din teoria relativității generale și a câmpurilor de gravitate.

Calculul numeric și grafice. Opt panouri mari expun examenului vizitatorilor tabele numeroase de calcule numerice și grafice. Astfel în aceste panouri se găsesc: tabele de logaritmi, tabele de pătrate și cuburi, bipătrați, numere prime, rădăcini pătrate și cubice, divizori, etc.; o serie de foi de calcul cu aplicații în aeronautică; calcule și grafice balistice; calcule pentru astronomie calculul antenelor de telegrafie fără fir; o parte din interesantele calcule și grafice ce au servit la construcția turnului lui EIFFEL.

Geometria analitică se bucură de o atenție aparte. In o vitrină așezată în fundul sălii 31, cu vederea spre intrare, sunt așezate 3 albume mari cu câte 50 de foi de carton cam de dimensiunea 40 20 cm. Pe fiecare foaie este desemnată foarte îngrijit în tuș negru câte una din curbele plane caracteristice. In capul foaiei este dată ecuația carteziană sau polară a curbei, iar jos se indică numele curbei, câteva proprietăți caracteristice, numele

matematicianului care s'a ocupat întâia oară de acea curbă şi uvrajele în care s'a tratat.

Albumele acestea, foarte cercetate de vizitatori, au o valoare istorică capitală şi de aceea direcţia secţiunii a hotărît să le multiplice prin fotografiere. Am cerut să se rezerve şi pentru *Gazeta Matematică* câte un exemplar din aceste multiplicări.

Curbele albumului au fost calculate de D-na MAZUEL şi de D-nii EL. MILICK şi GYLLSTRÖM, desenate de D-l COURCHÉ şi aranjate de D-nii A. SAINTE-LAGUË şi BÉREUX.

Recreaţiii matematice. Nici ele nu au fost uitate. In sala 31, pe o latură a balconului sunt 6 panouri cu jocuri matematice aranjate de D-l CLAUDE LEMEUNIER. Jocurile constau din rezolvarea a diferite probleme curioase. In fiecare zi se pun enunţurile a trei probleme noi şi enunţurile cu rezolvarea problemelor din ziua precedentă. Regret că nu am reţinut câteva din aceste probleme amuzante. Este probabil că D-l CLAUDE LEMEUNIER le va scoate în volum.

Diverse. Sala 31 are expuse din loc în loc fotografiile marilor matematicieni.

La dreapta şi la stânga ieşirii sunt 2 vitrine (106 şi 107) care prezintă 2 anaglife: print'un sistem de oglinzi se reflectă în ochii privitorului imaginile colorate ale unei curbe; privind prin nişte ochelari cu sticle diferit colorate, se obţine imaginea stereoscopică a acelei curbe, care astel este clar văzută în «relief».

Inainte de ieşirea în sala 32 vizitatorul care-şi aruncă o ultimă privire în lumea cifrelor, semnelor şi simbolilor matematici descopere deasupra uşei pe un fond roşu cu caractere profilate relaţiunea

$$e^{i\pi} = -1$$

care leagă numerile caracteristice e, i, π cu unitatea.

Sala rotundă 32. Cupola acestei săli este luminată de motive luminoase mobile bazate pe proprietăţile spiralei logaritmice.

Cornişa este ornată cu 707 zecimale ale lui π, cifrele acestui număr se înşiră tot în spirală.

Pe peretele rotund al sălii se ceteşte un scurt dar impresionant rezumat al **Istoriei Matematicelor,** întocmit de D-l Profesor BRICARD.

Tot pe acest perete sunt înscrise numele marilor matematicieni dispăruţi.

O notă oarecum vie, în acest cadru rece al trecutului matematic, este o lecție de *Calculul probabilităților* scrisă cu creta de D-l profesor E. BOREL pe o tablă neagră situată într'o firidă puternic luminată.

Mecanica. Fiind o ramură de științe matematice aplicate i s'a rezervat în ansamblul acestor științe, o sală specială la parter, sala No. 6 numită *„Sala Galilée"*, ca un omagiu primului pion al metodei experimentale.

„Sala Galilée" este organizată de D-l A. MARCELIN, doctor în științe, cu ajutorul D-lui R. SEVERIN pentru realizarea mecanică.

Portretele fondatorilor mecanicei, ARCHIMEDE, LEONARDO DA VINCI, GALILEUS, NEWTON,... împodobesc zidurile vastei săli în care orice vizitator poate să facă personal toate experiențele fundamentale ale mecanicei.

Principiile staticei, știința echilibrului corpurilor, sunt reamintite vizitatorilor prin o serie de experiențe asupra echilibrului forțelor (forțe paralele și de același sens sau de sensuri opuse, mobile în echilibru pe un plan înclinat, etc.).

In mijlocul sălii sunt reproduse experiențele lui GALILEU asupra planului înclinat. O serie de alte experiențe sugestive ilustrează legile fundamentale a'e dinamicei.

Principiul egalității acțiunii și reacțiunii este pus în evidență în felul următor: o mică automotrice electrică se poate deplasa pe o pistă circulară, care este montată pe un ax vertical în jurul căruia se poate roti. In timpul perioadelor de demaraj sau încetenire, deci când automotricea este în mișcare neuniformă, pista circulară ia o mișcare de rotație de sens contrar mișcării automotricei. In regim uniform, pista rămâne imobilă.

Forța centrifugă, conservarea energiei, etc., etc., sunt toate puse în evidență prin mijloace experimentale din care unele probabil că se întâlnesc și în laboratoarele școalelor și institutelor noastre superioare.

Astronomia. Dată fiind imensitatea dimensiunilor lumii astronomice, s'au rezervat 7 săli astronomicei și anume:

Sala No. 30: planete, calea lactee, instrumente.
Sala No. 33: Universul.
Sala No. 34: Soarele.
Sala No. 35: Luna.

Sala No. 36: Planetele.

Sala No. 37: Comete şi meteori.

Sala No. 38: Astro-nautica.

Organizarea secţiunii a fost făcută de D-l E. ESCLANGON, director al Observatorului din Paris ajutat de D-nii R. LENCEMENT şi J. CAMUS.

De tavanul sălii 30 sunt prinse globuri reprezentând soarele şi planetele împreună cu sateliţii lor. Prin mişcări dirijate se dă la fiecare moment poziţia zilei a elementelor sistemului.

Scara lungimilor pentru acest planetariu este de 1 cm pentru 8.880.000 km, scara nu se aplică însă dimensiunilor planetelor.

Scara timpurilor este mărită de 432.000 de ori pentru mişcările de revoluţie (2/10 secundă reprezintă o zi) şi de 43.200 pentru mişcările de rotaţie (2 secunde pentru o zi).

Deoarece la scara aleasă dimensiunile planetelor ar fi fost prea mici (diametrul soarelui ar fi fost 1,5 m/m) scara dimensiunilor planetelor a fost mult mărită.

O revoluţie se face în 18 secunde de *Mercur* şi în 5 ore de *Pluton*.

Pe peretele din dreapta sălii 30 de 20×4,50 m este mărimea fotografică a căiei lactee.

Pe peretele din stânga se află marele panou al clasificării şi evoluţiei stelelor după RUSSELL. Acest panou reprezintă globurile stelelor în diferitele stadii ale evoluţiei lor. Marea stea, *Antarès*, este reprezentată prin o calotă sferică a unui glob de 10 m diametru pentru un diametru real de 143.000.000 km., adică la o scară de 1/29 miliarde. La această scară soarele are abia 45 m/m diametru.

Sala Universului este consacrată marilor aglomeraţii de stele în special calea lactee şi nebuloaselor gazoase.

Sala Soarelui conţine un ansamblu complet de documente relativ la soare; fotografii ale atmosferei solare: pete, lumini, erupţii, etc., obţinute prin observaţiuni fotografice de staţia Meudon a Observatorului din Paris şi alese cu colaborarea d-lui D'AZAMBUJA astronom la acest observator. Este de remarcat un foarte rar document luat de D-l LYOT, astronom la Meudon, anume filmul cinematografic al unei erupţiuni solare.

In sala Lunii se pot admira cele mai frumoase fotografii a satelitului nostru executate de observatorul din Paris.

Un semiglob al Lunii de 3,48 m. diametru (ceea ce reprezintă scara 1/1.000.000) cu toate detaliile reliefului, executate la observatorul Belgiei, este luminat de proiectoare care reconstitue aspectul diferitelor faze. Evident că celalt semiglob ar reprezenta fața care ne este necunoscută, același emicfer privind continuu spre pământ.

In sala Planetelor se găsesc mai mult desene, din cauza rezultatelor inferioare pe care le dă fotografia în lumea planetelor.

In sala Cometelor sunt o serie de fotografii care schițează istoria unei comete și o machetă care arată în detaliu constituția cometelor. In această sală se găsește o colecție bogată de meteoriți.

In sala astronomică sunt o serie de documente care reprezintă încercările de punere la punct a focoaselor, singurul motor de a progresa în vidul spațiului.

In fine revenind asupra sălii 30 trebue să amintesc că acolo se găsește un mare număr de instrumente astronomice între care se remarcă în domeniul istoric, luneta lui GALILEU care a servit în 1906 la primele observații telescopice și modelul primului telescop construit de NEWTON.

Incheiu aci expunerea pe care mi-am propus să o fac asupra modului cum este reprezentată Matematica la Expoziția din Paris 1937, iar ca ultim cuvânt al acestei încheieri aduc mulțumiri D-lor MAIOR A. POCIOVĂLIȘTEANU, CĂP. R. M. ȘEPTILICI, LOCOT. V. CASTRIȘ, LOCOT. M. PORUMBARU pentru colaborarea ce au pus-o la strângerea materialului documentar și-mi exprim speranța ca la o viitoare expoziție în România, *Gazeta Matematică* va fi chemată să organizeze o secție analoagă, privind desvoltarea matematicelor la noi în țară.

G-L GH. BUICLIU.

NOTE MATEMATICE

32. *Curiozități aritmetice.* 1°. D-l RIGNAUX (Thiers-Franța) mi-a comunicat următoarele egalități:

$$21^n + 271^n + 331^n + 581^n = 31^n + 221^n + 381^n + 571^n$$

$$11^n + 271^n + 331^n + 591^n = 31^n + 191^n + 411^n + 571^n$$

$$11^n + 221^n + 381^n + 591^n = 21^n + 191^n + 411^n + 581^n$$

adevărate pentru valorile 1, 2, 3 ale lui n.

Se observă că toate numerele se termină cu 1 şi că dacă se suprimă toate cifrele sutelor, numerele care rămân sunt identice în ambii membri ai egalităţilor.

Dacă se înmulţeşte fiecare membru al egalităţilor cu un număr k, se obţin alte egalităţi adevărate pentru cele 3 valori ale lui n, pentru numere terminate cu k şi dacă se elimină toate cifrele afară de zeci şi unităţi, se obţin numere identice în cei doi membri ai egalităţilor.

2°. Cuburile:

$$437^3 = 83\,\mathit{453}\,453 \quad ; \quad 594^3 = 209\,\mathit{584}\,584$$

se termină la dreapta prin două numere identice de câte trei cifre.

Cubul

$$144^3 = 2\,\mathit{985}\,984$$

se termină prin două numere consecutive de câte trei cifre.

Numerele de câte trei cifre dela dreapta şi dela stânga cubului

$$666^3 = 295408296\ ^1)$$

sunt consecutive.

Dacă cuburile

$$349^3 = 42508549 \quad \text{şi} \quad 848^3 = 609800192$$

se scriu sub forma

$$10^6x + 10^3y + z$$

atunci avem respectiv

$$x + y = z + 1 \quad \text{şi} \quad x + z = y + 1.$$

V. THÉBAULT.

33. *Asupra problemei 4820.* Pentru rezolvarea problemei 4820, propusă de D-l Prof. P. SERGESCU, a fost nevoie să se caute *„câte numere din şirul*

(1) $\qquad b,\ 2b,\ 3b,\ldots,\ (a-1)\ b,\ ab$

sunt divizibile prin **a**".

Iată o soluţie a acestei probleme, diferită de cea dată la pag. 269 din acest an.

---

1) Acest număr este soluţia problemei ce am propus cu Nr. 4142 şi care s'a rezolvat la pag. 354, Vol. XXXVIII.

G-L GH. B.

Dacă d este $c.m.m.d.c$ al numerelor a şi b avem

$$a = dq \quad , \quad b = dq'$$

q şi q' fiind, după cum se ştie prime între ele. Inlocuind în şirul (1) obţinem

(2) $\quad dq', 2dq', 3dq', \ldots, d(dq-1)q', d^2qq'.$

Primul număr din şirul (2) divizibile prin dq este evident dqq', celelalte numere divizibile prin dq sunt toţi multiplii lui dqq' pânăla

$$ab = d^2qq' = ddqq'$$

şi adică

$$dqq', 2dqq', 3dqq', \ldots, ddqq'$$

în număr de d. Adică numărul multiplilor lui a în şirul (1) este egal cu cel mai mare divizor comun al lui a şi b.

G-L GH. BUICLIU.

34. *Problema 3766,* rezolvată în Vol. XLIII, pag. 144 mai are *o soluţiune.*

Plecând dela identitatea

$$\sum_0^n (-1)^{i+1} \frac{C_n^i}{i+1} = -\frac{1}{n+1}$$

din „Curierul Matematic" Vol. III, pag. 133 şi G. M. Vol. XXXV, pag. 251, care se mai scrie

$$\sum_0^n (-1)^i \frac{C_n^i}{i+1} = \frac{1}{A_{1+n}^1} \qquad (1)$$

să facem $n = n+1$ şi avem:

$$\sum_0^{n+1} (-1)^i \frac{C_{n+1}^i}{1+i} = \frac{1}{A_{2+n}^1}. \qquad (2)$$

Relaţiile (1) şi (2) scăzute dau

$$\sum_0^{n+1} (-1)^{i-1} \frac{C_n^{i-1}}{2+i-1} = \frac{1}{A_{2+n}^2}$$

în care dacă punem $i-1 = p$ devine

$$\sum_0^n (-1)^p \frac{C_n^p}{2+p} = \frac{1}{A_{2+n}^2}. \qquad (3)$$

Relaţiile (1) şi (3) dovedesc că identitatea din enunţ e adevărată pentru $m = 1$ şi $m = 2$.

Presupunând-o adevărată pentru $m - 1$ să arătăm că este şi pentru m.

Pentru $m - 1$ se scrie

$$\sum_{0}^{n} (-1)^i \frac{C_n^i}{m-1+i} = \frac{(m-2)!}{A_{m+n-1}^{m-1}}.$$

Pentru $n+1$ devine

$$\sum_{0}^{n+1} (-1)^i \frac{C_{n+1}^i}{m-1+i} = \frac{(m-2)!}{A_{m+n}^{m-1}}.$$

Aceste două relaţii prin scădere, dau

$$\sum_{0}^{n+1} (-1)^{i-1} \frac{C_n^{i-1}}{m+i-1} = (m-2)! \frac{m-1}{A_{m+n}^{m}}$$

în care făcând $i - 1 = p$ găsim relaţia din enunţ.

M. I. F.

35. *Asupra unei teoreme de geometrie infinitezimală.*

In *Mathesis* 1933, p. 165 D-l R. GOORMAGHTIGH a demonstrat teoremele: *tangenta la locul* (P) *al mijlocului* P *al segmentului* MT *cuprins între un punct* M *al unei curbe plane* (M) *şi extremitatea* T *a subtangentei polare, este perpendiculară pe raza vectoare corespunzătoare a desfăşuratei,* iar pentru curbele strâmbe: *dacă planul dus prin polul* O, *perpendicular pe raza vectoare* OM *a unui punct variabil* M *al unei curbe strâmbe* (M), *taie tangenta în* T, *tangenta la locul* (P), *al mijlocului* P *al segmentului* MT, *este conţinută în planul osculator al lui* (M) *şi este perpendiculară pe dreapta care uneşte polul cu centrul de curbură al curbei* (M) *în* M.

Este evident în primul caz că tangenta la curba (P) este axul radical al polului O şi al cercului osculator la (M) în M; îmi propun să arăt că în al doilea caz *planul osculator la* (P) *este planul radical dintre polul* O *şi sfera osculatoare la* (M).

Să considerăm pentru aceasta două curbe strâmbe (M) şi (M') şi să presupunem că există o curbă (P) de unde putem duce tangente egale la cele două curbe. Să luăm pe (M) şi (M') punctele M_1, M_2, M_3, M_4 şi M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 infinit vecine şi fie P_1, P_2, P_3 punctele de intersecţie ale dreptelor (M_1M_2, $M'_1M'_2$),

(M_2M_3, $M'_2M'_3$), (M_3M_4, $M'_3M'_4$). Cum am presupus că tangentele duse din P sunt egale, rezultă că P_1, P_2, P_3 se găsesc în planul radical al sferelor osculatoare la (M) şi (M') în M_1 şi M'_1. Deci: *dacă două curbe strâmbe* (M) *şi* (M') *admit o curbă* (P) *de unde putem duce la cele două curbe tangente egale, planul osculator la* (P) *este planul radical dintre sferele osculatoare la* (M) *şi* (M').

Să considerăm acum o curbă strâmbă (M) şi o sferă fixă de centru O; fie P punctul în care planul radical al sferei osculatoare la (M) în M şi al sferei (O), taie tangenta la (M) în M; fie (p) cercul de contact al conului cu vârful în P şi tangent sferei (O) şi (π) o traectorie ortogonală pe sfera (O) a cercurilor (p).

Curbele (M) şi (π) se găsesc tocmai în condiţiunile precedent examinate, aşa că putem enunţa: *planul radical dintre sfera osculatoare a unei curbe strâmbe* (M) *şi o sferă fixă, are ca punct de rebrusment, punctul său de intersecţie cu tangenta la* (M) *în* M. Se obţine cazul considerat de D-l R. GOORMAGHTIGH presupunând că sfera (O) este de rază nulă, într'adevăr fie μ şi ω centrul de curbură şi centrul sferei osculatoare la (M) în M; tangenta la curba (P) fiind perpendiculară pe $O\omega$ şi $\mu\omega$, este perpendiculară şi pe $O\mu$.

Pentru curbele plane obţinem în mod analog: *axa radicală a cercului osculator al unei curbe plane* (M) *şi a unui cerc fix, îşi atinge înfăşurătoarea în punctul său de intersecţie cu tangenta la* (M). Cazul examinat de D-l GOORMAGHTIGH se obţine şi aici, luând cercul fix de rază nulă; punctul de contact al axei radicale cu înfăşurătoarea sa, devine mijlocul segmentului MT.

E. ARGHIRIADE.

36. *Notă asupra parabolei înscrise într'un triunghiu.* In triunghiul ABC, se consideră o parabolă înscrisă, tangentă laturelor în A', B', C'. Aplicând teorema BRIANCHON exagonului format de tangentele AB, AB, BC, CA, CA şi dreptei dela infinit, se observă că B'C' trece prin punctul fix A_1, vârf al paralelogramului ABA_1C. Deci: *parabolele înscrise într'un triunghiu, sunt tangente laturelor după un triunghiu* A'B'C' *înscris în triunghiul anticomplimentar* $A_1B_1C_1$.

Triunghiul A'B'C' fiind deodată înscris şi circumscris în triunghiurile omotetice ABC, $A_1B_1C_1$, aria lui este media geometrică a ariilor celor două triunghiuri, deci: *triunghiul de contact al unei parabole înscrise în triunghiul* ABC, *are o arie dublă acestui triunghiu* [1]).

Fie A_2 mijlocul B'C'; dreapta AA_2 este paralelă cu axa parabolei fiind diametrul conjugat coardei B'C'; deci triunghiurile ABC, $A_2B_2C_2$ au vârfurile pe drepte paralele şi centrele lor de greutate sunt pe o dreaptă de aceeaşi direcţie; $A_2B_2C_2$ are însă acelaşi centru de greutate cu complimentarul lui, A'B'C'; rezultă: *centrele de greutate ale triunghiurilor* A'B'C' *înscris într'o parabolă şi* ABC *format de tangentele în vârfurile precedentului, sunt pe o dreaptă paralelă cu axa parabolei* [1]).

Fiindcă tangentele în vârfurile triunghiului A'B'C' înscris în parabolă, intâlnesc laturele opuse în puncte colineare, triunghiurile ABC, A'B'C' sunt omologice; fie S intersecţia AA', BB', CC'. Când parabola variază, punctele B', C' descriu pe AC, AB, diviziuni omografice, B'C' trecând prin punctul fix A_1; rezultă că locul geometric al lui S ≡ (BB', CC') este o conică trecând prin B, C deci şi prin A; când A' se confundă cu mijlocul lui BC, deci B', C' devin simetricele lui A faţă de C ori B, S devine simetricul lui A faţă de G, deci conica are centrul în G, centrul de greutate: *centrul de omologie al triunghiului* ABC *şi al triunghiului* A'B'C' *format de contactele unei parabole înscrise variabile, descrie elipsa* STEINER *circumscrisă triunghiului* ABC.

De unde mai rezultă: *dacă* S *este un punct al elipsei* STEINER *circumscrise triunghiului* ABC, *triunghiul lui pedal* A'B'C' *are o arie dublă ariei* ABC, *există o parabolă tangentă laturelor triunghiului* ABC *în punctele* A', B', C'; *centrele de greutate ale triunghiurilor* ABC, A'B'C' *sunt pe o perpendiculară pe dreapta* SIMSON *a focarului parabolei.*

N. N. MIHĂILEANU.

---

1) Chestiunea de bacalaureat dela Sibiu, Iunie 1937.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Anul X. Nr. 11. Decemvrie 1937, publicat de B. I. BAIDAFF. Buenos-Aires.

Idem. Anul X. Nr. 12. Ianuarie 1938.

Buletinul „I. R. E." Anul V. Nr. 4. Decemvrie 1937. Bucureşti.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 44. Nr. 1. Partea 1. Ianuarie 1938. Menasha. New-York.

Idem. Vol. 44. Nr. 1. Partea 2. Ianuarie 1938.

Journal de Mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. An. 62. Nr. 9. 1 Februarie 1938. Paris.

Idem. An. 62. Nr. 10. 15 Februarie 1938.

Mathesis, publicată de AD. MINEUR. Tom. LI. Nr. 10. Decemvrie 1937. Bruxelles. Asupra geometriei tetraedrului (urmare) de J. DELEENS. Asupra teoriei funcţiunilor implicite de R. GERMAY. Contribuţiune la geometria triunghiului de J. LEEMANS.

Pitagora. Revistă de matematici. Anul III. Nr. 4—5. Colegiul naţional „Carol I" Craiova.. Februarie 1938. Unghiuri în funcţie de laturile triunghiului ortic de O. MĂRCULESCU. Asupra unor probleme de maxim şi minim de I. DUMITRIU. Asupra unei ipoteze de refracţie astronomică de G. G. CONSTANTINESCU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVII. Nr. 12. 15 Februarie 1938. Descompunerea unui patrat în o sumă de patrate perfect de GH. CONSTANTINESCU.

Sphinx, revue mensuelle de questions récréatives. Anul VIII. Nr. 3. Martie 1938.

The Mathematical Gazette. Vol. XXII. Nr. 248. Februarie 1938. London Potenţialul şi problema generalizată a lui DIRICHLET de C. de La VALLÉE. POUSSIN. Problema cablului submarin de N. W. MC LACHLAN. Triunghiul lui MORLEY de W. J. DOBBS.

A. MOESSNER. *Algunas Identidades Numericas.* (Extras din „Matematica Elemental 1935). Buenos-Aires.

A. MOESSNER. *Numerische Identitäen.* (Extras din Bulletin of the Calcutta Mathematical Society 1937).

A. MOESSNER. *General formulae for constructing an Solving certain simultaneous equations.* (Extras din The Mathematical Student. Vol. 3).

LOCOT. A. I. STAN. *Asupra variaţiei vitezei.* (Extras din Revista Artileriei 1937).

CERERI

Acei care se interesează de identităţile în numere întregi de diferite grade, în special cu problemele TARRY, sunt rugaţi a intra în corespondenţă cu mine.

ALFRED MOESSNER
Nürnberg (Germania)
Grolandstrasse 79.

Răspuns la Cererea Nr. 272. (Anul XLIII, pag. 196).

Cuvântul «*matematică*» derivă din cuvântul grecesc „μαθήματα" (mathemata) rămas dela PLATON, care-l întrebuinţa în înţelesul de «*Obiecte de învăţământ*».

Mai târziu, în Şcoala lui ARISTOTEL, cuvântul „μαθήματα" îşi restrânge conţinutul, cuprinzând numai arta de a socoti, aritmetica, geometria plană şi în spaţiu, astronomia şi muzica, apropiindu-se astfel de noţiunea particulară din prezent.

(M. CANTOR, *Geschichte der Matematik*, Vol. I).

Prof. FL. CÂMPAN. Cernăuţi.

DIVERSE

a) *) Şedinţele Societăţii „Gazeta Matematică".

Joi 17 Februarie 1938 a avut loc Adunarea Generală a Societăţii „Gazeta Matematică".

S'a descărcat Delegaţia pentru gestiunea din anul 1937 şi s'a fixat bugetul pentru 1938.

S'a ales membru în Delegaţie D-l Căp. Comandor GR. ZAPAN în locul D-lui Inginer GH. ILIESCU, al cărui mandat a expirat.

S'au ales membrii ai Societăţii „Gazeta Matematică" următorii: D-ra PREDUŢA BUNGEŢEANU, licenţiată în matematici, şi D-nii: Inginer IULIAN ALEXIU, Inginer EMIL BOTEA, Locot. AURELIAN STAN, licenţiat în matematici, TEOFIL VESCAN, licenţiat în matematici şi ZAHARIA FLORIAN, licenţiat în matematici.

b) Sporirea Bibliotecii.

CH. STURM. Cours de Mécanique de l'Ecole Polytechnique. Tome premier. Paris 1868.

CH. STURM. Cours de Mécanique de l'Ecole Polytechnique. Tome second. Paris 1869.

Donate de D-l GENERAL GH. BUICLIU.

---

*) Sub această rubrică se vor publica rezumatul şedinţelor mai importante ale Societăţii „Gazeta Matematică".

H. SERVUS. Samlung von Aufgaben aus der Aritmetik und Algebra.
Heft I. Addition, Substraktion, Multiplication, Division.
Heft II. Quadrierung, Kubierung, Zerlegung in Faktorren, Brüche, Proportionen, gemeinschaftliche Faktor, gemeinschaftliche Vielfache, Addition und Substraktion von Brüchen, Quadrat wurzel, Kubikwurzel.
Heft III. Potenzierung, Radizierung, Logarithmierung.
Heft IV. Gleichungen ersten und zweiten Grades, transcendente Gleichungen, arithmetiche und geometrische Reihen, diophantische Gleichungen.
Leipzig, 1888 — 1889.
Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

MATEI DRĂGHICEANU. *Cutremurile de pământ.* (Cutremurul dela 1 Iunie 1913).

DR. HURMUZESCU. *Supra conductibilitatea electrică a metalelor.* Bucureşti 1933.
Donate de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2318. *Să se verifice egalitatea:*

$$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}})}{(3+\sqrt{5})(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}})}}.$$

GH. NICULESCU.

Soluţiunea I-a. Se înmulţeşte numărătorul şi numitorul membrului întâi cu:

$$2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{5+\sqrt{5}},$$

obţinându-se:

$$\frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2-(\sqrt{5+\sqrt{5}})^2}{(2\sqrt{2}-\sqrt{5+\sqrt{5}})^2-(\sqrt{3-\sqrt{5}})^2}=\frac{3-\sqrt{5}-2\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{5+\sqrt{5}-2\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}$$

încât egalitatea propusă se mai poate scrie:

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}-2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}.$$

Prima fracţie se trece în membrul al doilea, iar a doua se înmulţeşte la numărător şi numitor cu $\sqrt{2}$, după cari transformări egalitatea devine:

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}-4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-4} = \frac{\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}}{\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}} \cdot \frac{\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{5}}-4}{\sqrt{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-4}} = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{(\sqrt{10+2\sqrt{5}})^2-4^2}}{\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}$$

$$= \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-6}}{\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}$$

$$\therefore \sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}-4 = \sqrt{10}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Dacă această ultimă egalitate se ridică la pătrat, iar după reducerile necesare se ridică la pătrat şi egalitatea rezultată, se ajunge la:

$$6-2\sqrt{5} = 6-2\sqrt{5}$$

adică la verificarea egalităţii propuse.

Soluţiunea II-a. In egalitatea propusă se face înlocuirea:

$$\sqrt{3-\sqrt{5}} = (\sqrt{5}-1):\sqrt{2}$$

şi efectuând calculele posibile se obţine:

$$\frac{5-\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{3+\sqrt{5}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}. \quad (1)$$

Numai în membrul I se fac înlocuirile:

$$3+\sqrt{5} = \sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}} \qquad 5-\sqrt{5} = \sqrt{5-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sqrt{5-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}$$

cari ajută la aducerea egalităţii (1) la forma simplificată:

$$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}} \quad (2)$$

egalitate ce se verifică imediat prin ridicarea ei la patrat.

Soluţiunea III-a. La egalitatea propusă radicalii al 2-lea şi al 3-lea dela numărătorul şi numitorul membrului I sunt 2 câte 2 aceeaşi dar cu semn schimbat, încât dacă se simplifică şi membrul al II-lea, atunci se poate aplica cu folos una din proprietăţile rapoartelor. In acest scop se notează cu A numărătorul, cu B numitorul fracţiei membrului I, iar cu C întreg membrul al II-lea. Pentru simplificarea acestuia se înmulţeşte şi se împarte fracţia de sub radical cu: $2(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}})$ căpătându-se în cele din urmă:

$$C=\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}.$$

Se aplică acum proprietatea:

$$\frac{A+B}{B}=C+1 \quad \therefore 4\sqrt{2}=B\left[\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)\right]$$

şi pentrucă:

$$(\sqrt{5}+1)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}},$$

rămâne de verificat egalitatea:

$$(2\sqrt{2}-\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})(\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}})=4.$$

Desfacerea parantezelor şi unele reduceri duce la:

$$\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{5}+1$$

$$\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

care se verifică imediat prin ridicarea la patrat.

Soluţiunea IV-a. Egalitatea propusă se aduce la forma (1) din soluţiunea II-a, formă care prin înlocuirile:

$$5-\sqrt{5}=a \;;\quad 3+\sqrt{5}=b \;;\quad \sqrt{10+2\sqrt{5}}=c$$

devine:

$$\frac{a+c}{b-c}=\sqrt{\frac{a(4+c)}{b(4-c)}} \quad \therefore \frac{(a+c)^2}{(b-c)^2}=\frac{a(4+c)}{b(4-c)}. \qquad (3)$$

Se calculează binoamele:

$$(a+c)^2=2(5-\sqrt{5})(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}})=2a(4+c)$$

$$(b-c)^2=2(3+\sqrt{5})(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}})=2b(4-c)$$

şi rezultatele găsite se înlocuiesc în (3), obţinându-se verificarea cerută.

Soluțiunea V-a. Problema a fost propusă în 1915—de atunci sunt aproape 23 ani — și s'a publicat în Volumul XXI, la pag. 79, unde a apărut cu greșeli. Astfel ultimul radical dela numărătorul membrului I a apărut: $\sqrt{3\ \sqrt{5}}$, iar ultimul dela numitorul aceluiași membru: $\sqrt{3+\sqrt{5}}$. Aceste erori cauzate fie numai de culegător fie și de autor, peste care poate a trecut și corectorul, au fost îndreptate la pag. 160 a aceluiași volum.

In vremea aceea, ca și acum, tinerii „propunători" în dorința de a construi cu ușurință multe probleme propuse, găsiau soluția acestor dorinți în așa zisele „clase de identități" numite mai adevărat: „fabrici de identități". Dintr'o asemenea fabrică face parte și egalitatea propusă și reconstituirea ei în obârșie face obiectul Soluției V-a.

S'a folosit egalitatea trigonometrică:

$$\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}}.$$

Pentru valorile: $a=45^0$ și $b=27^0$ egalitatea considerată devine:

$$\frac{\sin 45^0+\sin 27^0}{\sin 45^0-\sin 27^0}=\frac{\sin 36^0\cos 9^0}{\sin 9^0\cos 36^0}.$$

Se observă că unghiurile de mai sus sunt toate divizibile cu 9. Valorile sinusurilor și cosinusurilor a astfel de unghiuri se găsesc în tablele de logaritmi J. DUPUIS, ed. 1912, pag. 194—195, de unde s'a copiat ceea ce trebue:

$$\sin 9^0=\frac{1}{4}(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}});\quad \cos 9^0=\frac{1}{4}(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}})$$

$$\sin 27^0=\frac{1}{4}(\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}});\quad \sin 36^0=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\sin 45^0=\frac{1}{2}\sqrt{2}\qquad\qquad ;\quad \cos 36^0=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

Făcându-se înlocuirile s'a obţinut egalitatea:

$$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}})}{(\sqrt{5}+1)\,(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}})} \quad (4)$$

al cărui membru I fiind acelaşi cu cel al problemii propuse sub Nr. 2318, urmează a arăta cum s'a adus şi membrul al doilea la forma în care s'a publicat. Primul factor al acestui membru este:

$$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}\cdot$$

Al doilea factor al membrului II se înlocuieşte cu egalul său din (2), aşa că întreg membrul al doilea al egalităţii (4) a fost adus la membru al doilea al celei propuse. Egalitatea (4) este deci echivalentă cu cea propusă.

Aproape toţi corespondenţii cari au trimis manuscrise pentru această problemă, le-au trimis în intervalul Noemvrie 1915—Mai 1916, dar intervenind războiul problema nu s'a redactat, iar manuscrisele nu se mai găsesc; de aceea s'au luat de pe coperte numele domnilor corespondenţi de mai jos:

ALDEA GH., ALEXIU GH., ANASTASIU V., BĂDULESCU V., BRENNER A., BUCUR A., BULGĂREANU C., CEAUŞOGLU V., CERNAT GH., CERNAT V., CIOCIANU C., COROZEL TR., COSTACHE N., CRIHANĂ GR., CUŞUTA H., DELEANU D., DIMITRIU A., DUMITRESCU GH., EVOLCEANU V., FLORESCU A., GEORGEACOPOL V., GEORGESCU C., GRIGORESCU E., IGNAT A., IONESCU D. I., LĂZĂRESCU M. I., LUCA L. N., LUNGU V., MACEDONESCU M., MANOIL ŞT., MANOLIU AL., MITESCU C., NEAMŢU N., NEGULESCU V., NEICU V., NICOLAU C., (†) NICULESCU ŞT., ORĂNESCU O., PANTOLEON I., PARTENIE C., PETTER R., PINTILESCU V., PIRTEA T., POPESCU I. AL., POPP N., SBURLAN D., TOCILESCU AL., TRIANDAFIL AL., TRIFESCU GR., TRUFAŞ I., TUHAI N., URZICEANU ŞT., VARTIC C., VELAN A., VERGULESCU M., VLĂDESCU A. şi VOGEL D.

Soluţiuni primite după 1918 dela D-nii: G. RIZESCU, G. T. GHEORGHIU, A. M. LEONTE-NEGREA, DORIN N. TEODORESCU.

PROBLEMA 4238. *Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:*

$$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}=a.$$

Să se rezolve complet pentru $a=\frac{3}{2}$.

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluția. a) Pentru a rezolva ecuația dată pornim dela formula fundamentală

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

care ridicată la pătrat ne dă:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x.$$

Această formulă ridicată din nou la pătrat ne dă:

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^4 x \cos^4 x.$$

Dacă notăm cu:

$$(1) \qquad y = 4 \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 2x,$$

în baza acestor două formule ecuația din enunț devine

$$\frac{8 - 4y}{8 - 8y + y^2} = a$$

$$(2) \qquad \therefore \quad ay^2 - 4(2a - 1)y + 8(a - 1) = 0,$$

ecuație care rezolvată procură două valori pentru y, valori cari introduse în (1) ne dau valorile corespunzătoare pentru x.

b) Discuție. După forma inițială a ecuației date se vede imediat că pentru a avea valori reale pentru arcele x trebuie ca $a > 0$. Mai mult, să arătăm că $a \geqslant 1$. In adevăr, cum $\sin x$ și $\cos x$ sunt subunitari însemnează că:

$$\sin^4 x \geqslant \sin^8 x \quad \text{și} \quad \cos^4 x \geqslant \cos^8 x,$$

de unde:

$$\sin^4 x + \cos^4 x \geqslant \sin^8 x \cos^8 x,$$

ceea ce însemnează că fracția care reprezintă pe a are întotdeauna numărătorul mai mare decât numitorul. Deci $a > 1$.

Realizantul ecuației (2) este

$$4(2a - 1)^2 - 8a(a - 1) = 4(2a^2 - 2a + 1) > 0,$$

oricare ar fi a real. Ecuația are deci întotdeauna rădăcini reale.

Produsul lor $8 \dfrac{a - 1}{a}$ este întotdeauna pozitiv, iar suma $4 \dfrac{2a - 1}{a}$ la fel. Deci ecuația are, în ipoteza $a \geqslant 1$, întotdeauna două rădăcini reale. Ținând seamă de cine este y va trebui să vedem dacă aceste rădăcini sunt mai mici decât 1, în care caz sunt bune, sau mai mari decât 1, când le vom lăsa deoparte.

Avem:

$$f(0) = 8(a-1) \geqslant 0 \quad , \quad f(1) = a - 4.$$

Deci dacă $a \leqslant 4$ ecuaţia are o rădăcină subunitară admisibilă. Dacă $a > 4$ rădăcinile sunt ambele sau subunitare sau supraunitare. Să arătăm că sunt supraunitare. In adevăr, semisuma rădăcinilor este egală cu

$$\frac{2(2a-1)}{a} = 1 + \frac{3a-2}{a} > 1$$

pentru $a > 4$.

In rezumat dacă $1 \leqslant a \leqslant 4$ ecuaţia (2) are o rădăcină pozitivă subunitară y_1 şi deci în această ipoteză, în baza lui (1), ecuaţia dată are două grupe de soluţii date de ecuaţiile

$$\sin 2x = \sqrt{y_1} \quad \text{şi} \quad \sin 2x = -\sqrt{y_1}.$$

c) Cazul $a = \frac{3}{2}$. Ecuaţia (2) devine:

$$3y^2 - 16y + 8 = 0.$$

Pentru a-i găsi rădăcina subunitară punem [1])

$$\sin 2\varphi = \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Atunci vom avea:

$$(3) \qquad y_1 = \sin^2 2x = \sqrt{\frac{8}{3}}\,\mathrm{tg}\varphi.$$

Găsim:

$$\log \sin 2\varphi = 0{,}2385606 + \bar{1}{,}5484550 = \bar{1}{,}7870156;$$

$$\varphi = 37^\circ 45' 40'',4$$

şi

$$2\log \sin 2x = 0{,}4515450 + \bar{1}{,}7614394 + \bar{1}{,}5340242 = \bar{1}{,}7470086;$$

$$\log \sin 2x = \bar{1}{,}8735043 \quad ; \quad 2x = 48^\circ 21' 30'',3$$

deci forma generală a arcelor x este

$$(4) \qquad x = n \cdot 90^\circ + (-1)^n\, 24^\circ 10' 45'',15 \quad (n \text{ întreg sau zero}).$$

---

1) Pentru rezolvarea trigonometriceşte a ecuaţiilor algebrice de gr. II şi III a se vedea Culegere de Probleme de Trigonometrie de V. CRISTESCU revăzută de GH. TH. GHEORGHIU, Cap. XVIII.

Deoarece când extragem rădăcina pătrată în (3) putem lua în faţa radicalului şi semnul — însemnează că vom mai avea şi soluţiile

(5) $x = n \cdot 90^0 - (-1)^n 24^0 10' 45'' 15$ (n întreg sau zero)

(4) şi (5) se pot strânge în formula unică

$$x = n \cdot 90^0 \pm 24^0 10' 45'',15 \qquad (n \text{ întreg sau zero}).$$

Observare. Din multele soluţii pe care le-am primit la această problemă (18 la număr) care nu necesită decât cunoştinţele unui elev de clasa VI-a de liceu nu pot cita decât soluţia D-lui D. D. MAVRODIN ca foarte bună (afară de calculul numeric care conţine o mică greşală) şi a D-lui PANAIT C. MAZILU ca satisfăcătoare. Restul nu conţine decât rezolvarea ecuaţiei, la câteva bună, iar discuţia unde este făcută este lipsită de orice precizie. Nu mai pomenesc de greşelile grosolane ce se găsesc în aceste soluţii. D'apoi calculele numerice!

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4524. *In orice triunghiu avem relaţiunea:*

$$a(b+c)\,r_a + b(c+a)\,r_b + c(a+b)\,r_c = 4p^2R.$$

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-nii: P. P. COJOCARU, OCT. S. IANCULESCU, M. C. POSTELNICESCU, C. GH. PRODAN, T. STOICESCU şi I. I. ŢIŢEICA.

Folosim relaţiunile cunoscute

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad \text{şi} \quad abc = 4RS$$

şi grupând termenii membrului I altfel, avem succesiv

$$\Sigma\, a(b+c)\,r_a = \Sigma\, ab(r_a + r_b) = \Sigma ab\left[\frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b}\right]$$

$$= \frac{abc\,Sp^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{S}\,p^2 = 4p^2R.$$

Observaţiuni. 1°. Redijarea precedentă este făcută după soluţia primită dela D-l T. STOICESCU care observă că împărţind cu *abc* ambii membri ai relaţiunei din enunţ se obţine relaţiunea.

$$\Sigma\,\frac{b+c}{bc}\,r_a = \frac{p}{r}$$

care este demonstrată în exerciţiul 39 dela pag. 238 *Gazeta Matematică* Vol. XXVIII.

2°. D-l M. C. POSTELNICESCU observă că problema este o consecinţă a notelor 17 şi 22 publicate de D-l V. THÉBAULT în *Revista Matematică din Timişoara* Vol. XIII.

3°. Soluţiuni foarte bune bazate pe diferite alte relaţiuni între elementele lineare ale triunghiului, s'au primit dela D-nii: I. A. AGRIGOROAEI, M. F. AMĂRĂŞTEANU, R. V. APOSTOL, EM. BLAGA, I. GR. BOGDAN, V. N. BUCUR, D. C. I. CĂLIN, V. CEAUŞESCU, D. GR. CERCELARU, M. M. CHIRILĂ, C. COSTESCU, V. CSEKE, P. DOBRESCU. V. FLORESCU, C. N. GAVRILESCU, M. GRUMĂZESCU, OCT. S. IANCULESCU, AL. KNALL, D. LEBĂDĂ, D. I. LEAHU, GR. MARTEŞ, D. ST. MIHALCEA, V. V. NEAGU, M. L. NEGREA, TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI şi AL. D. STOICA.

4°. Au întrebuinţat relaţiuni trigonometrice, D-nii: I. I. BUZINCU, C. CHIRIAC, AL. POPESCU-ZORICA şi I. STREDER.

GH. B.

PROBLEMA 4530. *Să se determine, pentru* $n = \infty$, *limita expresiunii*

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n-p}} - C_p^1 \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-p-1}} + C_p^2 \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)^{n-p-2}} - \ldots$$

$$+ (-1)^p \frac{(n-p+1)^{n-p}}{(n-p)^{n-2p}},$$

p *fiind un număr întreg şi pozitiv, fix.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-l D. MAVRODIN (student, Bucureşti).

Expresiunea dată se poate scrie:

$$E = n^p \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - C_p^1 (n-1)^p \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} + \ldots$$

$$+ (-1)^p C_p^p (n-p)^p \left(1 + \frac{1}{n-p}\right)^{n-p}.$$

Se ştie apoi că

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e\left(1 - \frac{1}{2m} + \frac{\alpha_1}{m^2} + \frac{\alpha_2}{m^3} + \ldots + \frac{\alpha_{p-1}}{m^p} + \frac{\theta}{m^{p+1}}\right)$$

unde α_i sunt constante independente de m, iar θ depinde de m însă e mărginit pentru m destul de mare.

Putem deci scrie

$$E = e\sum_{0}^{n}(-1)^i C_p^i (n-i)^p - \frac{e}{2}\sum_{0}^{n}(-1)^i C_p^i (n-i)^{p-1}$$

$$+\alpha_1 e\sum_{0}^{n}(-1)^i C_p^i (n-i)^{p-2} + \ldots$$

$$+\alpha^{p-1} e\sum_{0}^{n}(-1)^i C_p^i + e\sum_{0}^{n}\frac{(-1)^i C_p^i \theta^i}{n-i}.$$

Insă expresiunile de forma

$$\sum_{0}^{n}(-1)^i C_p^i (n-i)^{p-k}$$

sunt diferenţele de ordinul p ale termenilor generali ai şirurilor $v_{n,k} = (n-p)^{p-k}$ şi sunt nule pentru $k \geqslant 1$, iar pentru $k = 0$ avem:

$$\sum_{0}^{n}(-1)^i C_p^i (n-i)^p = p!$$

Ultima sumă din expresiunea lui E tinde către zero, odată cu $\frac{1}{n}$, astfel că vom avea :

$$\lim E = p!\, e.$$

Notă. 1°. D-l D. MAVRODIN, întemeindu-se pe o teoremă stabilită de subsemnatul (G. M. XLI, p. 90). *„Dacă raportul diferenţelor de un ordin oarecare p ale termenilor a două şiruri u_n şi v_n are o limită pentru $n = \infty$, aceeaşi limită o vor avea şi rapoartele diferenţelor de ordine inferioare"*, observă că

$$E = \Delta^p u_n \quad , \quad \Delta^p v_n = \Delta^p n^p = p!$$

unde

$$u_n = (n-p)^p \left(1 + \frac{1}{n-p}\right)^{n-p} \quad , \quad v_n = n^p$$

şi că deci

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{\Delta^p u_n}{\Delta^p v_n} = \frac{\lim E}{p!}.$$

Pe de altă parte,

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \left(1 - \frac{p}{n}\right)^p \lim \left(1 + \frac{1}{n-p}\right)^{n-p} = e,$$

din care regăseşte apoi $\lim E = p!\, e$, *dacă* $\lim E$ *există*, care este de altfel ipoteza categorică a teoremei invocate. Această demonstraţie ar putea constitui o a doua soluţie a problemei *numai dacă s'ar demonstra în prealabil că* $\lim E$ *există*, ceea ce D-l D. MAVRODIN nu a făcut, astfel că cele de mai sus constituesc o simplă *verificare* a rezultatului obţinut în soluţia dată.

In fapt, prima soluţie a D-lui MAVRODIN conţine demonstraţia *existenţei* lim E, aşa că D-sa se putea baza pe ea, dar acolo se găseşte şi limita lui E, astfel că restul este de prisos sub acest raport.

2°. S'au mai primit încercări de soluţie în felul acesteia, s'au primit şi enormităţi ca cele semnalate cu ocazia rezolvării problemei 4600, care este un caz particular ($p = 1$) al celei de mai sus şi care ar fi putut inspira o soluţie şi pentru cazul de faţă.

M. G.

PROBLEMA 4746. *Se consideră ecuaţia diferenţială.*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x^2 - y^2 + 1)}{x(x^2 - y^2 - 1)}$$

şi se cere:

1°. *Să se integreze cu ajutorul substituţiei* $y = ux$;

2°. *Să se integreze punând* $x^2 + y^2 = u$, $2xy = v$;

3°. *Să se integreze cu ajutorul coordonatelor polare;*

4°. *Să se găsească un factor integrant de forma* $x^\alpha y^\beta$ *şi să se integreze apoi ecuaţia dată. Să se găsească expresiunea generală a factorilor integranţi.*

5°. *Utilizând substituţia dela 2°, să se regăsească forma generală a factorilor integranţi, cu ajutorul unei ecuaţii cu derivate parţiale.*

VIRGIL CLAUDIAN.

Soluţie dată de D-nii: Profesori A. ARŞAVSCHI, A. CĂLINESCU, C. SĂNDULACHE şi D-l D. MAVRODIN (student).

1°. Inlocuind în ecuaţie

$$y = ux \quad , \quad y' = u + u'x,$$

aceasta devine

$$\frac{dx}{du} = \frac{1 - u^2}{2u} x^3 - \frac{1}{2u} x$$

ecuaţie tip BERNOULLI, care se reduce la una lineară prin substituţia

$v = \frac{1}{x^2}$; vom obţine ecuaţia

$$v' - \frac{v}{u} = \frac{u^2 - 1}{u} \qquad \therefore \quad v = u\left[C + \int \frac{u^2 - 1}{u^2} du\right] = u^2 + Cu + 1$$

sau, revenind la variabilele x şi y,

$$x^2 + Cxy + y^2 = 1,$$

care reprezintă o familie de conice, a căror natură depinde de valorile constantei arbitrare C.

2°. Din $x^2+y^2=u$, $2xy=v$ deducem

$$xdx+ydx=\frac{1}{2}du \quad , \quad ydx+xdy=\frac{1}{2}dv,$$

de unde

$$2dx=\frac{xdu-ydv}{x^2-y^2} \quad , \quad 2dy=\frac{xdv-ydu}{x^2-y^2},$$

cu care ecuația dată devine

$$\frac{x\,(xdv-ydu)}{y\,(xdu-ydv)}=\frac{x^2-y^2+1}{x^2-y^2-1}$$

sau, aplicând o proprietate cunoscută a proporțiilor și simplificând apoi cu x^2-y^2,

$$dv=(x^2+y^2)\,dv-2xydu$$

adică, ținând seama de u și v,

$$dv=udv-vdu$$

sau

$$\frac{du}{u-1}=\frac{dv}{v}$$

deci, prin integrare, $u-1=Cv$, adică $x^2+y^2-2Cxy=1$.

3°. Punem $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$; ecuația dată devine

$$\frac{\cos\theta\sin\theta d\rho+\rho\cos^2\theta d\theta}{\sin\theta\cos\theta d\rho-\rho\sin^2\theta d\theta}=\frac{\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta+1}{\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta-1}$$

și efectuând calculele, fie direct, fie aplicând aceeași proprietate a proporțiilor, vom obține

$$(\rho^3-\rho)\cos2\theta d\theta-\sin2\theta d\rho=0$$

sau încă, separând variabilele

$$\frac{d\rho}{\rho^3-\rho}=\frac{\cos2\theta d\theta}{\sin2\theta}.$$

Integralele se calculează ușor și deducem

$$\rho^2-1=C\rho^2\sin^2\theta$$

din care rezultă imediat integrala generală aflată.

4°. Ecuația dată putându-se scrie

$$y(x^2 - y^2 + 1)\,dx - x(x^2 - y^2 - 1)\,dy = 0,$$

$x^\alpha y^\beta$ va fi un factor integrant, dacă

$$\frac{\partial}{\partial y}[x^\alpha y^{\beta+1}(x^2 - y^2 + 1)] + \frac{\partial}{\partial x}[x^{\alpha+1} y^\beta (x^2 - y^2 - 1)] = 0,$$

care se reduce la

$$(\alpha + \beta + 4)(x^2 - y^2) + \beta - \alpha = 0,$$

deci

$$\alpha + \beta + 4 = 0 \quad , \quad \beta - \alpha = 0,$$

adică

$$\alpha = \beta = -2.$$

Vom avea deci,

$$aU = \frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 y}\,dx - \frac{x^2 - y^2 - 1}{xy^2}\,dy = 0,$$

iar integrala generală va fi $U = C$. Deducem însă

$$U = \int \frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 y}\,dx + f(4) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{xy} + f(4),$$

iar

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x^2 - y^2 - 1}{xy^2}$$

conduce la $f(4) \equiv 0$.

Odată găsit un factor integrant $\mu_2 = x^{-2} y^{-2}$, expresiunea generală a factorilor integranți pentru ecuația dată va fi

$$\mu = \mu_1 \varphi(U) = \frac{1}{x^2 y^2} \varphi\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{xy}\right),$$

φ fiind o fracțiune arbitrară.

5°. Utilizând schimbările dela 2°, am văzut că ecuația dată se reduce la

$$v\,du + (1 - u)\,dv = 0.$$

Fie μ un factor integrant; vom avea

$$\frac{\partial(\mu v)}{\partial v} = \frac{\partial \mu (1 - u)}{\partial u}, \text{ sau } (u - 1)\frac{\partial \mu}{\partial u} + v\frac{\partial \mu}{\partial v} + 2\mu = 0,$$

ecuaţie cu derivate parţiale de primul ordin, pentru care ecuaţia diferenţială a curbelor caracteristice este

$$\frac{du}{u-1} = \frac{dv}{v} = \frac{d\mu}{-2\mu};$$

deducem două integrale prime

$$\frac{u-1}{v} = C_1 \quad , \quad \mu v^2 = C_2$$

şi stabilind o relaţie arbitrară $C_2 = \varphi(C_1)$ între constantele C_1 şi C_2, integrala generală a ecuaţiei cu derivate parţiale va fi

$$\mu = \frac{1}{v^2}\varphi\left(\frac{u-1}{v}\right),$$

sau revenind la variabilele x şi y, regăsim expresia lui μ.

Notă. 1°. Nu ştim ce consideraţiuni au condus pe autorul problemei la ecuaţia din enunţ: ţinem să semnalăm însă că aceasta constitue un exemplu dintr'o clasă generală de ecuaţiuni diferenţiale de primul ordin, studiată de marele matematician francez PAUL PAINLEVÉ, anume, ecuaţiile

$$y' = R(x, y),$$

unde $R(x, y)$ este o funcţiune raţională de y, ai căror coeficienţi sunt funcţiuni analitice de x şi căror integrală generală este de forma

$$F(x, y) = \frac{\varphi_0(x)\, y^n + \varphi_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + \varphi_n(x)}{\Psi_0(x)\, y^n + \Psi_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + \Psi_n(x)} = C.$$

PAINLEVÉ demonstrează că aceste ecuaţii sunt reductibile la ecuaţii de tip RICCATI, luând ca funcţiune necunoscută

$$u = \frac{\varphi_n - C\Psi_n}{\varphi_0 - C\Psi_0}.$$

Ar fi interesant de văzut ce dau aceste consideraţiuni generale în cazul particular al problemei de faţă.

2°. Un alt aspect pe care-l sugerează ecuaţia dată porneşte dela observaţia că ecuaţia dată este reductibilă la una lineară. Ori se ştie că între trei integrale particulare ale acesteia din urmă există o relaţie de forma

$$y_3 = ay_1 + (1-a)\, y_2 \quad , \quad a = \text{const}.$$

Rezultă că şi între trei integrale particulare ale ecuaţiei date trebue să existe o relaţie depinzând de o constantă arbitrară. Este interesant de găsit acea relaţie.

3°. Nu s'a examinat de ce natură sunt conicele reprezentate prin integrala generală

$$x^2 + 2Cxy + y^2 = 1.$$

Ori, este interesant de observat că acestea sunt iperbole, elipse, drepte paralele, dar nicidecum parabole, după cum arată semnul descriminantului care aci este $C^2 - 1$. Vom avea iperbole pentru $|C| < 1$, elipse pentru $|C| < 1$ (în particular pentru $C = 0$ avem un cerc), iar pentru $C = \pm 1$ două drepte paralele.

M. G.

PROBLEMA 4754. *Fie*

$$P = Ax + By + Cz,$$

$$Q_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1\ ,\quad Q_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2,$$

$$R_1 = A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1\ ,\quad R_2 = A'_2x + B'_2y + C'_2z + D'_2.$$

Să se demonstreze că dacă

$$Q_1 \begin{vmatrix} A & B & C & -P \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \end{vmatrix} - R_1 \begin{vmatrix} A & B & C & -P \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \end{vmatrix} = 0$$

atunci şi

$$Q_2 \begin{vmatrix} A & B & C & -P \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A'_2 & B'_2 & B'_2 & D'_2 \end{vmatrix} - R_2 \begin{vmatrix} A & B & C & -P \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \end{vmatrix} = 0.$$

M. GHERMĂNESCU.

1°. *Soluţie* dată de D-nii: D. MAVRODIN şi PAUL DOBRESCU. In determinanţii din prima relaţie înmulţim prima coloană cu x, pe a doua cu y, pe a treia cu z şi adunăm la a patra: obţinem

$$(\alpha)\quad Q_1 \begin{vmatrix} A & B & C & O \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & R_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & Q_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & R_2 \end{vmatrix} - R_1 \begin{vmatrix} A & B & C & O \\ A_1 & B_1 & C_1 & Q_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & Q_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & R_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Procedăm la fel cu determinanţii din a doua relaţie, apoi desvoltăm ambele relaţiuni după elementele ultimelor coloane: în primul membru al relaţiei a doua vom obţine, schimbat de semn, primul membru al primei relaţiuni, ceea ce arată că ele au loc în acelaşi timp.

2°. *Soluție* dată de D-l BUZINCU IOAN (Lic. militar Iași).

Procedăm ca în prima soluție, obținând relația (α), care se mai poate scrie

$$\begin{vmatrix} A & B & C & O \\ A'_1Q_1 - A_1R_1 & B'_1Q_1 - B_1R_1 & C'_1Q_1 - C_1R_1 & Q_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & Q_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & R_2 \end{vmatrix} = 0$$

sau încă, după ce am înmulțit elementele liniei a patra cu Q_2 și le-am scăzut din ale liniei a treia înmulțite cu R_2 și apoi am desvoltat după elementele ultimei coloane

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A'_1Q_1 - A_1R_1 & B'_1Q_1 - B_1R_1 & C'_1Q_1 - C_1R_1 \\ A'_2Q_2 - A_2R_2 & B'_2Q_2 - B_2R_2 & C'_2Q_2 - C_2R_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Procedând la fel cu a doua relațiune, obținem același determinant, cu deosebirea că elementele ultimelor două linii sunt schimbate între ele.

Notă. Relațiile din enunț reprezintă, scrisă sub forme diferite, ecuația unui *plan strâmb*, adică al suprafeței născută de dreaptă paralelă cu planul $P = 0$ care se sprijină pe dreptele $D\,(Q_1 = 0,\ B_1 = 0)$ și $D'\,(Q_2 = 0,\ R_2 = 0)$. In adevăr, o dreaptă paralelă cu planul $P = 0$ și care întâlnește dreapta D are ecuațiile

$$P = a,\quad Q_1 = bR_1,$$

unde a și b sunt doi parametri variabili. Această dreaptă întâlnește dreapta D' dacă sistemul

$$P = a,\quad Q_1 = bQ_2,\quad R_1 = 0,\quad R_2 = 0$$

este compatibil. Intre aceste relații eliminăm x, y, z, iar în rezultat înlocuim a prin P, iar b prin $\frac{Q_1}{Q_2}$; vom obține prima relație din enunț.

La fel, o dreaptă paralelă cu planul $P = 0$ și care întâlnește dreapta D' are ecuațiile

$$P = a' \quad,\quad Q_2 = b'R_2\,.$$

Procedăm ca mai sus și obținem a doua relație din enunț. Ele reprezintă ecuația aceleiași suprafețe, care este un *hiperboloid cu pânză* și care este astfel un *conoid*.

M. G.

PROBLEMA 4784. *Din numărul format de primele* n *cifre dela stânga lui* N^2 *se scade* N, *iar după diferența obținută se scrie numărul format de restul cifrelor lui* N^2. *Să se demonstreze că numărul astfel obținut se divide prin* N.

G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-ra SONIA M. TUDORAN (Șc. Centrală, Lic. „Marica Brâncoveanu", București) și de D-nii: H. M. BODNĂRESCU (Lic. „T. Maiorescu", București); P. DOBRESCU (Greci, Ilfov); V. FLORESCU (Lic. militar „N. Filipescu", Târgoviște); C. N. GAVRILESCU (Șc. de Ofițeri, București); V. HERMAN (Student, Cluj); I. V. JAREGHIE, C. PANTELIMON (Lic. militar, Iași); I. C. PAREPEANU (S-Lt. din Geniu); O. SACTER, I. I. ȚIȚEICA (Lic. militar „N. Filipescu", Târgoviște) și A. AL. VASILESCU-STABU (Lic. „Mihai Viteazul", Alba Iulia).

Fie A și B două numere, respectiv de n și m cifre, așa încât

$$N^2 = A \times 10^m + B .$$

Numărul M, format conform enunțului, este

$$M = (A - N)\, 10^n + B = N^2 - N \times 10^n = N(N - 10^n)$$

relațiune care demonstrează proprietatea enunțată.

Este evident că n trebue ales așa încât $A > N$, altfel problema nu are nici un sens aritmetic, deși din punct de vedere algebric, proprietatea subzistă și în cazul $A < N$.

Observațiuni. 1°. Unii corespondenți au considerat că n este numărul cifrelor lui N și au demonstrat proprietatea cu această restricțiune, care nici nu este cuprinsă, nici nu se sub-înțelege în enunț.

2°. D-nii: I. V. JAREGHIE, O. SACTER și A. AL. VASILESCU-STABU au rezolvat problema și în cadrul mai general enunțat astfel:

Dacă din primele n *cifre ale lui* N^m *se scade* N^p, *iar după diferența obținută se scrie restul cifrelor lui* N^m *se obține un număr divizibil prin* N^p.

Evident că trebue luat $p < m$.

3°. Soluțiuni bune, dar mai puțin concise, s'au primit dela D-nii: S. CETĂȚEANU (Lic. Gh. Șincai); A. PANĂ (S-Lt. Cluj); ACHILE PETRESCU (Lic. militar Iași); M. N. ROȘCULEȚ, T. C. ȘTEFAN (Lic. „Traian", T.-Severin).

G-L GH. B.

PROBLEMA 4786. *Fie* A', B', C' *picioarele a trei ceviene concurente în punctul* M_0, *în triunghiul* ABC. *Să se arate că dreptele lui* GAUSS *ale patrulaterelor* AB'C'M_0, BC'A'M_0, CA'B'M_0 *sunt concurente.*

ALEX. V. NICULESCU.

I. *Soluție* dată de D-nii: ANDRIESCU M. RAOUL, CIOC I. D-TRU, CONSTANTIN V. PANTELIMON, FLORESCU V., LASCU BAL, JAREGHIE V. IOAN, MIHALCEA N. N., PETRESCU ACHILLE, POPA D. MIRCEA, TURCU SANDU, VASILESCU-STABU M. ALEX. și S-LT PAREPEANU I.

Fie A"M, B"N, C"P dreptele lui GAUSS ale patrulaterelor din problemă. Figura PNB"C" este un paralelogram. Deci diagonala PC" trece prin mijlocul diagonalei B"N.

Figura NMA"B" este tot un paralelogram și diagonala A"M va trece tot prin mijlocul diagonalei B"N. Așa dar toate diagonalele trec prin același punct, deci dreptele A"M, B"N, C"P, ale lui GAUSS sunt concurente.

II. *Soluție* dată de D-nii: APOSTOL RADU, DECIULESCU GH., RĂDULESCU OCT., TEODORESCU N. DORIN și I. I. ȚIȚEICA.

Triunghiurile A"B"C", MNP sunt omotetice, fiind omotetice cu triunghiul ABC. După teorema lui DESARGUES, dreptele A"M, B"N, C"P vor fi concurente într'un punct Q astfel că

$$M_0Q : QG = 3,$$

(G ≡ baricentru) după cum ușor se poate vedea, aplicând teorema lui MENELAUS Δ-ului AM_0G, tăiat de transversala A"QM.

III. *Soluție* analitică dată de D-nii: CARDARA GH., COJOCARU PETRE, POPESCU-ZORICA ALEX., POSTELNICESCU C. M., PREDOIESCU TR.

Pentru simplificarea calculelor să luăm pe M_0 ca origină a două axe rectangulare, față de care vârfurile triunghiului au coordonatele:

$$A(x_1, y_1) \qquad B(x_2y_2) \qquad C(x_3y_3).$$

Ecuaţia dreptei lui GAUSS a patrulaterului AB'C'M este:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{x_1}{2} & \frac{y_1}{2} & 1 \\ \frac{x_2+x_3}{2} & \frac{y_2+y_3}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau sub o formă mai simetrică:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{x_1}{2} & \frac{y_1}{2} & 1 \\ \frac{x_1+x_2+x_3}{4} & \frac{y_1+y_2+y_3}{4} & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Prin permutări circulare ale indicilor se deduc şi celelalte drepte $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$. Se observă însă că toate aceste drepte au un punct comun, punctul Q de coordonate

$$Q\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3}{4}\right),$$

deci aceste drepte sunt concurente în Q.

Din expresia analitică a coordonatelor acestui punct rezultă că el împarte dreapta M_0G în raportul $MQ:QG = 3$.

Observări. 1°. D-l ŞTEFĂNESCU D. N. dă o soluţie deosebită acestei probleme, utilizând următoarea „lemă": „Dreptele ce unesc vârfurile unui triunghiu cu simetricile unui punct M în raport cu mijloacele laturilor opuse, sunt concurente". Observ că această „lemă" nu este decât teorema lui FRANKE, generalizată.

2°. O altă soluţie a problemei 4786 se obţine proiectând cilindric teorema cercului lui EULER. Se identifică atunci $Q \equiv O_9$, centrul cercului celor 9 puncte. O generalizare mai largă se poate avea prin proiecţia conică.

3°. Soluţia analitică a fost redijată după aceea trimisă de D-l POSTELNICESCU C. M. (elev-inginer), cu oarecare prescurtări.

A. V. N.

PROBLEMA 4824. *Se ia un punct* M *pe cercul* O *circumscris triunghiului* ABC. *Perpendicularele în* M *pe laturile triunghiului, taie cercul* O *în* A', B', C', *iar dreptele* MA, MB, MC *întâlnesc respectiv pe* B'C', C'A', A'B' *în punctele* A_1, B_1, C_1. *Să se arate că:*

a) *Dreptele* AA', BB', CC' *sunt concurente într'un punct* P *de pe dreapta lui* SIMSON;

b) *Punctele* A_1, B_1, C_1 *sunt colineare.*

M. NĂSTASE.

a) Se ştie că AA', BB', CC' sunt paralele cu dreapta SIMSON (a se vedea de ex.: *Culegere de probleme de Geometrie,* problema 27, Cap. V).

b) De asemenea, problema 39, Cap. V: trei paralele duse prin vârfurile triunghiului ABC, întâlnesc cercul circumscris în A', B', C'; dreptele ce unesc un punct M al cercului circumscris cu A, B, C întâlnesc laturile B'C', C'A', A'B' în punctele A_1, B_1, C_1, pe o paralelă cu direcţia paralelor duse. (caz particular al teoremei AUBERT).

Observări: 1°. A făcut identificările de mai sus, D-l M. C. POSTELNICESCU (şc. pol. Bucureşti). D-sa mai observă că folosind teorema precedentă şi analog: MA', MB', MC' taie pe BC, CA, AB în puncte colineare pe o dreaptă de aceeaşi direcţie, se regăseşte dreapta SIMSON.

2°. *Soluţie directă* foarte bună dă D-l M. AL. VASILESCU-STABU (cl. VI-a, lic. Mihai Viteazu, Alba-Iulia); pentru *a)* reface demonstraţia din C. d. P., pentru *b)* observă că unghiurile A_1, B_1, C_1 sunt egale fiindcă au aceeaşi măsură:

$$\text{măs. } A_1 = \tfrac{1}{2} \text{ măs. } (AB' - MC') = \tfrac{1}{2} \text{ măs. } (BA - MC') = \text{măs. } B_1, \text{ etc.}$$

şi din patrulaterele inscriptibile MB_1A_1C', MB_1C_1A' rezultă

$$\sphericalangle MB_1A_1 = \sphericalangle MC'B' = \sphericalangle MA'B' = \sphericalangle MB_1C_1$$

deci A_1, B_1, C_1 sunt colineare.

3°. In stilul 2°, s'au mai primit 4 soluţii dela liceul militar Iaşi care difereau numai prin notaţii. Suntem deprinşi cu astfel de rafinamente!

4°. D-l PAUL DOBRESCU (Greci-Ilfov) aplică interesant, teorema PASCAL: pentru *a)* în exagoanele ABB'MC'C' şi BCC'MA'A; pentru *b)* în AMBB'C'A' şi BMCC'A'B'. Aceeaşi soluţie se poate, de altfel, folosi şi pentru un enunţ mai general:

5°. *Generalizare. Fie* ABC, *un triunghiu înscris într'o conică* T; M, *un punct pe* T; *o dreaptă* Δ *taie laturile în* α, β, γ. Mα, Mβ, Mγ *retaie conica în* A', B', C' *şi* MA, MB, MC *taie pe* A'C', C'A', A'B' *în* $A_1B_1C_1$. *a)* AA', BB', CC' *concură într'un punct* P *pe* Δ; *b)* A_1, B_1, C_1 *sunt colineare pe o dreaptă ce trece prin* P.

Enunţul se poate justifica imediat şi în baza teoremei AUBERT: *dacă* ABC, A'B'C' *sunt două triunghiuri omologice de centru* P *înscrise în aceeaşi conică*, T, *iar* M *pe conică*, A'M, B'M, C'M *taie laturile triunghiului* ABC *in punctele* α, β, γ *pe o dreaptă* Δ *ce trece prin* P *şi analog* MA, MB, MC *taie laturile triunghiului* A'B'C' *în punctele* A_1, B_1, C_1 *pe o dreaptă ce trece prin* P — şi reciprocele ei.

Se poate enunţa şi reciprocele propoziţiei: *Fie* ABC *un triunghiu înscris într'o conică* T, M *pe* T, *iar* P *arbitrar*, AP, BP, CP *retaie conica în* A', B', C', MA', MB', MC' *taie respectiv laturile triunghiului* ABC *în punctele* α, β, γ *pe o dreaptă* Δ *ce trece prin* P, *etc.*...

Şi: *în triunghiul* ABC *înscris în conica* T, *fie* Δ *o dreaptă ce taie laturile în* α, β, γ, *iar* P *arbitrar pe* Δ; AP, BP, CP *retaie conica în* A', B', C', *iar* A'α, B'β, C'γ *sunt concurente în* M *pe conica* T, *etc.*...

Această propoziţie face să corespundă fiecărui punct P pe Δ, un punct M pe T: în particular pentru P la infinit pe Δ, $A_1B_1C_1$ e paralelă cu Δ. Invers, fiind cunoscut M şi α se poate determina Δ: dacă T este un cerc se observă uşor că α, β, γ sunt proiecţiile lui M pe laturi sub acelaşi unghiu, căci

$$\sphericalangle B\alpha\beta\gamma = \sphericalangle \alpha BB' = \text{măs. } \tfrac{1}{2} \text{ arc } CB' = \text{măs. } \tfrac{1}{2} \text{ arc } BC' = \sphericalangle C'MB$$

deci BγMα sunt conciclice, etc. Δ este dreapta SIMSON a punctului M, trecând prin α.

6°. In ultimul timp s'a mai primit o foarte bună soluţie dată de D-l VICTOR FLORESCU (cl. VII, lic. mil. N. Filipescu); D-sa citează că propoziţia generalizată aparţine lui J. NEUBERG (*Mathesis*, 1897 pag. 17).

N. M.

PROBLEMA 4868. *Să se găsească un patrat de patru cifre de forma* aabb *a cărui rădăcină să fie de forma* cc.

SUBLT. MIHAI C. I. VLAD.

In *Gazeta Matematică* Vol. I, pag. 282 s'a publicat problema Nr. 138 propusă de GR. N. MAKARIE şi având următorul enunţ: *Să se găsească numărul de patru cifre de forma* aabb *care să fie un patrat perfect;* problema 4868, impunând condiţiunea suplimentară ca rădăcina să fie de forma *cc*, ar fi un caz particular al problemei 138.

In realitate însă problema 138 conduce la soluţia unică

$$7744 = 88^2,$$

care este deci şi soluţia problemei de faţă.

Se vede de aci că ultima condiţie nu este necesară pentru aflarea soluţiei, în sistemul de numeraţie zecimal.

Pentru alte sisteme de numeraţie însă, această problemă este interesantă. Ea a fost studiată de către D-l V. THÉBAULT care a stabilit regulile generale după care se formează aceste patrate curioase (vezi articolul D-sale *„Asupra unor patrate curioase"*, publicat în G. M. Vol XLIII, pag. 293 şi referinţele date acolo asupra acestei probleme).

Dintre rezolvitori numai D-nii T. C. ŞTEFAN (cl. VIII şt. lic. „Traian", T.-Severin) şi N. D. ŞTEFĂNESCU (lic. mil. „N. Filipescu", Târgovişte) şi-au pus problema sub forma generală de mai sus, fără însă a examina alte cazuri decât acela al sistemului zecimal.

Au rezolvat problema aşa cum a fost propusă, D-rele: FLORESCU ZOE, VENERA TĂNĂSESCU (studentă, Bucureşti), LIDYA M. TUDORAN (cl. III B, Şcoala Centrală „Marica Brâncoveanu", Bucureşti) şi D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU (elev-inginer), M. M. ANASTASIU (cl. VI, lic. mil. „N. Filipescu", Târgovişte), N. G. APOSTOL (cl. VIII, lic. mil. Cernăuţi), V. C. ATANASIU (cl. V, lic. mil. Iaşi), V. GH. GH. BÂRLEA (lic. mil. „N. Filipescu", Târgovişte), E. D. BOIAN (cl. VIII B, lic. mil. Tg. Mureş), D. D. BUZNEA (cl. VI, lic. mil. „N. Filipescu", Târgovişte), ST. CETĂŢEANU (cl. VII, lic. „Şincai", Bucureşti), A. I. CORNĂŢEANU, GH. D. DECIULESCU (cl. VI, lic. mil. „N. Filipescu", Târgovişte), M. DIACONESCU (cl. V, lic. mil. „N. Filipescu", Târgovişte), GH. CARDARA-DIMITRIU (stud. matematici, Bucureşti), V. FLORESCU (cl. VII, lic. mil. „N. Filipescu", Târgovişte), AL. A. GHEORGHIU (cl. V, lic. mil. Iaşi), I. GOLDBERG (cl. VIII B, lic. „Matei Basarab", Bucureşti), A. N. GRIGORIU (Bucureşti), S-LT. M. GRUMĂZESCU, R. E. GVIAZDOMORSCHI (cl. VI, lic. mil. Cernăuţi), ST. D. IONESCU (cl. VI, lic. mil. Cernăuţi), GH. N. B. IONESCU (lic. „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti), N. V. NEDELCU (lic. mil. Cernăuţi), I. Z. MĂINESCU (cl. V B, lic. mil Tg. Mureş), E. MARCOVICI (student, Iaşi), D. MAVRODIN, N. I. MILU (şcoala navală, Constanţa), M. N. MINGEA (cl. VI, lic. mil. „Mihai Viteazul", Tg. Mureş), EM. S. MODÂLCĂ (cl. VII R, lic. „Traian", T.-Severin), LT. P. NEGOIŢĂ, C. N. PARAIPAN (cl. VI, lic. mil. „Ştefan cel Mare", Cernăuţi), I. I. PASCARU (cl. VII, lic. mil. Iaşi), A. PETRESCU (lic. mil. Iaşi), M. D. POPA (cl. VI, lic. mil. Iaşi), H. L. REISCHER (lic. Internat, Iaşi), M. N. ROŞCULEŢ, A. O. ŞAICHIN (cl. VIII B. lic. „Matei Basarab", Bucureşti), A. SECU (cl. VIII, lic. mil. „Regele Ferdinand I", Chişinău), I. I. STAMATE (cl. VIII, lic. „C. Brediceanu", Lugoj), I. I. SOLOMON (cl. VII, lic. Internat, Iaşi), M. AL. VASILESCU-STABU (cl. VI, lic. „Mihai Viteazul", Alba-Iulia), E. GH. VIJELIE (cl. V. lic. mil. „N. Filipescu", Târgovişte).

Observaţiuni. 1°. Soluţia problemei 138 s'a publicat în G. M. Vol. II, pag. 97, unde se dă şi indicaţia că ea se găseşte propusă şi rezolvată în *„Exercices d'Arithmétique"* de FITZ-PATRICK.

Problema se găseşte de asemenea în *„Culegere de Probleme de Aritmetică"* de I. IONESCU partea I, ed. II, în cap. XLVIII. Nr. 4.

2°. Au arătat că problema este cunoscută: D-ra VENERA TĂNĂSESCU şi D-l M. AL. VASILESCU-STABU.

3°. Rezolvitorii care s'au mulţumit să ridice la patrat *toate* numerele de forma *cc*, nu au fost menţionaţi aici.

U. M. F.

PROBLEMA 4900. *Să se verifice identitatea:*

$$a^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi [b \sin^4\varphi - c \cos^4\varphi] + a [b^2 \sin^6\varphi - c^2 \cos^6\varphi]$$
$$+ a^2 (b - c) \sin^4\varphi \cos^4\varphi + b^2 (c - a) \sin^4\varphi + c^2 (a - b) \cos^4\varphi$$
$$- \sin^2\varphi \cos^2\varphi [- bc (b - c) + ac (c - a) \cos^2\varphi + ab (a - b) \sin^2\varphi]$$
$$+ bc [c \cos^2\varphi - b \sin^2\varphi] = 0.$$

N. N. MIHĂILEANU.

Pentru ca expresia să fie o identitate în raport cu o literă oarecare, fie *a*, trebue să fie nuli coeficienţii în a^2, *a*, *1*. Dar prima parte a identităţii de demonstrat, fie E, se poate pune sub forma

$$E = a^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi [b \sin^4\varphi - c \cos^4\varphi + (b - c) \sin^2\varphi \cos^2\varphi + c \cos^2\varphi - b \sin^2\varphi]$$
$$+ a [b^2 \sin^6\varphi - c^2 \cos^6\varphi - b^2 \sin^4\varphi + c^2 \cos^4\varphi - \sin^2\varphi \cos^2\varphi (c^2 \cos^2\varphi - b^2 \sin^2\varphi)]$$
$$+ bc [b \sin^4\varphi - c \cos^4\varphi + (b - c) \sin^2\varphi \cos^2\varphi + c \cos^2\varphi - b \sin^2\varphi].$$

Pentru ca paranteza întâia sau a treia să fie nule, oricare ar fi *b*, *c* independenţi, trebue ca coeficienţii lor să fie nuli.

Dar

$$\sin^4\varphi + \sin^2\varphi \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \sin^2\varphi (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - 1) = 0$$
$$\cos^4\varphi + \sin^2\varphi \cos^2\varphi - \cos^2\varphi = \cos^2\varphi (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1) = 0.$$

Analog pentru paranteza a doua

$$\sin^6\varphi - \sin^4\varphi + \sin^4\varphi \cos^2\varphi = \sin^4\varphi (\sin^2\varphi - 1 + \cos^2\varphi) = 0$$
$$\cos^6\varphi - \cos^4\varphi + \sin^2\varphi \cos^4\varphi = \cos^4\varphi (\cos^2\varphi - 1 + \sin^2\varphi) = 0$$

şi identitatea este verificată.

Soluţii date de D-rele MIOARA I. CRĂCIUNESCU, ANA C. GEREANU şi D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU, E. G. BEIU-PALADI, C. C. CHIRIAC, I. D. DIACONESCU, I. GOLDBERG, S. JOE, N. I. MILU, E. S. MODÂLCĂ, A. N. POPESCU-ZORICA, TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI, H. L. REISCHER, A. O. ŞAICHIN, I. I. SOLOMON, MIRCEA STĂNCULESCU, P. CONSTANTIN, I. V. JAREGHIE, D. OBREJA, M. D. POPA, I. STREDER, S. R. TURCU.

Soluţii bune sosite în ultimul timp dela D-nii: SLT. M. GRUMĂZESCU, REMUS MOŢOC, ŞT. ŞTEFANOV, M. STOENESCU, S. N. ŞERBĂNESCU, N. I. STAICU, GR. GH. HORTOPAN, MATEI VASILE şi M. C. ALEXANDRESCU.

N. M.

EXERCIŢII

27. Să se arate că dacă:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma-\varphi)+\cos(\alpha+\varphi)+\cos(\beta+\varphi)+\cos(\gamma+\varphi)=0$$

atunci avem:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}=\operatorname{cotg}\varphi$$

(Generalizarea prob. 17 Cap. XI. Culegere de Probleme de Trigonometrie Ed. II).

MIRCEA ADAM.

R. Relaţia de condiţie se mai poate scrie

$$[\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma]\cos\varphi$$
$$=[-\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma]\sin\varphi$$

şi ţinem seama că:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

$$-\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Dacă facem: $\varphi=\frac{\pi}{4}$ şi $\alpha=\frac{1}{4}(3a-b-c)$ etc. dăm peste problema citată.

In mod analog se poate arăta că dacă avem:

$$-\sin(\alpha+\beta+\gamma+\varphi)+\sin(\alpha-\varphi)+\sin(\beta-\varphi)+\sin(\gamma-\alpha)=0$$

vom avea şi:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}=\operatorname{tg}\varphi.$$

28. Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu, atunci avem:

$$\sum{}'\frac{1}{\operatorname{tg}A-\dfrac{1}{\operatorname{tg}B-\dfrac{1}{\operatorname{tg}C}}}=-4\sum\operatorname{cotg}2A.$$

G. BASACOV.

R. Primul membru al egalității e format din 6 fracții, întrucât permutarea numai între două tangente e suficient pentru a obține o fracție diferită. Să considerăm următoarele două fracții

$$\frac{1}{\mathrm{tgA}-\dfrac{1}{\mathrm{tgB}-\dfrac{1}{\mathrm{tgC}}}} \quad \text{și} \quad \frac{1}{\mathrm{tgA}-\dfrac{1}{\mathrm{tgC}-\dfrac{1}{\mathrm{tgB}}}}.$$

Prima, se mai poate scrie.

$$\frac{\mathrm{tgB\,tgC}-1}{\mathrm{tgA\,.\,tgB\,tgC}-\mathrm{tgA}-\mathrm{tgC}}$$

și ținând seamă că $\mathrm{tgA\,.\,tgB\,.\,tgC}=\mathrm{tgA}+\mathrm{tgB}+\mathrm{tgC}$ avem:

$$\frac{\mathrm{tgB\,tgC}-1}{\mathrm{tgB}}=\mathrm{tgC}-\mathrm{cotgB}.$$

Pentru cea de-a doua obținem, la fel:

$$\mathrm{tgB}-\mathrm{cotgC}.$$

Adunându-le:

$$(\mathrm{tgB}-\mathrm{cotgB})+(\mathrm{tgC}-\mathrm{cotgC})=-2\,\mathrm{cotg2B}-2\,\mathrm{cotg2C}.$$

Considerând acum și grupa de două fracții, cari au ca primă tang. la numitor pe aceea a unghiului B, vom obține în mod analog, ca sumă a lor, expresiunea:

$$-2\,\mathrm{cotg2C}-2\,\mathrm{cotg2A},$$

iar pentru ultimile două avem:

$$-2\,\mathrm{cotg2A}-2\,\mathrm{cotg2B}.$$

Deci suma tuturor fracțiilor este:

$$-4\,(\mathrm{cotg2A}+\mathrm{cotg2B}+\mathrm{cotg2C}).$$

29. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$E=-\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma+\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)$$

α, β, γ fiind arce oarecare. (Generalizarea prob. 27 Cap. XII. — Culegere de probleme de Trigonometrie Ed. II).

MIRCEA ADAM.

R. Se scrie că:

$$2\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)=\cos(-\alpha+\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\ \text{etc.}$$

apoi se aplică formula:

$$\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c)=4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2}.$$

Sau mai simplu dacă se observă că:

$$\frac{\sin\alpha \sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma} = \operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma) \text{ etc.}$$

şi găsim

$$E = 2\cos\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Dacă în expresia E facem:

$$\alpha = -(a+b+c) \quad \beta = a+b \quad \gamma = b+c$$

obţinem problema 27 Cap. XII din Culegere — iar dacă înlocuim pe α prin $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ etc. — obţinem:

$$-\cos\alpha \sin(\beta+\gamma) + \cos\beta \sin(\gamma+\alpha) + \cos\gamma \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha \cos\beta \cos\gamma.$$

PROBLEME PROPUSE

4927. Care numere mai mici ca o sută se pot scrie cu aceleaşi cifre în două sisteme de numeraţiune diferite?

I. IONESCU.

4928. Să se găsească numerele întregi a căror sumă au ca rădăcină pătrată diferenţa lor. Generalizare.

ION C. SCHILERU-DILI.

4929. In două cercuri secante, având coarda comună AB, se consideră câte un diametru CD, C'D', proecţiile E, E' ale punctului A, comun cercurilor, pe aceste diametre şi C_1, D_1 proecţiile pe CC', DD'.

Să se arate că dreapta definită de punctele (AC, EC_1), (AD, ED_1) întâlneşte dreapta definită de (AC', $E'C_1$), (AD', $E'D_1$) într'un punct situat pe dreapta AB.

C. IONESCU-BUJOR.

4930. Fie ABCD un paralelogram şi A'B'C'D' paralelogramul format de mediatoarele lui ABCD. Să se arate că:

1°. Cele două paralelograme sunt asemenea.

2°. Au acelaşi centru de greutate.

3°. Diagonalele respective sunt perpendiculare.

4°. In cazul particular când $\sphericalangle(AB, AD) = 45^0$, romburile AA'CC', BB'DD' devin patrate.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

4931. In triunghiul ABC, dreptunghic în A, se ia pe latura AB, segmentul $\overline{AD}$ sau $\overline{BD}$, egal cu latura AC.

Care este locul punctului D când variind triunghiul $\overline{BC}$ rămâne constant.

LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

4932. $A_2B_2C_2$ fiind triunghiul complementar triunghiului $A_1B_1C_1$ care este tangenţial triunghiului ABC, să se arate că perpendicularele ridicate în O centrul cercului ABC, respectiv pe dreptele OA_2, OB_2, OC_2 taie laturile BC, CA, AB ale triunghiului în trei puncte colineare.

TH. G. COCEA.

4933. Să se împartă *numai cu ajutorul compasului* un segment dat $\overline{AB}$ în două părţi egale. Generalizare.

Să se găsească *numai cu ajutorul compasului* centrul de simetrie al figurei formate de două puncte date A şi B.

O. N. ŢINO.

4934. Să se rezolve sistemul:

$$a(x+y) = b(y+z) = c(z+x) = xyz.$$

DUMITRU MATEI.

4935. Ştiind că:

$$A_{n+1} = a\,A_n + b\,B_n \;;\; B_{n+1} = A_n + a\,B_n$$

să se arate că determinantul:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} A_1 - B_1\sqrt{b} & A_2 - B_2\sqrt{b} & \dots & A_n - B_n\sqrt{b} \\ A_{n+1} - B_{n+1}\sqrt{b} & A_{n+2} - B_{n+2}\sqrt{b} & \dots & A_{2n} - B_{2n}\sqrt{b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n^2-n+1} - B_{n^2-n+1}\sqrt{b} & A_{n^2-n+2} - B_{n^2-n+2}\sqrt{b} & \dots & A_{n^2} - B_{n^2}\sqrt{b} \end{vmatrix}$$

are valoarea zero oricare ar fi a şi b.

HAR. P. IONESCU.

4936. Să se găsească, pentru $x = 1$, limita expresiunii :

$$E_p = \frac{\sqrt[n]{(a^n+1)x - \sqrt[n]{(a^{n^2}+1)x - \sqrt[n]{(a^{n^3}+1)x - \ldots - \sqrt[n]{(a^{n^{p-1}}+1)x - \sqrt[n]{x}}}}} - \alpha}{x-1},$$

unde α este a sau 1, după cum p este *par* sau *impar*, a fiind o constantă. Caz particular $a = 1$.

M. GHERMĂNESCU.

4937. Fie un triunghiu oarecare ABC greu şi omogen şi A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor. Se îndoaie la 90^0 triunghiurile A_1B_1C, A_1C_1B, B_1C_1A către aceeaşi faţă a triunghiului $A_1B_1C_1$. Figura asfel formată se aşează cu vârfurile pe un plan orizontal. Se cere poziţia rezultantei R şi valorile reacţiunilor $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

Discuţiune.

LT. C. IONESCU-ŢIU.

4938. Se dă seria complexă cu termenul general

$$u_n = \frac{(-1)^{E\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{n} + i\,\frac{(-1)^{E\left[\frac{n}{2}\right]}}{n+1}$$

$E(x)$ este simbolul lui LEGENDRE, adică partea întreagă din numărul real x. Să se arate că schimbând convenabil ordinea termenilor, seria dată poate avea drept sumă orice număr complex, dat dinainte.

2. Să se demonstreze aceeaşi proprietate pentru seria cu termen general

$$v_n = (-1)^{E\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{i}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right).$$

MIRCEA MĂNESCU.

ERATA. 1. La pag. 330 rândul 23 se adaugă după virgulă : ***divizate cu patratele laturilor triunghiului de reţerinţă.***

2. La problema 4885 se scad din numitori respectiv cosA, cosB, cosC.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexandrescu C. Mihail (4908, 24); *Andronache Virgil* (4908); *Apostol Radu* (4829, 65); *Bârlea V.* (4908); *Bodnărescu M. Horia* (4899, 906); *Boian D. Emil* (4829, 99, 904, 08, 23); *Boldescu P.* (4916, 17, N); *Botez D. Tr.* (4899, 908); *Cherchez Mihu* (4924, 25); *Cetăţeanu Stelian* (4717); *Constantin V. P.* (4897, 906, 11); *Cornăţeanu I. Aurel* (4852, 97, 921, 24); *Crăciun I. I.* (4899); *Diaconescu D. Ion* (4868, 69, 923); *Floareş I. Adrian* (4919, 23); *Florescu Victor* (4883, 93, 96, 907, 08, 23); *Grumăzescu M. Subloc.* (4897); *Gviazdomorschi F. Romulus* (4908, 19, 23); *Hortopan Gh. Gr.* (4904, 08); *Ionescu B. N. Gh.* (4908); *Jipa C. Nicolae* (4908); *Marteş Gr.* (4626, 60, 708, 40, 92, 874, 76, 99, 900, 02, 25); *Mihai C. I. Vlad Locot.* (4924); *Mingea N. M.* (4911); *Miroslav Şt. Tudorel* (4908); *Modâlcă S. Emil* (4773, 869, 81, 923); *Moessner A.* (C, N); *Motaş C. Camil* (4893, 911); *Nedelcu V. Nicolae* (4900, 19, 23); *Negoiţă P. Locot.* (4919); *Pantelimon V. Const.* (4765, 893, 923); *Petrescu Achile* (4918, 21); *Petrescu M.* (4919); *Popa D. Mircea* (4765, 802, 92, 97, 911, 17, 23); *Popescu Zorica N. Al.* (2466, 4496, 825, 29, 36, 76, 85, 96, 908, 23, N); *Predoiescú-Ţânţăreni Tr.* (4378, 584, 649, 765, 810, 30, 44, 92, 911, E); *Reischer L. H.* (4829, 69, 911, 18, 24); *Rociu I. Margareta* (4829); *Rohr I. Al.* (4829, 80, 92, 917); *Romaşcan G. Georgeta* (4908, 11); *Roşculeţ N. M.* (4710, 851, 918); *Rusu Eug. D-tru* (4923); *Segal Joe* (4667); *Solomon I. Isac* (4869, 911); *Staicu I. N.* (4829); *Ştefănescu D. Nic.* (4897, 99, 906, 23); *Stoenescu Mirel* (4923); *Streder I.* (4923); *Tătaru N. N.* (4868, 81); *Theodorescu N. Dorin* (4869, 99); *Tilică C. Şt.* (4730, 84, 824, 29, 908, 11, 18); *Toma N. Nicolae* (4877, 911); *Turcu R. Sandu* (4642, 821, 65, 906); *Turtoiu Fănică* (4924); *Vasilescu-Stabu A. M.* (4911).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia VI . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* 1926. (Epuizată).

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50
Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. **C. D. IONESCU-ŢIU**

C. 50.343

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIII

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1938

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. † Gh. Em. Filipescu (urmare şi sfârşit) . . *Ion Ionescu.*
2. Aritmetica lui Gheorghe Asachi (urmare) . *P. Z. Cazanacli.*
3. Privire istorică asupra rezolvării ecuaţii cubice . . . . . *Fl. Câmpan.*
4. Asupra unor perechi de triunghiuri omologice . . . . . *C. Ionescu-Bujor.*
5. Premiul „Inginer Al. Roşu".
6. Note Matematice: 37 — 40.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 275.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 3059, 3248, 4162, 4599, 4611, 4736 4775, 4823, 4850, 4877, 4899.
11. Exerciţii: 30 — 31.
12. Probleme propuse: 4939 — 4950.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1938

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stan**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1937 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4859, 71, 79, 88, 90, 94, 901, 03, 04, 05, 09, 12, 13, 14, 15, 20, 22, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

† GH. EM. FILIPESCU

(Urmare dela pag. 342).

Activitatea la Societatea Politecnică

După terminarea Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele, GH. FILIPESCU a cerut înscrierea în Societatea Politecnică, în Decemvrie 1907. Aci se întâlnea cu camarazi ai săi şi pentru destindere a muncii intense din cursul zilei, se distra jucând biliard cu dânşii.

In anul 1909 publică în *Buletinul Societăţii* primul său articol asupra cadrelor rigide, în legătură cu proiectul remizei de locomotive dela Bucureşti, apoi *„Formule pentru calculul betonului armat"*, tipărită şi aparte, pentru uzul elevilor Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele, iar în anul 1914 un nou studiu asupra cadrelor rigide. In acest timp a făcut şi câteva recenzii.

Activitatea cea mare a lui FILIPESCU la Societatea Politecnică a fost după războiu. Această activitate, precum şi cea desvoltată ca asistent şi apoi ca profesor la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele,— transformată în 1921 în Şcoală Politecnică, — au făcut ca membrii Societăţii să-l aleagă în Comitet cu începere din Decemvrie 1921 în mod continuu, la unele alegeri fiind în fruntea listei cu aproape 90% din numărul votanţilor.

Chiar dela intrarea în Comitet i s'a dat în sarcina sa unul din cele două locuri de Redactor al Buletinului Societăţii, pentru propăşirea căruia a depus foarte multă tragere de inimă şi multă muncă. El a pus şi pe inginerii de sub ordinele sale să lucreze cu toată intensitatea pentru acel Buletin şi i-a sporit considerabil veniturile prin aducerea de subvenţii şi mai ales de anunţuri. Volumele scoase cu ocaziunea centenarului Căilor Ferate şi ale semicentenarului Societăţii Politecnice i-au cerut multă strădanie, dar cu ele se poate făli cu drept cuvânt Societatea Politecnică.

In anii 1923—1928 FILIPESCU a mai îndeplinit şi sarcina de Secretar al Societăţii. El a făcut parte din diferite Comisiuni alese de Comitetul Societăţii, printre care şi Comisiunea pentru alcătuirea noului Regulament al Societăţii. El a reprezentat Societatea la diferite Adunări generale şi Congrese ale altor Societăţi, şi în special la *Federaţia Asociaţiunilor de profesionişti intelectuali*, la grupul român afiliat *Asociaţiunii internaţionale de Poduri şi Şarpante*, la

Adunările absolvenţilor Şcoalelor de meserii, etc. Inginerii industriali ceruseră lui FILIPESCU să înfiinţeze un *Cerc de studii pentru industrii* sub Preşedinţia sa, pe care Comitetul Societăţii l-a aprobat, dar care nu a putut lua fiinţă până la moartea sa. De altfel, în ultimul timp industria română făcea apel la cunoştinţele şi experienţa lui FILIPESCU pentru a-i da concursul său. Astfel la moartea sa, el era membru în Consiliul de administraţie al *Camerelor de Comerţ şi de industrie* din Bucureşti, membru în Consiliul de administraţie al *Fabricei Româneşti de becuri electrice,* etc.

La *Societatea Politecnică* ca şi la *Asociaţiunea generală a Inginerilor,* unde FILIPESCU a fost şi Preşedinte de Secţie, — el a luptat cu tărie ca drepturile inginerilor la muncă, în direcţiunile pentru care sunt formaţi, să nu fie încălcate. Pentru a se învedera aceasta este destul să dau un exemplu. La 8 Iunie 1936 se întâmplă groasnicul accident dela Cotroceni, când două Tribune se prăbuşesc încărcate cu oameni în faţa Majestăţei Sale Regelui şi a şefilor Statelor amice: Cehoslovacia şi Jugoslavia. Din Comisiunea numită de Primărie care a cercetat cauzele acestui teribil accident, a făcut parte şi G. FILIPESCU. Asupra cauzelor de ordin tecnic, dânsul a ţinut o Conferinţă la Societatea Politecnică, de faţă fiind şi d-l Primar al Capitalei. După sugestiunile Comisiunii, FILIPESCU a redactat cu d-l Primar AL. DONESCU o decizie prin care se stabilea că, la autorizările de construcţiuni care cer calcule de rezistenţă, proiectele să fie semnate, nu numai de un arhitect, ci şi de un inginer.

Cele mai multe din lucrările sale, FILIPESCU le-a publicat în *Buletinul Societăţii Politecnice.* Astfel a publicat necroloage pentru fostul său Profesor D. G. MANY (1920), pentru fostul său Director General AL. F. BĂDESCU (1930) şi pentru GH. CARACOSTEA (1931).

Din studiile sale asupra liniilor de tramvaie a scos articolele: *flexiunea şinilor de tramvaiu* (1921); *racordarea aliniamentelor cu arcuri de cerc* (1925) sau *a două arce de cerc* (1926).

Problema flambajului a preocupat deseori pe FILIPESCU. In această privinţă a scris un articol asupra *Flambajului barelor în un mediu elastic* (1921), *Flambajul prin încovoiere,* (1923) şi *Formule prusiane de flambaj din 1925* (1929).

Alte chestiuni de Rezistenţa Materialelor tratate în Buletinul Societăţii Politecnice sunt: *Incovoierea grinzilor când rezistenţele trec de limita de proporţionalitate* (1928); *Liniile de influenţă*

(1929); *Calculul cadrelor* (1937). Asupra acestei din urmă chestiuni a mai publicat două articole în *Buletinul Şcoalei Politecnice* din Bucureşti. Noţiuni asupra *Calculului vectorilor* au apărut în 1929.

Tot în Buletinul Societăţii Politecnice FILIPESCU şi-a publicat conferinţa de care am vorbit asupra *Căderii Tribunelor dela Cotroceni,* (1936), precum şi *Contribuţia lui* NAVIER *la Teoria elasticităţii* (1936) *şi Contribuţia lui* COULOMB *în Statică şi Rezistenţă* (1937).

Privitor la *Noile vagoane de tramvaie* a scris un articol în 1922, iar în *Buletinul jubiliar* din 1931 a scris un articol despre Tramvaiele şi mijloacele de transport în comun în ultimii 50 de ani (1931).

Pentru a-şi da seama de ce rezistenţă este capabilă sudura, aşa cum se practică de lucrătorii Societăţii de Tramvaie, a pus de s'a făcut la 8–10 Octomvrie 1931 o încercare de rupere a unei grinzi cu zăbrele sudate, experienţă descrisă de d-l C. TEODORESCU în Buletinul Societăţii (1932).

Naţionalismul lui Gh. Filipescu

FILIPESCU fiind crescut în copilărie la Bucecea, orăşel cu un număr mare de evrei, a căpătat o mare aversiune în contra a tot ce nu era românesc, ce nu era creştinesc. Ideile acestea i s'au întărit pe timpul cât a urmat Liceul în Botoşani.

Venind în Bucureşti a găsit aici un mediu mai naţionalist, însă nu pierdea nici o ocaziune în care să nu-şi manifesteze toate sentimentele sale patriotice. Pe timpul răscoalelor ţărăneşti, blândul şi omul de ordine FILIPESCU devenise turbulent, agresiv. Intrând în clasă îl găseam vociferând şi agitat, deplasat dela locul lui.

Când d-l N. IORGA a chemat studenţimea ca să protesteze în Piaţa Teatrului Naţional, deoarece pe scena acestuia se juca de către Români piese în limbi străine, FILIPESCU a răspuns la apel printre cei dintâiu, cu un mare număr de colegi, cari au jucat rolul geniştilor în lupta cu poliţia şi armata. El a organizat bararea străzii Regale cu vagoane de tramvaiu, scoase de pe şini, scoaterea de pietre din pavaje şi transportarea lor la acel baraj.

In asemenea condiţiuni nu a fost greu lui FILIPESCU ca, ajuns inginer, să caute pe toate căile să substitue elementul naţional românesc la toate serviciile şi lucrările pe care le-a făcut. Ca Director

tecnic, şi apoi Director general la Tramvaiele Comunale, i-a fost de asemenea uşor să continue impulsiunea dată de VINTILĂ BRĂTIANU, predecesorilor săi d-l C. BUŞILĂ şi AL. F. BĂDESCU, de a face ca Societatea să rămână curat românească. El a rezistat, cu toată tăria, tendinţelor de a se introduce personal strein în Administrarea şi la lucrările dela Tramvaiele Comunale, deşi erau presiuni puternice dela acţionari şi dela politiciani în sensul contrariu. Chiar când se aducea câte un specialist pentru anumite lucrări, cum a fost la începutul sudurii aluminotermice a şinilor, el ataşa pe lângă dânsul personal inteligent şi lucrători deştepţi şi abili care să le ia repede procedeele şi metodele de lucru şi trimetea pe străini cât mai repede la locul de unde au venit.

Asemenea tendinţe naţionaliste şi le manifesta în toate domeniile în care activa. Astfel a luptat pentru naţionalizarea personalului didactic şi administrativ dela Şcoala Politecnică şi de la alte Instituţii la care era chemat să activeze.

Personalul şi lucrătorii dela Tramvaiele Comunale cunoşteau sentimentele naţionaliste ale fostului lor Director general şi ii dădeau sprijinul pentru realizarea idealurilor lui.

Moartea lui Gh. Filipescu

In ziua de 24 Noemvrie 1937, FILIPESCU s'a dus dimineaţa la Şcoala Politecnică la ora $8^1/_2$ şi a făcut două ore de curs, a rezolvat câteva chestiuni în calitatea de Preşedinte al Secţiunii Constructorilor şi s'a dus de acolo la Biroul său dela Direcţiunea Generală a Tramvaielor, unde a lucrat până la ora 13,30. De aci s'a dus de a luat masa cu familia sa, s'a repauzat puţin şi sub seară s'a întors la Direcţiunea Generală spre a discuta cu Directori ai săi, diferite chestiuni privitoare la personal. Pe la ora 18,30 capul i se aplecă pe birou, vocea i se stinge, ochii i se închid, astfel că până să se aducă un medic ca să-i dea primele ajutoare, el părăsise această lume pentru vecie!

A avut o moarte ideală pentru un om al datoriei, dar prea fulgerătoare, prea sdrobitoare pentru familie, pentru prietenii şi cunoscuţii lui, pentru elevii, personalul şi lucrătorii care ţineau mult la dânsul! Pentru toţi, desnodământul era neaşteptat, neexplicabil.

Din cauza marelui devotament pus în Serviciu, FILIPESCU îşi şubrezise sănătatea şi fusese în mai multe rânduri bolnav. Astfel

într'o iarnă a căpătat o răceală care l-a ținut în casă peste o lună, căci nopți întregi umbla de pe o linie pe alta spre a lua măsuri contra înzăpezirii vagoanelor și astfel a se evita ca a doua zi populația Capitalei să fie lipsită de mijloace de transport. Tramvaiele au desființat aproape complet săniile, iar automobilele, în zilele de viscol mare și câteva zile în urmă, circulă de regulă mai mult pe linii de tramvaiu. De data aceasta, nu fusese nimic care să dea de bănuit că FILIPESCU a depășit munca lui obișnuită! Din această cauză, în mintea celor prezenți și a membrilor familiei, chemați în grabă, nu a fost exclusă și bănuiala ca să nu fi fost ucis de un rău făcător și de aceia s'a chemat un reprezentant al parchetului și s'au trimis la analizare, restul din cafea și apa ce băuse și care se mai găseau pe biroul său. Dar, așa a fost să fie, și așa a fost, cum ar zice un crezător în destinele omului!

După facerea cercetărilor legale, corpul neînsuflețit al lui FILIPESCU a fost dus acasă, iar a doua zi a fost depus la Biserica Sfântul Gheorghe Nou. Acolo rămășițele lui pământești au fost expuse spre a fi văzute pentru ultima oară de familie, rude, cunoscuți, de personalul și lucrătorii care au ținut la dânsul. Lângă catafalcul său au stat de pază funcționari, lucrători și elevi de ai săi dela Școala Politecnică, a căror ținută a impresionat adânc pe cei ce veneau să-l vadă.

* * *

Și acum ajunși la sfârșitul acestei lungi expuneri a vieții și operii lui GHEORGHE FILIPESCU, — expunere deși destul de întinsă, dar desigur incompletă, — putem să ne întrebăm ce învățături trebue să scoatem din activitatea regretatului nostru coleg. Las pe fiecare să scoată concluziunile pe care le va crede mai interesante și mai folositoare; eu voiu pune în evidență una.

Am spus că FILIPESCU a fost fiu al unui cantonier și am arătat cum a ajuns Director general al uneia din cele mai mari întreprinderi din Capitala țării și profesor în învățământul tecnic superior, la una din catedrele cele mai importante ale inginerii. Drumul parcurs i-a fost lung și greu, dar l-a făcut prin propriile lui mijloace, prin propriile lui forțe! In calea lui a întâlnit multe obstacole, care însă i-au fost înlăturate pen rucă de munca și de priceperea lui nu se putea lipsi administrațiunile în care funcționa.

El este unul din exemplele cele mai interesante, de ce energii se găsesc ascunse în stratul de bază al poporului nostru şi de ce profit ar putea trage economia naţională şi ştiinţa română prin punerea în valoare a acelor energii. De aceea, comunele rurale trebue să înlesnească copiilor lor, cari manifestă în şcoala primară asemenea energii, ca ei să poată continua cartea mai departe în Licee şi judeţele să-i ajute apoi ca să-şi facă studii superioare. Cu modul acesta, locurile de diriguitori în marele întreprinderi, locurile de luminători ai poporului dela clasele cele mai de jos şi până la cele mai de sus, astrele strălucitoare care vor apare pe firmamentul ştiinţific al României, vor fi toţi şi toate româneşti, cu râvnă pentru propăşirea ţării şi cu dragostea cea mai puternică pentru desvoltarea şi întărirea neamului românesc. Asemenea elemente nu pot fi înstrăinate, nu se pot înstrăina şi nu pot să nu fie naţionaliste!

Uitaţi-vă numai la ceea ce a putut face FILIPESCU şi gândiţi-vă unde s'ar ridica ţara noastră dacă elemente de elită şi viguroase ca dânsul ar avea calea deschisă şi curăţită de obstacole pentru a putea pune toată munca lor, toată inteligenţa lor şi tot naţionalismul lor, pentru înălţarea patriei.

ION IONESCU.

ARITMETICA LUI GHEORGHE ASACHI

(Urmare dela pag. 344)

Capitolul la care trecem acuma, *„De raporturi, rezoane şi proporţii“* (§§ 110—115) e relativ scurt şi conţine numai 8 pagini. Trebuie să cităm definiţia (§ 11): *„Când două numere se compărează (alătureză) între sine, atunce se cearcă a cunoaşte raportul lor. Două numere se pot compărui în două maniere“* Prima *„manieră“* este (§ 111): *„Ori că voim a şti cu cât unul întrece pe altul sau este întrecut, şi atunce rezultatul acestei comparaţii se chiamă „raportul aritmetic“*. Urmează un exemplu simplu. A doua *„manieră“* este (§ 112): *„Sau că voim a cunoaşte de câte ori un număr cuprinde pe altul, care se poate avea prin împărţire. Iar câtoriul sau rezultatul, se chiamă raport gheometric“*. Şi iar vine un exemplu uşor.

Notaţiile pentru raporturi sunt: un punct (.) pentru raportul aritmetic, „*carile însemnează este la sau sânt la*“ şi 2 puncte (:) pentru raportul gheometric, însemnând acelaşi lucru. § 113 adaogă: „*Acel întâi număr a unui raport gheometric se numeşte antecedent, iar al doile consecvent, şi amândouă numere se numesc termine a raportului*“. Se arată pe scurt (§ 114) că „*fieşcare fracţie se poate socoti ca şi ori care împărţire ca cum ar face un raport gheometric*“ şi se trece îndată la proporţii (§ 115): „*Două raporturi ecvale înformează aceea ce se numeşte proporţie. Acele patru numere ce înformează o proporţie se împart în extreme şi miezine, în antecedente şi consecvente: extremile sânt acel dintâi şi acel de pe urmă, celelalte două sânt miezine. Antecedentele sânt acel întâiu şi acel al triile, consecventele sânt al doile şi acel de pe urmă*“. Iată un exemplu (§ 116) „2.3:4.5, *care se rosteşte: două sânt la patru precum (simplu) patru sânt la cinci*“. Exemplu unei proporţii gheometrice: „2:4::3:6 *care se rosteşte: două sunt la patru precum (simplu) trii la şese*“. § 117 defineşte o proporţie „*continuă*“, în care „*amândouă miezine sânt tot acel număr*“. Exemplu: 2:4::4:8. Aici se mai introduce o notaţie: „*Pentru de a însemna o proporţie aritmetică continuă, se scrie înainte ei două puncturi puse unul sub altul, şi dispărţite prin o liniuţă, precum se vede aice*: ÷3.4:4.5; *dar atunce terminul miezin se scrie numai odată*“. La fel, proporţia geometrică continuă se scrie ÷:2:4::4:8. Se arată, cu ajutorul exemplelor, propietăţile fundamentale ale proporţiilor (§ 118): „*Insuşimea cea mai însemnată a unei proporţii aritmetice este că soma extremilor ecvalează cu suma miezinilor*“. (§ 119).: *In o proporţie gheometrică, productul extremelor ecvalează cu productul miezinelor*“. Demonstraţiile propriu zise lipsesc; deşi în paragraful următor se revine asupra progresiilor geometrice şi se mai dă un exemplu, totuşi raţionamentul este destul de încurcat şi nu prezintă interes. § 121: „*Dacă cunoaştem trii termine ori care a unei proporţii aritmetice sau gheometrice, deapururе este cu putinţă de a găsi pe al patrile*“. Ca exemplu, se găseşte al patrulea termen al proporţii aritmetice, scrise astfel: 2.3:4, care este 5, şi al patrulea termen al proporţii gheometrice, scrise 2:4::3:, care este 6. Exemplele sunt explicate foarte bine.

In sfârşit, § 125 ne spune că: „*Terminile unei proporţii gheometrice pot fi supuse la deosebite permutaţii (strămutări) fără a fi jignite a ei însuşimi*". Ca exemplu, din proporţia geometrică 1 : 2 : : 3 : 6, se fac încă 7 proporţii în modul cunoscut.

Iar ca încheere: „*spre a fi în stare de a da cuvântul despre toate schimbările la care pot fi supuse numerile ce compun o proporţie gheometrică, se cuvine pururea a socoti ca cum ar fi compusă din două fracţii ecvale*".

Urmează apoi un capitol cu caracter algebric, şi care nu figurează în cărţile de aritmetică de azi: „*De progresii*" (§§ 126—134). Iată definiţia progresiei aritmetice (§ 127): Ea este „*un şir de termine, din care fieşcare întrece pe propăşitoriul său, sau este întrecut de tot acea câtime cu care întrece pe urmăritoriul său, sau este de el întrecut. Numerile naturale 1, 2, 3, 4, 5,... sânt în progresie aritmetică, fiindcă fieşcare termin este de o unime mai mare de cât acela ce-l propăşeşte. O progresie aritmetică se scrie în chipul următori:* ÷ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6". Se citeşte: „*1 este la 2, ca 2 este la 3, ca 3 este la 4, ca 4 este la 5...*". § 128. „*Tot acea diferenţie care este între toate terminile consecutive ale uneia progresii aritmetice, se numeşte rezonul, (raţia) progresiei. Indată ce se va lua oarece aminte la firea unei progresii aritmetice, se va înţelege că spre a o înforma, îndestul este a cunoaşte terminul întâi şi diferenţia sau rezonul care are să fie statornică între toate termine. Căci, de pe diferenţia ce s'au dat de această progresie, terminul al doile se compune din acel întâi plus rezonul*". Dar de oarece „*al triile termin este compus din al doile, plus rezonul sau din acel întâi plus de două ori rezonul*", şi „*al patrile termin este compus din al triile, plus rezonul, deci din acel întâi plus de trii ori rezonul, şi aşa mai departe*"; urmează (§ 129) că „*ori ce termin a unei progresii aritmetice este compus din acel întâi plus de atâte ori rezonul câte termine se află înaintea sa*".

Se pare că ASACHI nu studiază de cât progresiile aritmetice crescătoare, întrucât nici nu pomeneşte despre diferenţe negative.

In § 130 se tratează următoarele chestiuni: 1) „*fie progresia* ÷ 2 . 5 . 8... *Care este a ei al noule termin?*". Se găseşte 26; explicaţia este foarte clară. 2) „*Intre două numere se pot înşira atâte numere câte vom voi, în cât totul să fie în progresie*

aritmetică, care aceasta se numeşte a înşira între două numere mai multe miezine aritmetice. De exemplu se pot lega 3 şi 13 prin patru miezine aritmetice aşa încât aceste patru miezine să facă cu 3 şi 13 o progresie aritmetică". Iată şi procedeul de urmat: *3 va fi acel întâi termin a progresiei şi 13 acel de pe urmă. Dar 13 este compus din acel întâi termin 3 şi de 5 ori rezonul, sau de atâte ori rezonul câte termine sunt înaintea sa. Deci substragu 3 dela 13, rămâne 10; împărţesc 10 prin 5, numărul terminilor ce trebui să propăşească pe 13, pentru că au a se înşira patru miezine, şi că avem pe acel întâi carile este 3. Câtoriul de 10, împărţit prin 5, este 2; deci 2 este rezonul sau diferenţia, care este a domni între toate terminile*". Progresia căutată este:

$$\div 3 . 5 . 7 \quad 9 . 11 . 13.$$

§ 131 se ocupă cu „*Soma tuturor terminilor de o progresie aritmetică*". „*Pentru aceasta se cuvine adăogi pe terminul întâi către acel depe urmă, a lua giumătatea somelor sale, şi a înmulţi această giumătate de somă prin numărul terminilor progresii*". Drept demonstraţie, se transcrie o progresie dată:

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14$$

în ordine inversă

$$\div 14 . 11 . 8 . 5 . 2,$$

şi se continuă aşa cum se face şi acum în cărţile de Algebră.

Din cauză că notaţia algebrică lipseşte, raţionamentul este greoi, dar se poate înţelege destul de bine. E curios că la sfârşitul paragrafului autorul zice: *Noi nu vom trece mainainte cu această lămurire, socotind că din cele zise îndestul s'au înţeles*".

Progresiile geometrice ocupă foarte puţin loc, numai două pagini (§ 132—134). Definiţia (§ 132) este: *un „şir de termine dintre care fieşcare cuprinde pe acela ce-i urmează, sau este în el cuprins, de atâte ori decât el însuşi se află cuprins în acela ce-l propăşeşte sau că îl cuprinde. Se numeşte rezonul sau raţia, câtoriul carele exprimează decâteori un termin este cuprins în un altu, sau îl cuprinde.*" De ex.: ∴ 2 : 6 : 18 : 54. § 133 : „*Oricare termin a unei progresii gheometrice este ecval cu acel întâi înmulţit prin productul de atâtea dăţi rezonul câte termine sunt înaintea sa.*" De ex., în progresia de mai sus „*54 este ecval cu acel întâi termin 2 înmulţit prin* $3 \times 3 \times 3$, *sau productul de atâtea rezonul câte termine sânt înaintea sa*". Avem un „*problemu*" :

„Cunoscând terminul întâi a unei progresii gheometrice, şi rezonul, a găsi al şeptele“. In § 134 acest *„problemu“* se face pentru cazul când primul termen este 3, iar raţia 2. Termenul al şaptelea este $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 192$. Nu se spune nimic despre suma unei progresii geometrice.

Capitolul următor este şi el o parte a Algebrei: e vorba *„De permutaţii şi combinaţii“*. Iată definiţia lor (§ 135): *„Prin permutaţie se înţelege deosebitele maniere de a aşeza un hotărât număr de lucruri, unile către altele. Combinaţiile sânt un caz particular a permutaţiilor: ele se cuprind în deosebitele maniere de a lua un hotărât număr de lucruri unul la unul, două la două, trii la trii.* In § 136 *„reprezentăm prin literile alfavitului obiectele care au a se supune permutaţiilor“*. Se arată că, având două litere *a* şi *b* putem face două permutări; cu 3 litere se fac 6; aici autorul vorbeşte deodată despe *„aranjamente“*, deşi, de fapt, se ocupă tot cu permutări. Continuând, găsim 24 *„aranjamente“* cu 4 litere; 120 cu 5; 720 cu 6. La sfârşitul paragrafului avem *„deosebitele cuvinte ce se pot înforma* cu cuvântul *„mora“* (poate, e vorba de *„moară“*, dar ASACHI scrie cu cirilice, şi n'avem cum s'o ştim):

mora	omra	roma	aorm
moar	omar	raom	aomr
mroa	orma	rmao	armo
mrao	oram	rmoa	arom
maor	oamr	ramo	amro
maro	oarm	roam	amor

Ceea ce autorul numeşte *„combinaţie“* diferă de ceea ce se nţelege sub acest cuvânt în Algebră. Astfel, el zice în § 138: *„La permutaţii, se caută a şti în câte chipuri se poate aranjui un hotărât număr de lucruri luându-le toate de odată; în combinaţii, scoposul este a cunoaşte în câte feliuri se poate aşeza un număr dat de obiecturi, luându-le două câte două, trii câte trii,..., şepte câte şepte“*. § 139: *„Să se propue de a cunoaşte câte cuvinte din două litere se pot face cu 6 litere a, b, c, d, e, f“* (aci ASACHI întrebuinţează literele alfabetului latin). *„Văd că puind* **a** *dintâi vom avea aa, ab, ac, ad, ae, af; şi de vom pune b dintâi vom avea bb, ba, bc, bd, be, bf, adecă şese cuvinte din două litere precum în cazul trecut; din aceste încheiu că fieşcare literă,*

fiind întâi va da şese cuvinte; dar fiind că sânt şese litere deci vom avea de şese ori şese sau 36 cuvinte (câte de două litere informate prin şase litere luate două câte două". Aşa dar, e vorba de „*aranjamente cu repetiţie*". Urmând tot aşa mai departe, ASACHI găseşte că din 6 litere se pot forma $6 \times 6 \times 6$ „*combinaţii*" de câte 3; $6 \times 6 \times 6 \times 6$ de câte 4; $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$ de câte 5, etc.

O literă se poate repeta de câteori vrem, de aici rezultă următoarele chestiuni: „*Câte deosebite aranjamente ar cuprinde două lucruri* **a** *şi* **b,** *luându-se cinci câte cinci? Pentru de a răspunde la această întrebare, fac productul de cinci ori 2 carile exprimează numărul lucrurilor ce are a se combina, şi zic* $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ *ecvalează cu 32, care îmi dă numărul figurilor ce pot înforma două lucruri luate cinci câte cinci. Urmând acestui metod s'ar găsi că două lucruri luate zece câte zece, douăsprezece câte douăsprezece, ar înforma 1024 şi 4096 deosebite table*". Trebue să recunoaştem că această parte „*De permutaţii şi combinaţii*" e expusă mai puţin clar de cât Aritmetica propriu zisă, ba conţine şi unele greşeli de exprimare. Nu văd ce motive l'au făcut pe ASACHI să introducă în cartea sa aceste chestiuni, care n'au nici-o legătură cu restul cărţii.

(Va urma). P. Z. CAZANACLI.

PRIVIRE ISTORICĂ ASUPRA REZOLVĂRII ECUAŢII CUBICE

Ecuaţia de gradul al 3-lea în forma ei generală, se pare că nu a preocupat prea mult pe matematicienii greci, dat fiind că în literatura matematică de atunci, nu întâlnim decât probleme care conduc la ecuaţii cubice cu totul particulare. Meritul de a soluţiona complet şi definitiv ecuaţia generală de gradul al 3-lea revine epocei premoderne şi în special şcoalei italiene din secolul XVI, reprezentată prin TARTAGLIA şi CARDAN.

Cu toate acestea, din ultimele descifrări de texte babiloniene, rezultă că în Babilon, a cărui cultură ştiinţifică era mult mai veche decât a Elenilor, s'a încercat rezolvirea acestui gen de ecuaţii, încă pela 1800 în. Cr.

Anume, s'a propus o soluţie, care nu este analoagă cu aceea imaginată de CARDAN şi totuşi apare sub un aspect cu mult ma în spiritul epocei de azi.

In felul acesta, ecuaţia cubică, oferă un rar şi interesant caz de a fi fost o problemă de actualitate şi întru câtva rezolvată prin sec. XVIII-XVI în. Cr. ca să redevie de actualitate şi din nou rezolvată în aceleaşi secole de după Cristos.

In cele ce urmează, vom prezenta câteva aspecte mai importante din dezvoltarea istorică a acestei probleme.

La Babilonieni:

Printre diferitele texte, care au fost descoperite la ruinele templului Bel, (turnul Babilonului) există unul, care conţine rădăcinile cubice ale numerelor şi care datează cam din sec. XVIII în. Cr. Insăşi această tabelă, pledează pentru faptul că Babilonienii puteau rezolva cel puţin ecuaţia cubică de forma:

$$x^3 = a$$

rădăcina ei fiind găsită cu ajutorul tabelei respective.

Acum 4 ani, NEUGEBAUER [1]), descifrează însă un alt text babilonian, aflător în muzeul britanic, şi care are un caracter pur algebric. Acolo, pe lângă ecuaţii de gradul I şi II, se găsesc probleme care conduc la diferite tipuri de ecuaţii cubice rezolvate numeric. Aşa de ex. un grup de probleme se reduc la ec. binome:

$$x^3 = a \; ; \quad x = \sqrt[3]{a}$$

a căror rezolvare am văzut-o mai sus.

Alt grup îl formează ec. de forma:

$$(ax)^3 + (ax)^2 = b. \qquad (1)$$

Şi aceste ec. sunt rezolvite tot cu ajutorul unor tabele de forma $n^3 + n^2$. Asemenea tabele au fost descoperite şi descifrate, conţinând suma $n^3 + n^2$ pentru toate cazurile dela $n = 1$ la $n = 30$. Aceleaşi tabele dealtcum, ar fi putut servi şi la rezolvarea ec:

$$x^3 + ax^2 = b$$

---

1) O. NEUGEBAUER: Uber die Lösung Kubischer Gl. in Babylonien. Nach. Gesell. zu Göttingen. 1933. Heft 3.

care se reduc la tipul de mai sus prin împărţirea cu a^3 :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{b}{a^3}\ .$$

In fine textul găsit conţine şi ecuaţia generală:

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad (2)$$

cu rădăcinile corespunzătoare datelor problemei, calculate foarte exact. Cum s'a făcut însă rezolvarea, nu rezultă destul de clar din text.

E posibil, ca această ec. să fi fost redusă şi ea la tipul (1) adică $z^3+z^2=p$, pentru care am văzut că s'au construit tabele speciale.

Reducerea, presupune cunoscută metoda schimbărei de variabilă şi rezolvarea ec. de gradul al doilea, rezultată din anularea coeficientului lui z., operaţiuni care dealtfel se ştie precis că erau întrebuinţate de Babilonieni.

Aşa fiind, prin schimbarea variabilei $x=z+\alpha$ în (2) şi rezolvarea ec. de gr. II, provenită din anularea coeficientului lui z, se ajunge la ec.:

$$z^3+mz^2=n$$

care prin împărţire cu m^3 devine:

$$\left(\frac{z}{m}\right)^3+\left(\frac{z}{m}\right)^2=\frac{n}{m^3} \quad \text{sau} \quad z_1^3+z_1^2=p.$$

Totuşi, cele spuse relativ la metoda de rezolvare a ec. generale, rămân deocamdată simple ipoteze propuse de NEUGEBAUER, ceea ce dealtfel e şi natural, dat fiind că un singur document nu poate reconstitui toate metodele de cercetare întrebuinţate pe atunci. Ori cum ar fi, utilizarea tabelelor pentru rezolvarea cel puţin a unor anumite feluri de ecuaţii, este o metodă folosită azi, pentru găsirea valorilor numerice a rădăcinilor ecuaţiilor care nu se reduc la forma binomială.

La Greci:

Grecii, având un spirit poate prin excelenţă geometric, nici nu au încercat rezolvarea ecuaţii cubice, din punct de vedere algebric. La ei, întâlnim probleme de geometrie, care se reduc la rezolvarea ecuaţii de gradul III, cum sunt vestitele probleme ale

antichităţii: duplicarea cubului şi trisecţia unghiului, asupra cărora nu insistăm, ele fiind aşa de frumos tratate în Cursul de geometrie analitică pentru cl. 8-a de A. MYLLER.

ARCHIMEDE (sec. IV în. Cr.) punându-şi problema de a împărţi o sferă dată, printr'un plan, aşa fel ca volumul calotelor determinate să fie într'un raport dat, ajunge la concluzia că un segment de lungime „a“ nu poate fi divizat prin proporţia:

$$\frac{a-x}{b} = \frac{4a^2}{9x^2} \tag{3}$$

decât dacă $b < \frac{a}{3}$.

Dar aceasta nu este altceva decât a afirma că ecuaţia cubică

$$x^3 - ax^2 + \frac{4}{9}a^2b = 0 \tag{4}$$

admite o soluţie reală şi pozitivă când: $b < \frac{a}{3}$.

ARCHIMEDE, nu a adus relaţia (3) la forma (4) şi e oarecum explicabil, ţinând seamă că sub forma (3), problema prezintă oarecare asemănare cu aceea a duplicării cubului sau a trisecţii unghiului, iar din punct de vedere algebric nu era dată posibilitatea nici unui fel de rezolvare.

Singurul caz când întâlnim de fapt o ec. de gradul III, este în Aritmetica lui DIOPHANTE (sec. IV d. Ch.) şi anume, el spune că ec.:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3$$

are ca rădăcină pe 4. Aceasta dealtfel rămâne doar o simplă afirmaţie, căci nu se indică nici un fel de operaţiuni care ar conduce la acest rezultat.

Cunoştinţele ştiinţifice ale Grecilor, au trecut în câteva secole la Arabi, cari în entuziasmul lor au tradus până la sfârşitul sec. IX d. Cr. toate operele mai principale greceşti, aşa fel încât multe din tratatele clasice perdute în original, s'au păstrat numai pe această cale. Arabii nu s'au mulţumit numai cu însuşirea cunoştinţelor de origine greacă, ci prin şcolile care s'au creat, au adus contribuţiuni originale mai ales în domeniul algebrei. Aşa găsim

spre sfârşitul sec. X şi începutul sec. XI problema propusă de ARCHIMEDE rezolvată algebric adică prin ecuaţia:

$$x^3 - ax^2 + \frac{4a^2b}{9} = 0$$

precum şi alte modele de ec. de gradul al treilea.

In Italia:

Dela Arabi, prin Spania cunoştinţele matematice au pătruns în Europa, odată cu începutul sec. XII, datorită călugărilor care căutau să-şi procure cărţile ştiinţifice ale Arabilor ca să le traducă. Acest lucru era de altfel foarte greu, dat fiind spiritul de nesociabilitate al Arabilor faţă de Europeni. Aşa de pildă, prima cunoştinţă a „Elementelor" lui EUCLID se datoreşte unui călugăr englez, care travestindu-se în student mahomedan, a putut urma cursurile din Cordova în sec. XII, cu care ocazie şi-a procurat o copie a „Elementelor" lui EUCLID pe care a tradus-o în latineşte.

Primul matematician european care discută ec. de gradul al 3-lea este LEONARD FIBONACI din Pisa. In „Practica geometriae" pornind dela anumite consideraţii geometrice ajunge la o ecuaţie cubică:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

pe care o rezolvă, găsind pentru x o valoare exactă până la a noua zecimală. Rezultatul este uimitor, totuşi nu se bănueşte modul în care a fost obţinut. Se ştie doar, că LEONARD avea o cultură superioară, îmbogăţită de multe cunoştinţe arabe, lui revenindu-i dealtfel meritul de a fi introdus cifrele arabe în Europa. Problema aceasta, a rezolvat-o în prezenţa lui FRIEDERIC II care, atras de renumele de matematician a lui LEONARD, vine la Pisa, şi îl invită la un «match» matematic, unde între altele are de rezolvat şi ec de mai sus.

Indată ce LEONARD a arătat care este forma rădăcinei unei ec. cubice, acest fel de probleme încep a preocupa pe contimporani şi în deosebi pe negustorii italieni, oamenii bogaţi, care introducând cifrele arabe în cărţile lor de contabilitate sunt oarecum în curent cu progresul ştiinţific al timpului şi îşi fac o distracţie din rezolvarea empirică a ecuaţii cubice.

Din Italia, această problemă trece în celelalte ţări apusene găsind astfel la mulţi matematicieni, exemple de ec. de gradul al 3-lea, rezolvate, prin diferite metode ingenioase dar cu totul particulare şi aplicabile numai acelor ecuaţii.

Aşa se continuă tot secolul al XIII-lea şi al XIV-lea, iar spre sfârşitul său se pune din ce în ce mai insistent problema rezolvării ecuaţii generale de acest grad, devenind astfel problema la modă a secolului al XV-lea.

Spre sfârşitul acestui veac, LUCA PACIOLI, ajunge la concluzia că soluţia ec. cubice este tot aşa de imposibilă ca şi cuadratura cercului, referindu-se probabil la natura incomensurabilă a rădăcinilor.

O clasă particulară de ec. şi anume acelea de forma:

$$x^3 + ax = b$$

au fost rezolvate de SCIPIONE DEL FEROO, pe la începutul sec. al XVI-lea. Acesta, a păstrat în secret descoperirea sa şi numai înainte de moarte a încredinţat-o unui prieten anume FLORIDO.

Acest FLORIDO, dacă nu are meritul de a fi fost un matematician vestit, îl are pe acela, de a fi accelerat poate descoperirea soluţiei ec. generale.

Şi anume, în posesia acestei formule, el provoacă la un duel ştiinţific pe TARTAGLIA unul din cei mai de seamă matematicieni ai timpului, care, anunţase că poate rezolva ori ce ec. cubică de forma:

$$x^3 + ax^2 = b.$$

TARTAGLIA, a înţeles că această provocare nu ar avea sens, dacă FLORIDO nu ar cunoaşte o formulă pentru rezolvarea unui tip oarecare de ec. cubice şi atunci încearcă să găsească o metodă şi pentru rezolvarea ec. de tipul:

$$x^3 + ax = b$$

metodă care de altfel o şi găseşte chiar în preziua duelului.

Astfel, TARTAGLIA a putut răspunde la toate cele 30 de probleme propuse de adversar şi care în adevăr se reduceau la ec. de forma:

$$x^3 + ax = b$$

pe când FLORIDO, nu a putut răspunde la nici una din problemele lui TARTAGLIA, întrucât ele cereau rezolvarea ec. de forma:

$$x^3 + ax^2 = b$$

ec. a căror soluţie nu era cunoscută de FLORIDO.

Totuşi, nici TARTAGLIA nu dă publicităţii formula şi metoda găsită, ceea ce-l face pe CARDAN să i-o smulgă prin multe viclesuguri şi jurăminte călcate. CARDAN o publică în 1545 în „Ars magna de rebus algebraicis", arătând în introducere că formula i-a fost încredinţată de TARTAGLIA, demonstrarea ei însă, fiind personală. Dealtfel se cunosc versurile prin care TARTAGLIA i-a încredinţat lui CARDAN soluţia ec. cubice. Aceste versuri, sunt scrise într'o formă foarte încurcată şi meritul lui CARDAN este în orice caz mare, prin forma simplă şi documentată a expunerii sale. Puţin timp după CARDAN, BOMBELLI, studiază şi cazul ireductibil, arătând că atunci toate rădăcinile sunt reale.

Drumul e deschis. Marii matematicieni ca VIETE, DESCARTES, EULER, se preocupă de această ecuaţie, aşa că odată cu introducerea numerelor imaginare se stabileşte pe de o parte numărul total de rădăcini, iar pe de alta se discută problema în toată generalitatea ei, exprimându-se rezultatele în forma modernă cu care suntem obişnuiţi.

FL. CÂMPAN
(Cernăuţi).

ASUPRA UNOR PERECHI DE TRIUNGHIURI OMOLOGICE

1°. Problema 4355 [1]) prezintă două perechi de triunghiuri omologice, cu acelaş ax de omologie:

„M şi N fiind două puncte inverse în planul unui triunghiu, M′ şi N′ simetricele lor în raport cu centrul cercului circumscris, triunghiurile podare ale punctelor M şi N sunt omologice respectiv cu triunghiurile antipodare ale punctelor M′ şi N′.

1) *Gazeta Matematică.* Vol. XLIII, p. 40.

Cele două perechi de triunghiuri omologice au ca ax de omologie axul radical al cercurilor circumscrise triunghiului de referință și triunghiurilor podare ale punctelor M și N".

2°. Ne propunem a găsi condițiile necesare și suficiente pentruca două perechi de triunghiuri omologice să admită același ax de omologie.

Să notăm $\omega(\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma')$ omologia triunghiurilor $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ și $\alpha\beta\gamma$ aria triunghiului $\alpha\beta\gamma$, cu condiția

$$\alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma = 0.$$

Fie

$$\omega(ABC, A_1B_1C_1) \text{ și } \omega(abc, a_1b_1c_1)$$

două perechi de triunghiuri omologice și

$$A'(AB, ab)\ ,\ C'(BC, ab)\ ,\ A''(AB, bc)\ ,\ C''(BC, bc)$$

$$A'_1(A_1B_1, a_1b_1),\ C'_1(B_1C_1, a_1b_1),\ A''_1(A_1B_1, b_1c_1),\ C''_1(B_1C_1, b_1c_1).$$

Dacă $\omega(ABC, A_1B_1C_1)$ și $\omega(abc, a_1b_1c_1)$ au același ax de omologie, rezultă omologiile

$$\omega(A'BC'\ ,\ A'_1B_1C'_1) \text{ și } \omega(A''BC''\ ,\ A''_1B_1C''_1) \qquad (1)$$

și reciproc.

Dar condițiile necesare și suficiente pentru omologiile (1) sunt [1]):

$$\begin{cases} A'_1A'B \,.\, B_1BC' \,.\, C'_1C'A = B_1A'B \,.\, C'_1BC' \,.\, A'_1C'A \\ A''_1A''B \,.\, B_1BC'' \,.\, C''_1C''A = B_1A''B \,.\, C''_1BC'' \,.\, A''_1C''A. \end{cases} \qquad (2)$$

3°. Condițiile necesare și suficiente pentruca perechile de triunghiuri omologice

$$\omega(ABC, A_1B_1C_1)\ ,\ \omega(abc, a_1b_1c_1)$$

să admită același centru de omologie sunt omologiile

$$\omega(ABa, A_1B_1a_1)\ ,\ \omega(ABb, A_1B_1b_1) \qquad (3)$$

pentru care există condițiile :

$$\begin{cases} A_1AB \,.\, B_1Ba \,.\, a_1aA = B_1AB \,.\, a_1Ba \,.\, A_1aA \\ A_1AB \,.\, B_1Bb \,.\, b_1bA = B_1AB \,.\, b_1Bb \,.\, A_1bA. \end{cases} \qquad (4)$$

---

1) C. IONESCU-BUJOR : Asupra omologiei simple și multiple, *Gazeta Matematică*. Vol. XLII, pag. 621.

4°. „Fie M şi T, T' un punct şi două triunghiuri situate în acelaşi plan—N, N' simetricele lui M în raport cu centrele cercurilor circumscrise. Triunghiurile podare ale punctului M în T şi T' sunt omologice respectiv cu triunghiurile antipodare ale punctelor N şi N' în T şi T', centru de omologie al celor două perechi de triunghiuri omologice fiind M".

Proprietatea rezultă din articolul publicat în Revista Matematică din Timişoara [1]) şi vrea să înfăţişeze două perechi de triunghiuri omologice cu acelaş centru de omologie, deci cărora li se pot aplica relaţiile (4).

C. IONESCU-BUJOR.

PREMIUL „INGINER AL. ROŞU"

Subsemnaţii membri în Comisiunea pentru decernarea premiului „Ing. AL. ROŞU" cercetând volumul XLII al *Gazetei Matematice*, am constatat că, în conformitate cu prevederile acestui premiu, nici un abonat elev de liceu, student sau elev inginer, nu a avut o activitate originală în domeniul geometriei elementare, care să merite acordarea premiului pentru anul XLII.

Având în vedere că în acest caz condiţiunile prevăd că premiul să se acorde celui mai harnic corespondent al *Gazetei Matematice*, elev de liceu; ţinând seamă de activitatea desfăşurată în cursul volumului LII de către elevii de liceu, desprindem din numărul acestora pe D-l VICTOR L. FLORESCU, elev în cl. VII-a la liceul militar „Mânăstirea Dealu".

D-l VICTOR L. FLORESCU s'a evidenţiat în mod deosebit din lotul mare de corespondenţi, elevi de liceu, ca un harnic rezolvitor de probleme. D-sa a căutat nu numai să soluţioneze un cât mai mare număr de probleme, dar a căutat să găsească la o aceeaşi problemă soluţiunea cea mai nimerită.

Deasemenea D-l VICTOR L. FLORESCU a fost la unele probleme singurul rezolvitor, elev de liceu.

---

1) C. IONESCU-BUJOR: Asupra unor triunghiuri podare şi antipodare. Revista Matematică din Timişoara. Vol. XIII, p. 87.

In consecinţă am hotărît ca premiul „Ing. AL. ROŞU“ în valoare de 500 lei să se acorde pentru anul XLII D-lui VICTOR L. FLORESCU, elev în clasa VII-a la liceul militar „Mânăstirea Dealu“.

COMISIUNEA
PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „ING. AL. ROŞU“
Ing. D. A. STAN, G. D. SIMIONESCU,
AL. A. ROŞU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în şedinţa adunării generale extraordinare din 26 Martie 1938.

NOTE MATEMATICE

37. **Acum o sută de ani în lumea matematică.** *Date culese în biblioteca Seminarului Matematic din Iaşi din revistele timpului.*

Anul 1838 nu se distinge printr'o producţie matematică deosebit de fecundă, deşi au apărut în acest an unele lucrări destul de importante despre care vom vorbi. „Comptes Rendus“-urile Academiei de Ştiinţe din Paris nu conţin în acest an nici o notă de matematici (amintim că în zilele noastre, apar între două şi trei sute pe an). Revistele cele mai importante sunt tot „Journal für reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)“, Journal de Mathématiques pures et appliquées (J. de Liouville)“, şi „Journal de l'Ecole polytechnique“.

Printre matematicienii care publică în 1838, remarcăm pe: LEJEUNE-DIRICHLET, J. L. RAABE, STEINER, MINDING, LIOUVILLE, CATALAN, CHASLES, STURM, LAMÉ.

1. Cităm din memoriul lui LEJEUNE-DIRICHLET. „Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres“, publicat în Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 18, (1838), unul din memoriile în care autorul îşi expune lucrările sale fundamentale în teoria numerelor:

„Putem spune că teorema după care orice progresie aritmetică, al cărei prim termen şi raţia sunt numere prime între ele, conţine o infinitate de numere prime, se prezintă dela sine. Dar demonstraţia acestei teoreme prezintă dificultăţi serioase. Ilustrul LEGENDRE . . . a încercat să-i dea o demonstraţie, dar această demonstraţie, al cărei principiu este foarte ingenios, nu pare

completă... Am reuşit să stabilesc teorema despre care este vorba sprijinindu-mă pe proprietăţile unei clase de serii infinite, care au multă analogie cu acelea ale lui EULER... După ce-am scris memoriul care conţine această demonstraţie şi care va apărea în „Memoriile Academiei din Berlin", am căutat să aprofundez proprietăţile seriei pe care am întrebuinţat-o. Aceste noi cercetări, mi-au arătat că ea oferă o metodă foarte fecundă de analiză nedeterminată, şi care se aplică la chestiuni foarte variate... Metoda pe care o întrebuinţez îmi pare mai ales demnă de atenţie prin legătura pe care o stabileşte între analiza infinitesimală şi aritmetica transcendentă"...

38. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). Pentru $n = 3$ şi N_p începând cu 2 am găsit următoarele 261 soluţiuni.

N_p	N	N_p	N
204 157 986	0 612 473 958	206 174 598	0 618 523 794
204 159 786	0 612 479 358	206 197 458	0 618 592 374
204 179 658	0 612 538 974	206 417 958	0 619 253 874
204 196 578	0 612 589 734	206 419 578	0 619 258 734
204 576 198	0 613 728 594	206 579 418	0 619 738 254
204 581 976	0 613 745 928	207 159 846	0 621 479 538
204 597 618	0 613 792 854	207 194 658	0 621 583 974
204 598 176	0 613 794 528	207 196 458	0 621 589 374
204 617 598	0 613 852 794	208 194 657	0 624 583 971
204 619 758	0 613 859 274	208 196 457	0 624 589 371
204 759 861	0 614 279 583	208 459 716	0 625 379 148
204 975 861	0 614 927 583	208 461 597	0 625 384 731
205 746 198	0 617 238 594	208 496 571	0 625 489 713
205 749 861	0 617 249 583	208 596 471	0 625 789 413
205 781 964	0 617 345 892	208 659 471	0 625 978 413
205 796 418	0 617 389 254	209 465 817	0 628 397 451
205 798 614	0 617 395 842	209 486 571	0 628 459 713
205 817 964	0 617 453 892	209 645 718	0 628 937 154
205 819 746	0 617 459 238	209 645 817	0 628 937 451
205 974 618	0 617 923 854	209 648 571	0 628 945 713
205 964 178	0 617 892 534	209 658 471	0 628 975 413
205 978 614	0 617 935 842	209 845 716	0 629 537 148
205 981 746	0 617 945 238	209 846 157	0 629 538 471

1) Urmare la nota cu acelaşi titlu de la pag. 29 Vol. XLIII.

N_p	N	N_p	N
209 861 457	0 629 584 371	218 057 964	0 654 173 892
210 485 976	0 631 457 928	218 059 746	0 654 179 238
210 497 586	0 631 492 758	218 094 657	0 654 283 971
210 498 576	0 631 495 728	218 096 457	0 654 289 371
210 574 986	0 631 724 958	219 406 578	0 658 219 734
210 584 976	0 631 754 928	219 465 708	0 658 397 124
210 597 486	0 631 792 458	219 465 807	0 658 397 421
210 598 476	0 631 795 428	219 578 064	0 658 734 192
210 849 657	0 632 548 971	219 640 578	0 658 921 734
210 864 957	0 632 594 871	219 645 708	0 658 937 124
210 865 947	0 632 597 841	219 645 807	0 658 937 421
210 948 657	0 632 845 971	219 745 806	0 659 237 418
210 958 647	0 632 875 941	219 746 058	0 659 238 174
210 964 857	0 632 894 571	219 758 046	0 659 274 138
210 965 847	0 632 897 541	219 760 458	0 659 281 374
214 057 986	0 642 173 958	219 804 576	0 659 413 728
214 059 786	0 642 179 358	219 805 746	0 659 417 238
214 570 986	0 643 712 958	240 561 798	0 721 685 394
214 586 097	0 643 758 291	240 561 978	0 721 685 934
214 597 086	0 643 791 258	241 798 056	0 725 394 168
214 598 607	0 643 795 821	241 978 056	0 725 934 168
215 709 846	0 647 129 538	245 089 716	0 735 269 148
215 798 406	0 647 395 218	245 098 716	0 735 296 148
215 798 604	0 647 395 812	245 160 897	0 735 482 691
215 978 406	0 647 935 218	245 160 987	0 735 482 961
215 978 604	0 647 935 812	245 607 198	0 736 821 594
215 984 607	0 647 953 821	245 608 197	0 736 824 591
216 059 784	0 648 179 352	245 609 718	0 736 829 154
216 084 597	0 648 253 691	245 609 817	0 736 829 451
216 098 457	0 648 295 371	245 617 098	0 736 851 294
217 094 658	0 651 283 974	245 619 708	0 736 859 124
217 096 458	0 651 289 374	246 089 715	0 738 269 145
217 459 806	0 652 379 418	246 098 715	0 738 296 145
217 460 598	0 652 381 794	246 150 897	0 738 452 691
217 598 046	0 652 794 138	246 150 987	0 738 452 961
217 805 964	0 653 417 892	247 089 651	0 741 268 953
217 940 658	0 653 821 974	247 098 561	0 741 295 683
217 958 064	0 653 874 192	247 108 965	0 741 326 895
217 964 058	0 653 892 174	247 109 856	0 741 329 568
217 965 804	0 653 897 412	248 560 971	0 745 682 913
218 045 976	0 654 137 928	248 709 651	0 746 128 953

N_p	N	N_p	N
248 710 965	0 746 132 895	256 098 471	0 768 295 413
248 965 071	0 746 895 213	256 108 497	0 768 325 491
248 965 107	0 746 895 321	256 109 847	0 768 329 541
248 975 061	0 746 925 183	260 489 751	0 781 469 253
248 975 106	0 746 925 318	260 498 751	0 781 496 253
248 976 105	0 746 928 315	260 541 978	0 781 625 934
249 650 871	0 748 952 613	260 854 971	0 782 564 913
249 651 087	0 748 953 261	260 985 471	0 782 956 413
249 708 561	0 749 125 683	261 049 875	0 783 149 625
249 710 856	0 749 132 568	261 085 497	0 783 256 491
249 856 071	0 749 568 213	261 098 547	0 783 295 641
249 856 107	0 749 568 321	261 450 897	0 784 352 691
249 875 061	0 749 625 183	261 978 054	0 785 934 162
249 875 106	0 749 625 318	264 708 951	0 794 126 853
249 876 105	0 749 628 315	264 710 895	0 794 132 685
250 896 471	0 752 689 413	264 870 951	0 794 612 853
250 897 146	0 752 691 318	264 871 095	0 794 613 285
250 964 871	0 752 892 613	264 895 071	0 794 685 213
251 048 976	0 753 146 928	264 895 107	0 794 685 321
251 089 647	0 753 268 941	264 950 871	0 794 852 613
251 096 487	0 753 289 461	264 951 087	0 794 853 261
251 460 897	0 754 382 691	265 089 471	0 795 268 413
251 460 987	0 754 382 961	265 094 871	0 795 284 613
254 061 978	0 762 185 934	265 108 947	0 795 326 841
254 179 806	0 762 539 418	265 109 487	0 795 328 461
254 197 806	0 762 591 418	270 891 465	0 812 674 395
254 607 198	0 763 821 594	270 891 645	0 812 674 935
254 608 197	0 763 824 591	271 085 649	0 813 256 947
254 609 718	0 763 829 154	271 086 549	0 813 259 647
254 609 817	0 763 829 451	274 890 651	0 824 671 953
254 617 098	0 763 851 294	275 064 891	0 825 194 673
254 619 708	0 763 859 124	275 106 489	0 825 319 467
254 619 807	0 763 859 421	276 489 051	0 829 467 153
254 709 861	0 764 129 583	276 489 105	0 829 467 315
254 710 986	0 764 132 958	276 504 891	0 829 514 673
254 861 097	0 764 583 291	276 510 489	0 829 531 467
254 970 861	0 764 912 583	278 056 419	0 834 169 257
254 971 086	0 764 913 258	278 065 419	0 834 196 257
254 986 071	0 764 958 213	278 190 564	0 834 571 692
254 986 107	0 764 958 321	278 190 651	0 834 571 953
256 084 971	0 768 254 913	278 190 654	0 834 571 962

N_p	N	N_p	N
278 904 165	0 836 712 495	287 904 165	0 863 712 495
278 905 164	0 836 715 492	287 905 164	0 863 715 392
278 906 415	0 836 719 245	287 906 415	0 863 719 245
278 914 065	0 836 742 195	287 914 065	0 863 742 195
278 915 064	0 836 745 192	287 915 064	0 863 745 192
278 916 405	0 836 749 215	287 916 405	0 863 749 215
278 916 504	0 836 749 512	287 916 504	0 863 749 512
279 056 418	0 837 169 254	289 071 465	0 867 214 395
279 065 418	0 837 196 254	289 071 645	0 867 214 935
279 180 654	0 837 541 962	289 104 765	0 867 314 295
281 790 564	0 845 371 692	289 106 475	0 867 319 425
281 790 654	0 845 371 962	289 146 507	0 867 439 521
285 647 091	0 856 941 273	289 164 507	0 867 493 521
285 647 109	0 856 941 327	290 487 651	0 871 462 953
286 547 091	0 859 641 273	290 564 178	0 871 692 534
286 547 109	0 859 641 327	290 648 751	0 871 946 253
287 091 465	0 861 274 395	290 654 178	0 871 962 534
287 091 645	0 861 274 935	290 856 471	0 872 569 413
287 146 509	0 861 439 527	290 871 465	0 872 614 395
287 490 651	0 862 471 953	290 871 645	0 872 614 935
287 506 491	0 862 519 473	291 064 875	0 873 194 625
287 510 649	0 862 531 947	291 085 647	0 873 256 941
287 649 051	0 862 947 153	291 086 547	0 873 259 641
287 649 105	0 862 947 315	291 780 564	0 875 341 692
287 650 491	0 862 951 473	291 780 654	0 875 341 962
287 651 049	0 862 953 147		

Se vede că pentru toate aceste soluţiuni N începe cu zero, deci este un număr format din cele 9 cifre semnificative luate câte o singură dată.

(Va urma). GL. GH. BUICLIU.

39. **Asupra problemei 2947 şi numărului special.**

La publicarea enunţului acestei probleme (XXVII pag. 376) s'a strecurat o greşală de tipar punându-se termenul al doilea al primei paranteze sub forma f'^2 în loc de $(f^2)'$, greşală care a rămas şi la republicarea enunţului în numărul special de probleme nerezolvate.

D-l MIRCEA ADAM a atras cel dintâi atenţiunea redacţiei, asupra probabilităţii acestei erori, pentru ca problema să poată avea şi oarecare simetrie.

In acest număr se publică la *„Erată"*, enunţul complet al acestei probleme.

COL. G. I. LIT.

40. *Atmosfera standard.*

In revista „Ştiinţă şi Progres" No. 7—8 din 10—I—938, se rezolvă problema No. 255 după metode fizice vechi. Astfel se afirmă că pentru fiecare 10,5 m. altitudine, presiunea scade cu 1 mm. de mercur. Această afirmare conduce la rezultatul că la 3255 m. altitudine, presiunea barometrică ar fi 450 mm. de mercur, dacă la nivelul mării ar fi 760 mm.

Odată cu progresul aviaţiei, s'a pus problema stabilirei unei *„atmosfere standard"*, la care să se raporteze toate performanţele, aşa cum există încă de mult, în artilerie „atmosfera tip". Această problemă a fost multă vreme studiată prin numeroase cercetări şi măsurători (sondajii atmosferice), în toate anotimpurile. In modul acesta s'a ajuns la stabilirea acelei atmosfere, legând parametrii ei după anumite reguli, ce corespund mai bine astăzi.

Asfel se admite că la nivelul mării (altitudinea $z = 0$ avem:

— Temperatura . . . . . $\theta_0 = 0^0$ C

— Presiunea { . . . . . $p_0 = 10.332$ kg./m^2
la 0^0 . . . . . $H_z = 760$ mm. de mercur

— Greutatea specifică a aerului . $a_0 = 1{,}2255$ kg./m^3

— Acceleraţia gravitaţiei . . . . $g = 9{,}80665$ m/sec^2

— Massa litrului de aer uscat la 0^0 şi 760 mm. = 1,29284 gr.

— Massa unui cm^3 de mercur la 0^0, este = 13,595 gr.

Formulele care leagă diverşii parametri de altitudine sunt:

Pentru $\boxed{0 \leqslant z \leqslant 11.000 \text{ m.}}$

$$\theta_z = 15^0 - 0{,}0065 \, . \, z$$

$$\frac{H_z}{H_0} = \frac{p_z}{p_0} = (1 - 0{,}0000226 \, . \, z)^{5{,}255}$$

$$\frac{a_z}{a_0} = (1 - 0{,}0000226 \, . \, z)^{4{,}255} \, .$$

Pentru $\boxed{z > 11.000 \text{ m.}}$

$$\theta_z = -56^0,5$$

$$\log \frac{H_{11}}{H_z} = \log \frac{p_{11}}{p_z} = \log \frac{a_{11}}{a_z} = \frac{z - 11.000}{14.600} .$$

După aceste formule s'au calculat tablouri numerice şi grafice ale atmosferei standard.

In cazul problemei citate, presiunea de *450 mm.* este la altitudinea *4210 m.*, faţă de *3255* cât este rezultatul problemei, de unde rezultă deci o diferenţă de 955 m., ceea ce este destul de mare.

I. L.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXIV. Fascicola VI. Decemvrie 1937. Buenos Aires. Fundamentele matematice ale muzicii (concluziuni) de A. E. SAGASTUME BERRA.

Idem. Tom. CXXV. Fascicola I. Ianuarie 1938. Buenos Aires. Asupra unor chestiuni de calcul integral de J. HADAMARD. Formule fundamentale asupra funcţiunilor poligene de o variabilă complexă de J. C. VIGNAUX. O proprietate fundamentală a curbei lui VIVIANI şi alte chestiuni conexe de ANTONIO VALEIRAS.

Buletinul Societăţii Politecnice din România. Anul LI. Nr. 5. Mai 1937. Bucureşti. Naţionalizarea Şcoalei de Poduri şi Şosele de ION IONESCU.

Idem. Anul LI. Nr. 6. Iunie 1937. Contribuţia lui COULOMB în statică şi rezistenţă de GH. EM. FILIPESCU. Calculul pieselor supuse la flambaj după prescripţiile germane de CRISTEA NICULESCU.

Idem. Anul LI. Nr. 7. Iulie 1937. Contribuţiuni la calculul fundaţiilor izolate de beton armat de S. CATZ.

Idem. Anul LI. Nr. 8. August 1937. Bucureşti.

Idem. Anul LI. Nr. 9. Septemvrie 1937. Bucureşti.

Idem. Anul LI. Nr. 11. Noemvrie 1937. Bucureşti.

Idem. Anul LI. Nr. 12. Decemvrie 1937. † GH. EM. FILIPESCU de I. IONESCU. Asupra unor contribuţiuni la calculul şi dimensionarea tălpilor stâlpilor de beton armat de D. A. STAN.

Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'École Polytechnique Roi Carol II. Bucarest 1937. Anul VIII. Fasc. 22, 23, 24. Volum dedicat D-lui profesor G. A. IOACHIMESCU, odată cu retragerea dela catedra de Mecanica Rațională, după 29 ani de fecundă activitate.

O ecuație funcțională în legătură cu centrul de greutate al ariei unui triunghiu de D. POMPEIU. Metoda KUBOTA în geometrie de GH. ȚIȚEICA. Asupra transmiterii excentrice a unui efort de ION IONESCU. Imaginea mecanică a unui element de antenă de N. VASILESCU KARPEN. Calculul cadrelor de GH. EM. FILIPESCU. Asupra loviturii de berbec. Construcții de oscilograme teoretice de D. GERMANI. Câteva considerațiuni asupra spațiilor superioare de C. BUDEANU. Intensitatea ploilor în București în raport cu durata și frecvența lor de HENRI TEODORU. Asupra unei generalizări a urnei lui BERNOULLI de OCTAV ONICESCU și G. MIHOC. Proprietăți ale triunghiurilor cu același centru de greutate de E. ABASON. Echilibru unei membrane dreptunghiulare, supusă la o sarcină variabilă după legea presiunilor hidrostatice de CRISTEA MATEESCU. Fundații în beton armat sub stâlpi izolați de D. A. STAN. Asupra deformației plăcilor sub acțiunea încărcărilor neuniforme de NICOLAE CIORĂNESCU. Schimbările căii la calea ferată suprainălțată de ION GR. STRATILESCU. Un caz nou de aplicație în electromagnetism a funcțiunilor cilindrice generale de SABBA S. ȘTEFĂNESCU. Asupra eforturilor în barele unei ferme trapezoidale de CRISTEA NICULESCU. Asupra funcțiunilor generatrice ale polinoamelor lui LAGUERRE generalizate de GH. TH. GHEORGHIU. Asupra echilibrului mediilor continue de N. THEODORESCU.

Deutsche Mathematik, publicată de THEODOR VAHLEN. Anul II. Caetul 4. Noemvrie 1937.

Idem. Anul II. Caetul 5. Decemvrie 1937.

Exercices de Géométrie moderne à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats à l'agrégation, par J. LEMAIRE examinateur honoraire des élèves à l'école Polytechnique. — 169 pag — Librairie Vuibert. Bd. Saint Germain 63. Paris. 1937.

Scopul și conținutul acestui volum se desprinde din primele rânduri ale introducerii :

«Bien qu'il existe d'excellents recueils de problèmes de géométrie analytique, tels que ceux de MOSNAT, D'AUBERT *et* PAPELIER, *nous avons pensé,* M. VUIBERT *et moi, qu'un recueil de solutions de caractère plus géométrique pourrait être utile aux étudiants de mathématiques, d'où l'idée de publier les solutions des questions proposées dans les compléments de géométrie moderne due à* CHARLES MICHEL».

Sunt rezolvate 92 exerciții referitoare la conice, cubice, cuadrice. Metodele curente sunt acele indicate de titlul volumului, rar apare geometria analitică (ex: 1, 75, 78, 85, 88) sau dubla proecție ortogonală a geometriei descriptive (ex: 68, 72, 79).

Soluțiile exercițiilor sunt urmate de consecințe și observări, care le arată astfel cum sunt : insule într'un arhipelag de proprietăți, formând un peisaj exotic în mintea noastră trăită în schematica stâncoasă a altor tratate.

lată, pentru exemplificare, în stil de ghid, schema unui exerciţiu şi a proprietăţilor ce-l însoţesc:

1°. Fie elipsa definită în axe rectangulare de ecuaţiile parametrice

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ y = \frac{2bt}{1+t^2}\ .$$

Se consideră ecuaţia în t

$$(1) \qquad t^3 - k\lambda t^2 + \lambda t - k = 0,$$

unde k este o constantă şi λ un parametru variabil.

a) Normalele la elipsă în punctele A, B, C care au ca parametri t rădăcinile ecuaţiei (1) sunt concurente într'un punct I, care când λ variază, descrie normala în punctul P al elipsei având parametrul $-\frac{1}{k}$.

b) Cercul care trece prin punctele variabile A, B, C, trece printr'un punct fix P', simetricul lui P în raport cu centrul elipsei.

c) Există pe normala în P patru poziţii ale lui I pentru care două din punctele A, B, C coincid. Acestea sunt cele patru puncte de întâlnire ale normalei în P la elipsă cu desfăşurata elipsei. Tangentele la desfăşurată în aceste patru puncte sunt concurente.

In jurul acestui exerciţiu se grupează proprietăţile:

a) Dacă o hiperbolă echilateră are asimptotele paralele cu axele unei elipse, trei din punctele comune acestor conice şi simetricul celui de al patrulea în raport cu centrul elipsei sunt pe un cerc.

b) Secanta ce uneşte picioarele a două normale la o elipsă plecate dintr'un punct I şi dreapta ce uneşte proecţiile pe axe ale polului secantei picioarelor celorlalte două normale, sunt simetrice în raport cu centrul elipsei.

c) Teorema lui LAGUERRE: Tangentele la desfăşurata unei elipse în cele 4 puncte unde o tangentă oarecare a acestei desfăşurate o taie, sunt concurente.

d) Cercul lui JOACHIMSTHAL ABC care trece prin P', trece deasemenea prin proecţia centrului elipsei pe tangenta în acest punct.

e) Dintr'un punct al unei lemniscate se pot duce la această curbă 4 tangente; punctele lor de contact aparţin unei drepte a cărei înfăşurătoare este hiperbola echilateră care are aceleaşi focare ca lemniscata şi ca vârfuri mijloacele segmentelor unind centrul O cu vârfurile lemniscatei. Urmează generalizări.

Astfel se prezintă toate exerciţiile, unele au încă preţioase indicaţii bibliografice, ca de ex.: Se va putea citi în „Nouvelles Annales de Mathématiques (1923) un studiu al sistemului armonic a trei conice".

Pentru acel care apreciază climatul geometriei, cartea D-lui LEMAIRE oferă satisfacţii.

C. IONESCU-BUJOR.

Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii. Anul IV. Nr. 7. 1 Aprilie 1938.

Jurnal de Mathématiques élémentaires publicat de H. VUIBERT. Anu. 62. Nr. 11. 1 Martie 1938. Paris.

Idem. Anul 62. Nr. 12. 15 Martie 1938. Paris.

Mathesis publicată de AD. MINEUR. Tome LII. Anul 1933. Nr. 1 — 2. Ianuarie — Februarie 1938. Bruxelles. Asupra parabolei şi desfăşuratei ei de R. GOORMAGHTICH. Figura inelară de echilibru a unei masse fluide omogene în rotaţie de L. EVRARD. Asupra unor puncte de AD. MINEUR. Triunghiuri asociate unui triunghiu de V. THÉBAULT.

Mathematica. Volumul XIII. 1937. Cluj. Sur une équation fonctionelle, par PAUL MONTEL. Les fonctions quasi-analytiques par ST. MAZURKIEWICZ. Sur l'univalence de certaines classes de fonctions, par L. TCHACALOFF. Sur l'équation trinôme, par S. DOBRZYCKI. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions sommaires, par B. VULICH. Sur un problème de la théorie des relations, par SOPHIE PICCARD. Un critère de distanciabilité, par G. KUREPA. Sur la notion de chaîne et l'idée de loi naturelle, par O. ONICESCU. Sur la primitivité des corps P-adiques par M. KRASNER. Sur une propriété qui caracterise la transformation conforme, par TH. ANGHELUTZA. Relations de M. VOLTERRA qui admettent des intégrales dépendant d'une fonction arbitraire, par C. POPOVICI. Intégration des équations différentiello-fonctionnelles, par C. POPOVICI. Remarques sur le maximum d'un déterminant dont tous les éléments sont non négatifs, par T. POPOVICIU. Les invariants de deux équations aux différentielles totale de classe six, par G. VRÂNCEANU. Quelques difficultés dans l'application pratique de la théorie des erreurs, par M. BRÉLOT. Sur la mesure de BANACH des ensemble linéaires de puissance $< 2^{N_0}$, par W. SIERPINSKI. Remarque sur une équation fonctionelle, par W. SIERPINSKI. Sur le trapèze rectangle, par G. BRATU. PAUL MONTEL, membre de l'Institut, par D. POMPEIU. Un grand prix mathématique.

Pitagora. Revistă de matematici. Anul III. Nr. 6. Colegiul naţional „Carol I" Craiova. 15 Martie 1938. Exerciţiu de geometrie analitică de N. MIHĂILEANU. Consideraţiuni în legătură cu o notă asupra unei ipoteze de refracţie astronomică de T. VESCAN.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVIII. Nr. 1. Martie 1938. O teoremă importantă de geometrie de O. N. ŢINO.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXIII. Nr. 4. Oct. — Dec. 1937. Iaşi.

Sphinx, revue mensuelle des questions récreatives. Anul 8. Nr. 4. Aprilie 1938. Paris.

Ştiinţă şi Progres, revista ştiinţifică a liceelor militare. Anul IV. Nr. 9. Februarie 1938. Liceul Militar Tg.-Mureş.

IOAN T. ANDREIAN. *Nouvelles recherches sur l'équation numérique* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Iaşi 1937.

TH. ANGHELUTZA. *Sur une propriété qui caracterise la transformation conforme.* (Extras din Mathematica XIII. Cluj 1938).

TH. ANGHELUTZA. *Sur une équation fonctionelle qui définit les polynomes a plusieurs variables.* (Extras din Bulletin des sciences Mathématiques Paris 1937).

EM. ANTONOVICI. *Despre Mecanica Clasică şi Teoria relativităţii.* Bucureşti. 1937.

FLORICA CÂMPAN. *Aplicaţiuni ale curburei lui* BACALOGLU *în fizică.* (Extras din Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi 1937).

J. B. TOURRIOL. *Electricité* (320 pag. şi 297 fig.) GAUTHIER VILLARS. Editeur Paris 1937.

In acest volum autorul publică un curs de *Electricitate,* în cadrul cursului de *Fizică,* adresat elevilor claselor de Matematici speciale din Franţa.

Volumul cuprinde următoarele părţi şi capitole: *Electrostatica* I Fenomene Generale, II Legea COULOMB, Câmp Electric, Potenţial Electric, III Capacitate Electrică, Condensatori, IV Energie Electrică; *Magnetismul,* V Fenomene Generale, Hipoteze fundamentale, VI Câmp magnetic, VII Măsuri magnetice, VIII Studiul mediilor magnetizate; *Electrodinamica,* IX Curent electric, X Electroliza, Cantitate de electricitate, XI Alte transformări a energiei electrice, XII Aplicaţiile legei lui OHM la măsuri electrice; *Electromagnetism,* XIII Câmpul magnetic al curenţilor, XIV Acţiunea câmpului magnetic asupra unui curent, XV Aplicaţiunea legilor electromagnetismului la măsuri electrice.

Expunerea este simplă, clară şi reuşeşte a scoate în evidenţă proprietăţile şi legile esenţiale din domeniul electricităţei şi magnetismului, menţinându-se la un nivel suficient de elementar.

In cadrul aceleeaşi preocupări nu se utilizează expunerea vectorială, decât sub o formă cu totul redusă şi elementară. Deasemeni autorul a trecut peste formulele GREEN, STOKES, peste fenomenele de regim tranzitoriu, efect CORONA, efect SKIN, fenomene de propagare, teoria lui MAXWELL.

Se distinge uşor însă preocuparea autorului de a da, în limita posibilităţilor, explicaţiile de care un cititor scrupulos ar avea nevoe.

Astfel ca exemplu relevez că prin expunerea şi desvoltarea teoremei lui BERTRAND (pag. 35) se scoate în evidenţă corelaţia între legea, atât de utilizată, a inversului patratului distanţelor, cu anume proprietăţi a distribuţiei sarcinilor superficiale sferice.

Deasemenea autorul insistă, cam atâta cât trebue elevilor, asupra caracterului *relativ* a noţiunei de potenţial (pag. 56).

Trecând peste metodele perseverente ale expunerilor clasice, autorul are curajul de a releva (pag. 115) că permeabilitatea, „*nu* este numai un factor „numeric, depinzând exclusiv de unităţile alese, ci este *o mărime fizică,* care „depinde de natura mediului".

La problema unităţilor, autorul relevă (pag. 291) deasemeni, că în electromagnetism, ne găsim în prezenţa unui număr de relaţiuni distincte mai

mic cu 1 decât al mărimilor electromagnetice corespunzătoare. De aci necesitatea de a se alege *arbitrar* unitatea uneia din mărimi electrice sau magnetice, ceea ce se face de altfel, după cum relevă însuşi autorul atât în sistemul c. g. s. electrostatic, cât şi în sistemul c. g. s. electromagnetic.

Autorul simţindu-se probabil obligat a se menţine totuşi în cadrul uzanţelor actuale, în legătură cu aceeeşi problemă a unităţilor de măsură, în electricitate şi magnetism, nu a tras toate concluziile din principiile mai sus relevate. Cititorii, şi ceea ce e mai grav elevii şi studenţii, vor continua de a fi obligaţi a accepta unele formule variabile numai în sistemul electrostatic' altele numai în sistemul electromagnetic altele în ambele sisteme, în loc de a se găsi în faţa unui fel unitar de expunere, aşa după cum este posibil de altfel.

Relaţiile între mărimile magnetice sunt stabilite pornind tot de la noţiunea de *masă magnetică*, aşa cum se face în mai toate tratatele clasice. Totuşi autorul nu omite a releva explicaţia naturei magnetismului prin ipotezele lui WEBER şi AMPÈRE, a curenţilor locali interni, punându-se în legătură chiar această ipoteză cu acea a constituirei atomului, potrivit ultimelor vederi ale fizicei moderne.

Cartea câtigă mult prin o serie de explicaţiuni explicate chiar în text, mai ales în domeniul măsurilor mărimilor electrice şi magnetice.

Cartea poate fi citită cu mult folos chiar şi de studenţi, elevi-ingineri, fizicieni şi ingineri.

De altfel volumul este urmat de enunţul a 27 probleme foarte interesante dintre acele propuse de Şcoala Normală Superioară, Şcoala Politechnică, Şcoala Navală, Şcoala Superioară de Mine, Şcoala Centrală, Sorbona.

C. I. BUDEANU.

CERERI

275. Se afirmă că SIMION MAGHIAR, fost director al Şcoalei Normale Române din Oradea, ar fi compus, între anii 1781 şi 1785, şi o Aritmetică românească.

S'a tipărit undeva această carte ? Există vre-un exemplar din ea ?

VICTOR MARIAN.

DIVERSE

a) Şedinţele Societăţii „Gazeta Matematică".

Sâmbătă 26 Martie 1938 a avut loc o Adunare generală extraordinară.

S'a acceptat sumele donate pentru *Fondul general de premii al «Gazetei Matematice»* şi s'a votat regulamentul acestui fond.

Din venitul acestui fond se înființează următoarele premii:

a) Premiul de 5000 (cinci mii) lei anual, pentru *aritmetică.*

b) Premiul de 5000 (cinci mii) lei anual, pentru *geometrie elementară.*

c) Premiul de 5000 (cinci mii) lei anual, pentru *algebră.*

d) Premiul „VASILE CRISTESCU" de 5000 (cinci mii) lei anual, pentru *trigonometrie* sau *geometria triunghiului.*

e) Premiul „SPIRU HARET" de 5000 (cinci mii) lei anual, pentru *mecanică și astronomie.*

f) Premiul „VASILE CONTA" de 4000 (patru mii) lei anual, pentru lucrări de *filozofia matematicilor.*

g) Premiul „INGINER H. CAPRIEL" de 1000 (una mie) lei la fiecare 5 ani, pentru *matematici pure sau aplicate.*

Din fondul „GENERAL SCARLAT PANAITESCU" se acordă *«Premiu pentru lucrări de matematică aplicate la științele militare»*, publicate în decurs de 5 ani. Se aprobă raportul comisiunii pentru acordarea premiului „AL. ROȘU" pentru anul trecut, D-lui VICTOR L. FLORESCU, elev Liceul Militar „Mânăstirea Dealu".

b) **Ședințele Societății române de Științe, Secția Matematică.**

S'au făcut comunicări în următoarele ședințe, de D-nii:

1 Noemvrie 1937. G. ȚIȚEICA: *Asupra unei teoreme a lui* MORLEY. N. CIORĂNESCU: *Asupra unor șiruri recurente.*

29 Noemvrie 1937. AL. FRODA: *Despre funcția continuă de două variabile reale.* C. DRÂMBĂ: *Asupra unor ciocniri în problema restrânsă a celor trei corpuri.*

13 Decemvrie 1937. OCTAV ONICESCU: *Asupra unei teoreme de măsură.* N. CIORĂNESCU: *Funcțiuni de două variabile reale dotate cu analiticitate iperbolică.*

17 Ianuarie 1938. ION IONESCU: *Viața și opera inginerului* GH. EM. FILIPESCU. Darea de seamă asupra Societății pe anul 1937. Alegerea noului comitet.

7 Februarie 1938. DAN BALBILIAN: *Axiomatica geometriei proiective și transformarea lui* BÄCKLUND. MIRON NICOLESCU: *Familii normale de funcțiuni convexe.*

21 Februarie 1938. ALEX. GHICA: *Asupra determinării funcțiunilor analitice.* GH. TH. GHEORGHIU: *Asupra unor funcțiuni hipergeometrice confluente.*

7 Martie 1938. N. VASILESCU-KARPEN: *Imaginarea mecanică a unei antene.* DIONISIE GHERMANI: *Asupra unei teoreme a D-lui* POMPEIU. G. G. CONSTANTINESCU: *Asupra unei teoreme a D-lui* POMPEIU.

21 Martie 1938. D. POMPEIU: *Integrale, identități și aplicațiuni.* N. CIORĂNESCU: *Asupra coeficienților armonici ai unei funcțiuni analitice.*

c) **Sporirea Bibliotecii.**

Arithmetica și Algebra cullesă și prelucrată pentru Școlele publice din România de GEORGE-IÓN MANU, Maior în oștirea Română. Paris 1864.

Donată de D-l LT. C. D. IONESCU-ȚIU.

TH. LEPETIT & M. BLEYNIE. 500 Problèmes d'arithmétique donnés par les Commissions d'examen pour l'enseignement primaire. Ed. II. Paris.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

E. VERHELST. 2400 nouvelles questions mathématiques posées aux examens d'admission. Ed. II. Bruxelles 1895.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3059. *Să se rezolve sistemul:*

$$\operatorname{cosec} x \sec y - \operatorname{cosec} y = 0,$$

$$\operatorname{cosec} y \sec x - \operatorname{cosec} x = 0.$$

L. THEODORIU.

Soluţie. Prin înlocuirea lui $\sec\alpha$ şi $\operatorname{cosec}\alpha$ prin $\cos\alpha$ şi $\sin\alpha$, sistemul dat se transformă în sistemul

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg} y = \sin x \quad , \quad \operatorname{tg} x = \sin y,$$

sistem în care făcând substituţiile

$$\operatorname{tg} x = u \quad , \quad \operatorname{tg} y = v,$$

se transformă în

$$u = \frac{v}{\pm\sqrt{1+v^2}} \quad , \quad v = \frac{u}{\pm\sqrt{1+u^2}}.$$

Ridicând aceste ecuaţii la pătrat găsim

$$\text{(2)} \qquad u^2(1+v^2) = v^2 \quad , \quad v^2(1+u^2) = u^2,$$

între cari eliminând pe u^2 se găseşte că v este dat de cuaţia

$$v^2(1+v^2) = v^2,$$

care se reduce la $v^4 = 0$, adică $v = 0$. Din (2) rezultă imediat că şi $u = 0$. Deci soluţiile sistemului (1) sunt date de formulele

$$\text{(3)} \qquad x = k\pi \quad , \quad y = h\pi \qquad (k, h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Din modul cum am dedus sistemul (1) din sistemul dat rezultă că soluţiile acestuia din urmă trebuiesc să se găsească printre soluţiile sistemului (1). Insă se constată că soluţiile (3) verifică sistemul dat scris sub forma

$$\operatorname{cosec} x \sec y = \operatorname{cosec} y,$$

$$\operatorname{cosec} y \sec x = \operatorname{cosec} x,$$

în sensul că-i fac infinite ambele părţi. In realitate însă sistemul dat nu admite soluţii.

D-l DORIN N. THEODORESCU a găsit drept soluţii $x = 2k\pi$, $y = 2h\pi$, fără a stabili dacă aceste soluţii verifică sau nu sistemul dat.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 3248. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{a^4}{x^4} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{a^3}{x^3} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = 0.$$

M. GHELBER.

Punând

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = y \tag{1}$$

avem succesiv

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} = y^2 - 2$$

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{a^3}{x^3} = y^3 - 3y$$

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{a^4}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2$$

şi adunând se găseşte ecuaţia în y

$$y^4 + y^3 - 3y^2 - 2y = 0$$

$$\therefore \quad y(y+2)(y^2 - y - 1) = 0$$

ale cărei rădăcini sunt

$$y_1 = 0 \; ; \; y_2 = -2 \; ; \; y_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; ; \; y_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \; .$$

Ducând aceste valori în (1) şi rezolvând se găseşte că rădăcinile ecuaţiei (1) şi deci ale ecuaţiei date sunt:

$$x_1 = ai \quad ; \quad x_2 = -ai \quad ; \quad x_3 = x_4 = -a$$

$$x_5 = \frac{a}{4}\left[1 + \sqrt{5} + 2\sqrt{\sqrt{5} - 1}\right] ; \; x_6 = \frac{a}{4}\left[1 + \sqrt{5} - 2\sqrt{\sqrt{5} - 1}\right]$$

$$x_7 = \frac{a}{4}\left[1 - \sqrt{5} + 2i\sqrt{\sqrt{5} + 1}\right] ; \; x_8 = \frac{a}{4}\left[1 - \sqrt{5} - 2i\sqrt{\sqrt{5} + 1}\right].$$

Toate rădăcinile verifică ecuaţia (1) pentru valorile corepunzătoare ale lui y şi deci verifică şi ecuaţia dată.

Din Decembrie 1924 de când s'a propus această problemă, s'au primit soluţiuni bune de la D-nii: ALDEA N. N., ARVANITIS C. A., BÂRSĂNESCU V., BLEIWEISS P., BLUMEN M., CĂLIN M. GH., CONSTANTINESCU GH. GH., COŞNIŢĂ C., CRAIU N. I., DIACONESCU V. T., DRÂMBĂ N. C., FLOREA C. AL., FOCA I., GAIU EM., GEORGESCU D. E., GEORGESCU V., GHEORGHIU TH. GH., GHIŞOIU I. P., GIURUMESCU C., GRUBOVSCHI E., GROPPER S., GRUNSTEIN M., HARTULAR G., HULUBEI T., IACOB ST. E., IANCULESCU O., IOACHIM GR., IONESCU ANGELO, IONESCU P. H., IONESCU-BREZUICA C. I., IONESCU-BUJOR C., MANAFU V., MANOLESCU I. N., MAREŞ GR., MIHĂILESCU ST. N., MILU I., NESTOR G. D., NICOLAU GH, NICOLAU-DOBRIDOR I., NOVAC A., NOVACU V., PETRESCU A. D., POPOVICI A., POPOVICI C. C., POPOVICI DAN, POPOVICI M., PUŞCĂ I. T., RADEFF AT., REINHORN A. B., ROŞCULEŢ AL., ROŞU AL. A., RUSSU D. C., SCHÄCHTER O., ŞERBAN-ULMENI D., SEVASTRE D., SIMIONESCU D. GH., SPACU P., SPATHY R., STAN A., STOICA A., STOICESCU P., TĂRAŞ V., TEODORESCU N., TUNARU R. T., VÂRLAN V. V., VASILIU C. I., VELEA M., VLĂDESCU I. şi ZAHARIA I.

PROBLEMA 4162. *Să se găsească un număr de trei cifre egal cu suma dintre cubul uneia din cifrele sale, plus pătratul altei cifre şi plus cea de a treia cifră.*

N. C.

Vom examina pe rând cele şase cazuri ce se pot prezenta.

I. $$100a + 10b + c = a^3 + b^2 + c$$

$$\therefore \quad b(10 - b) = a(a^2 - 100)$$

egalitate *imposibilă,* căci a şi b fiind cifre, prima parte este pozitivă, pe când a doua negativă.

II. $$100a + 10b + c = a^3 + b + c^2$$

$$\therefore \quad a(100 - a^2) + 9b = c(c - 1).$$

Prima parte a egalității are valoarea minimă 99, iar partea a doua are valoarea maximă 72, încât egalitatea e *imposibilă*.

III. $$100a + 10b + c = a^2 + b^3 + c$$

$$\therefore \quad a(100 - a) = b(b^2 - 10).$$

Prima parte a egalității având valoarea minimă 99 va trebui ca $b \geqslant 6$. Partea a doua având valoarea maximă 639 va trebui ca $2 \leqslant a \leqslant 6$. Dând lui a şi b valori între aceste limite nu găsim *nicio soluție*.

IV. $$100a + 10b + c = a^2 + b + c^3$$

$$\therefore \quad a(100 - a) + 9b = c(c - 1)(c + 1).$$

Prima parte a egalității are valoarea minimă 99, aşa încât $c \geqslant 5$. Maximum părții a doua este 720, deci $a \leqslant 7$.

Dacă luăm pentru c valorile 8 sau 9 trebue ca

$$a(100 - a) = M9,$$

ceea ce dă $a = 1$ şi nu găsim nicio soluție.

Dacă luăm $c = 5$, 6 sau 7 va trebui să avem:

$$a(100 - a) = M3$$

deci $a = 1$, 3, 4, 6 sau 7. Insă pentru $a \geqslant 4$ obținem $9b < 0$ ceea ce este imposibil. Rămâne $a = 1$ sau 3.

Avem:

a	1	3	c	5	6	7
$a(100 - a)$	99	291	$c(c^2 - 1)$	120	210	336

Diferența între un număr al tabloului din dreapta şi unul al tabloului din stânga trebue să ne dea $M9 \leqslant 81$.

Găsim numai

$$336 - 291 = 45.$$

De unde soluția:

(1) $$357 = 3^2 + 5 + 7^3.$$

V. $$100a + 10b + c = a + b^2 + c^3$$

$$\therefore \quad 99a + b(10 - b) = c(c - 1)(c + 1).$$

Ca şi în cazul precedent trebue ca $c \geqslant 5$. Dacă luăm $c = 8$ sau 9 va trebui ca $b(10 - b) = M9$ adică $b = 1$ sau 9.

Atunci:

$$99a + 9 = \begin{cases} \underline{8}.7.9 \\ \underline{9}.8.10 \end{cases} \quad \text{sau:} \quad 11a + 1 = \begin{cases} 56 \\ 80. \end{cases}$$

Găsim soluţii pentru

$$c = 8 \quad \text{şi} \quad a = 5$$

şi anume:

(2) $\quad 518 = 5 + 1^2 + 8^3 \; ; \quad 598 = 5 + 9^2 + 8^3.$

Luând $c = 5$, 6 sau 7 va trebui să avem:

$$99a + b(10 - b) = \begin{cases} 120 \\ 210 \\ 336. \end{cases}$$

Încercând cu $a = 1$, 2 şi 3 găsim soluţiile:

(3) $\quad 135 = 1 + 3^2 + 5^3 \; ; \quad 175 = 1 + 7^2 + 5^3.$

VI. $\qquad 100a + 10b + c = a + b^3 + c^2$

$$\therefore \quad 99a = b(b^2 - 10) + c(c - 1).$$

Partea a doua a egalităţii are valoarea maximă 711 ceea ce ne dă $a \leqslant 7$. Prima parte are valoarea minimă 99, deci luând $c = 9$ găsim $b \geqslant 5$.

Dacă luăm $b = 8$ sau 9 rezultă $c = M9 = 9$ deci:

$$11a = \begin{cases} 54 + 8 \\ 71 + 8 \end{cases}$$

şi nu găsim nicio valoare a lui a care să satisfacă aceste egalităţi. Dând lui b celelalte valori avem:

pentru $b = 5 \quad 99a = 75 + c(c - 1)$

» $\quad b = 6 \quad 99a = 156 + c(c - 1)$

» $\quad b = 7 \quad 99a = 273 + c(c - 1).$

Pentru prima egalitate nu putem lua decât $a = 1$, pentru a doua $a = 2$ şi pentru a treia $a = 3$. Numai egalitatea a doua ne dă soluţia:

$$267 = 2 + 6^3 + 7^2. \tag{4}$$

Problema admite deci *şase* soluţii date de (1), (2), (3) şi (4).

Problema a fost studiată amănunţit de D-l DIMITRIE MAVRODIN care a dat cele *şase* soluţii precum şi 14 soluţii formale.

Soluţii bune au trimes D-nii: VASILE CEAUŞESCU (cl. VII-a lic. mil. Iaşi) şi NICOLAE D. ZANE (numai patru soluţii).

S'au mai primit trei „soluţii" fără niciun raţionament, autorii lor scriind cele nouă cifre, patratele şi cuburile lor, apoi făcând sumele „în toate felurile posibile" între o cifră, un patrat şi un cub.

Pentru aceasta nu au fost menţionaţi.

PROBLEMA 4599. *Să se rezolve sistemul:*

$$yz - zx - xy = 9e^2 - 2,$$
$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 = 81e^4 + 2,$$
$$y^3z^3 - z^3x^3 - x^3y^3 = 729\,e^6 + 2.$$

I. ŞT. NICULESCU.

Soluţie dată de D-nii: M. LEONTE A. NEGREA, S-LT. M. M. CHIRIŢĂ, S-LT. M. GRUMĂZESCU, S-LT. GR. MARTEŞ, M. F. AMĂRĂŞTEANU, C. I. CHIRIAC, I. S. COTIGHER, D. MAVRODIN, I. A. MERBL, PANAIT C. MAZILU, G. POPOVICI, TR. PREDOIESCU, A. CĂLINESCU, D. GR. CERCELEANU, D. I. CIOC, V. L. FLORESCU, C. N. GAVRILESCU, E. F. GABROVSCHI, D. D. MATEI, A. POPESCU-ZORICA, N. N. ROŞCULEŢ, N. D. ŞTEFĂNESCU, TILICĂ C. ŞTEFAN, M. AL. VASILESCU-STABU, E. MARCOVICI, ST. M. MOISOVICI şi D O. SACHTER. Facem substituţiile următoare

$$yz = u\ ,\ -zx = v\ ,\ -xy = w\ ; \tag{1}$$

sistemul devine

$$u + v + w = 9e^2 - 2,$$
$$u^2 + v^2 + w^2 = 81e^4 + 2, \tag{2}$$
$$u^3 + v^3 + w^3 = 729e^6 + 2.$$

Să mai transformăm puțin acest sistem. Pentru aceasta vom considera identitățile

$$u^2 + v^2 + w^2 = (u + v + w)^2 - 2(uv + vw + wu),$$

$$u^3 + v^3 + w^3 = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu) + 3uvw,$$

cari ne dau posibilitatea, folosind ecuațiile ce formează sistemul (2), să calculăm valorile expresiilor $uv + vw + wu$ și uvw. In felul acesta putem înlocui sistemul (2) prin sistemul

$$u + v + w = 9e^2 - 2$$

$$uv + vw + wu = -18e^2 + 1$$

$$uvw = 9e^2.$$

Acest sistem spune că u, v, w sunt rădăcinile ecuației

$$t^3 - (9e^2 - 2)t^2 + (-18e^2 + 1)t - 9e^2 = 0,$$

ecuație care se rezolvă ușor. Găsim

$$t_1 = -1 \quad , \quad t_2 = -1 \quad , \quad t_3 = 9e^2.$$

Avem astfel trei grupe de soluții

$$u = -1 \quad , \quad v = -1 \quad , \quad w = 9e^2$$

$$(3) \qquad u = -1 \quad , \quad v = 9e^2 \quad , \quad w = -1$$

$$u = 9e^2 \quad , \quad v = -1 \quad , \quad w = -1.$$

Să ne ocupăm mai întâi de prima grupă de soluții. In baza relațiilor (1) vom avea

$$(4) \qquad yz = -1 \quad , \quad zx = 1 \quad , \quad xy = -9e^2,$$

de unde rezultă prin înmulțire că

$$xyz = \pm 3e.$$

Această relație împărțită respectiv prin fiecare din ecuațiile sistemului (4) dă soluțiile

$$x = \pm 3e \quad , \quad y = \pm 3e \quad , \quad z = \pm \frac{1}{3e},$$

unde semnele se corespund.

La fel considerând celelalte două grupe de soluţii date de (3) găsim:

$$x = \pm 3e \quad , \quad y = \pm \frac{1}{3e} \quad , \quad z = \pm 3e$$

$$x = \pm \frac{1}{3e} \quad , \quad y = \pm 3e \quad , \quad z = \pm 3e$$

deci în total şase grupe de soluţii.

Observare. Soluţia de mai sus presupune $e \neq 0$. In cazul când $e = 0$ sistemul este *imposibil* cum se vede de exemplu din (4). In adevăr ultima ecuaţie spune că $x = 0$ sau $y = 0$, soluţii cari nu pot verifica primele două ecuaţii. Această observare nu a făcut-o niciunul dintre rezolvitori.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4611 [1]). *Să se arate că dacă:*

$$\cos 6x + 2\cos 5x + 3\cos 4x + 4\cos 3x + 5\cos 2x + 6\cos x = 0$$

atunci:

$$(2\cos 3x + 2\cos 2x + 2\cos x + 1)^2 = 7.$$

NICOLAE CIORĂNESCU.

1. *Soluţie* de D-nii: IOAN I. BUZINCU (Absolvent liceul militar, Iaşi) şi PETRU P. COJOCARU (cl. VIII-a, Liceul Militar, Iaşi).

Multiplicând relaţia dată cu 2, obţinem:

$$2\cos 6x + 4\cos 5x + 6\cos 4x + 8\cos 3x + 10\cos 2x + 12\cos x = 0$$

sau grupând convenabil:

$$(2\cos 6x + 2\cos 4x + 2\cos 2x) + 4(\cos 5x + \cos x) + 4(\cos 4x + \cos 2x) + 4(\cos 3x + \cos x) + 4\cos 3x + 4\cos 2x + 4\cos x = 0$$

de unde:

$$4\cos^2 3x + 4\cos^2 2x + 4\cos^2 x - 6 + 8\cos 3x\cos 2x + 8\cos 3x\cos x + 8\cos 2x\cos x + 4\cos 3x + 4\cos 2x + 4\cos x = 0$$

sau

$$4\cos^2 3x + 4\cos^2 2x + 4\cos^2 x + 1 + 8\cos 3x\cos 2x + 8\cos 3x\cos x + 8\cos 2x\cos x + 4\cos 3x + 4\cos 2x + 4\cos x = 7$$

$$\therefore \quad (2\cos 3x + 2\cos 2x + 2\cos x + 1)^2 = 7.$$

c. c. t. d.

---

1) Enunţ rectificat.

2. *Soluție* dată de D-l CHIRIȚĂ M. MIHAIL (Șc. of. Marină, Constanța):

In R. M. T., anul XII, pag. 82 (problema 1069) se stabilește relația:

$$(1+2\cos t+2\cos 2t+\ldots+2\cos nt)^2 = 2n+1$$
$$+2[\cos 2nt+2\cos(2n-1)t+\ldots+(2n-1)\cos 2t+2n\cos t].$$

Făcând $n=3$ și $t=x$, obținem:

$$(1+2\cos x+2\cos 2x+2\cos 3x)^2 = 7+2[\cos 6x+2\cos 5x$$
$$+3\cos 4x+4\cos 3x+5\cos 2x+6\cos x]$$

sau ținând seama de condiția din enunț:

$$(2\cos 3x+2\cos 2x+2\cos x+1)^2 = 7.$$

c. c. t. d.

D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila), S-LT. M. GRUMĂZESCU, TRAIAN PREDOIESCU (Țânțăreni), IONEL V. LITINSKI (Licențiat în Matematici, Mizil) și D-ra ALEXANDRA A. VASILESCU (cl. VI-a, Lic. «Carmen-Sylva», Timișoara) au rezolvat problema exprimând ambele relații din enunț în funcție de $\cos x$.

AD. B.

PROBLEMA 4736. *Să se găsească un număr de trei cifre, egal cu produsul dintre produsul și suma cifrelor sale.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-nii: M. GRUMĂZESCU (Sub-Locotenent) și M. AL. VASILESCU-ȘTABU (Lic. „Mihai Viteazul", Alba Iulia).

Fie abc numărul căutat. Trebue să avem

$$(1) \qquad 100a+10b+c = a\,.\,b\,.\,c\,.\,(a+b+c).$$

Se vede din (1) că toate cifrele a, b, c sunt diferite de zero.

Vom examina problema, studiind întâi cazurile particulare când numărul cerut are cifre egale între ele.

Cazul 1°. $a = b$. Din (1) se deduce

$$110a + c = a^2 \cdot c\,(2a + c) \qquad \therefore \quad c = ac'$$

$$\therefore \quad 110 + c' = a^3 \cdot c'\,(2 + c')$$

şi cum $c' < 6$ vom face pe rând $c' = 2, 3, 4, 5$ şi găsim pentru a valorile inadmisibile

$$a^3 = 14 \quad ; \quad 15 \cdot a^3 = 113 \quad ; \quad 4a^3 = 19 \quad ; \quad 7a^3 = 23.$$

Cazul 2°. $b = c$. Din (1) se deduce

$$100a + 11b = ab^2\,(a + 2b) \qquad \therefore \quad b = ab'$$

$$\therefore \quad 100 + 11b' = a^3 b'^2\,(1 + 2b')$$

b' este un divizor al lui 100 şi cum $b' < 6$ se poate lua $b' = 2, 4, 5$. Numai pentru $b' = 4$ se găseşte valoarea acceptabilă $a = 1$. Deci soluţia:

$$a = 1 \ , \ b = c = 4$$

$$144 = 1 \times 4 \times 4 \times (1 + 4 + 4).$$

Cazul 3°. $a = c$. Se găseşte ca în cazurile precedente

$$101b' + 10 = b^3 b'\,(1 + 2b')$$

cu $a = bb'$, unde b' trebue să fie divizor al lui 10.

In acest caz nu avem soluţie.

Cazul 4°. $a = b = c$, duce la relaţia

$$111a = 3 \cdot a^4$$

$$\therefore \qquad a^3 = 37$$

imposibilă în numere întregi.

5°. Trecem acum la cazul general când $a \neq b \neq c$.

Relaţia (1) arată că din numerele de 3 cifre, care nu intră în cazurile 1°, 2°, 3° studiate vom mai elimina pe următoarele numere de 3 cifre diferite:

1. Toate numerele care au o cifră egală cu 0.

2. Toate numerele prime.

3. Toate numerele care au o cifră 5 şi cel puţin o cifră pereche.

4. Toate numerele care au una din cifrele a, b egală cu 5, căci atunci produsul $a \times b \times c(a + b + c)$ se termină cu 5 şi c este 0 sau 5, contra ipotezei.

5. Toate numerele care au o cifră sau două divizibile prin 3 sau 9 fără ca suma restului de cifre să se dividă prin 3 sau 9.

6. Toate numerele care au 2 cifre perechi sau o cifră egală cu 4 sau 8, fără ca numărul bc să se dividă prin 4.

7. Numerele neperechi care au una din cifrele a sau b perechi.

8. Numerele care au suma cifrelor egală cu 10 sau 20.

9. Numerele care au suma cifrelor terminată cu 5 fără ca c să fie 5.

10. Numerele care încep sau se termină cu 8 sau 7 fără ca numărul bc sau ab să se dividă prin 8 sau 7.

Ţinând seamă de aceste condiţiuni rămâne de aplicat formula (1) şi de examinat numai următoarele 17 numere:

128; 135; 175; 216; 248; 264; 312; 315; 324;

412; 432; 612; 624; 648; 824; 864; 916.

Singurul care convine este 135. Problema are deci următoarele 2 soluţiuni.

$$135 = 1 \times 3 \times 5 \times (1 + 3 + 5)$$

$$144 = 1 \times 4 \times 4 \times (1 + 4 + 4).$$

Notă. 1°. D-nii: ŞTEFAN TILICĂ C. (Lic. Traian, T. Severin) şi M. F. ROSCIESCU (Lic. militar, Iaşi) au rezolvat ecuaţiunea (1) în raport cu una din cifre şi dând sub radical diferite valori posibile cifrelor au găsit cele 2 soluţiuni.

2°. Intrebuinţând calea de la 1°, D-l M. F. AMĂRĂŞTEANU (Elev inginer, Bucureşti) a găsit soluţia parţială 144, iar D-l H. REISCHER (Lic. Internat Iaşi) soluţia parţială 135.

3°. Au găsit soluţiile exacte prin încercări, fără niciun raţionament D-nii: L. M. BIVOLARU, H. IOACHIM, P. T. MAMUT, M. GH. NICULESCU, M. P. STĂNCULEANU şi V. STĂNCULESCU (Lic. militar Iaşi).

4°. Ca la 3°, însă a găsit numai soluţia 135 D-l R. I. CIURESCU (Colegiul Naţional Sf. Sava, Bucureşti).

5°. Nu citez rezolvitorii care au dat soluţiile fără a arăta cum le-au găsit.

6°. Problema aceasta a mai fost propusă şi de D-l O. ORĂNESCU sub Nr. 3082. In soluţia ce s'a dat la pag. 382 Vol. XXXII s'au folosit soluţiile problemei 1076 de la pag. 266 Vol. XI *Gazeta Matematică*, unde se cer numerele de 2 cifre divizibile prin suma cifrelor lor.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4775. *In triunghiul* ABC *fie înălțimea* AD. *Să se ducă prin vârful* C *o dreaptă care să taie pe* AD *în* E *și pe* AB *în* F *în așa fel ca să avem:*

$$CE = FA - FB.$$

GH. VASILIU.

Soluție analitică dată de D-l COJOCARU P. PETRU (elev clasa VIII-a lic. militar Iași).

Să luăm un sistem de axe rectangulare care să coincidă cu BC axa x-lor și cu AD axa y-lor, sistem în care fie

$$A(o, a)\ ;\ B(-b, o)\ ;\ C(c, o)\ ;\ D(o, o) \text{ și } E(o, m),$$

m trebuește determinat în funcție de a, b și c, așa fel ca să avem

$$CE = FA - FB.$$

Ecuațiile dreptelor CE și AB fiind:

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{m} - 1 = 0 \quad \text{și} \quad \frac{x}{-b} + \frac{y}{a} - 1 = 0$$

intersecția lor ne va da coordonatele punctului F:

$$\frac{bc(m-a)}{ac+mb} \quad \text{și} \quad \frac{am(b+c)}{ac+mb}.$$

Punând condiția cerută de problemă găsim că:

$$\sqrt{c^2+m^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

adică:

$$m = \sqrt{a^2+b^2-c^2}.$$

Având pe m calculat, avem determinată poziția dreptei CE.

Analog a rezolvat problema D-nul GH. GH. CONSTANTINESCU.

Au mai trimes soluții D-nii: BIVOLARU M. L., PUNGĂ N., și VARTIC N. (elevi ai lic. militar Iași); ele seamănă una cu alta perfect, și sunt la fel de complicate prin faptul că axele au fost nechibzuit alese.

Observațiuni. Problema este posibilă dacă:

$$a^2 + b^2 \geqslant c^2$$

și ținând seamă că:

$$a^2 = \overline{AB}^2 - b^2 \text{ și că } c = \overline{AC}\cos\gamma$$

ea este posibilă în acele triunghiuri în care:

$$AB \geqslant AC \cos\gamma.$$

In cazul când $m = 0$, triunghiul ABC devine dreptunghic în B şi isoscel, având, conform condiţiei $CE = FA - FB$, catetele BA şi BC egale.

GH. V.

PROBLEMA 4823. *Prin fiecare din vârfurile unui triunghiu* ABC *se duce câte o antiparalelă la una din laturile adiacente prin raport cu celelalte două laturi ale triunghiului. Dacă* a', b', c' *şi* a, b, c *sunt respectiv lungimile antiparalelelor ce pleacă din vârfurile* A, B, C *şi lungimile laturilor opuse aceloraşi vârfuri, să se arate că avem:*

$$a' \cdot b' \cdot c' = a \cdot b \cdot c \quad ; \quad a' \cdot b' \cdot c' (a' + b' + c') = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2.$$

IULIAN ALEXIU.

I. *Soluţia I* dată de D-nii: MATEI D. DUMITRU (student, Iaşi); FLORESCU L. VICTOR, OCTAVIAN GH. RĂDULESCU, DORIN N. THEODORESCU (elevi Lic. Militar N. Filipescu); CRĂCIUN I., ACHILLE PETRESCU, C. C. PĂSCARU, CONSTANTIN V. PANTELIMON, POPA D. M., SAVIN I. IOAN (elevi Lic. Militar Iaşi); ION D. DIACONESCU, EMIL S. MODÂLCĂ (elevi Lic. Traian T.-Severin); IONESCU B. N. GHEORGHE (Lic. Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti); I. STĂNCULESGU (Lic. Spiru Haret, Bucureşti); M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. Mihai Viteazu, Alba Iulia); PAUL DOBRESCU, STREDER IOAN şi ROŞCULEŢ N. MARCEL.

Fie $AA' = a'$ o antiparalelă la AB, prin raport cu celelalte două laturi ale triunghiului ABC. Triunghiurile AA'C şi BAC sunt asemenea având:

$$\widehat{A'AC} = \hat{B} \quad ; \quad \widehat{CA'A} = \hat{A}$$

prin construcţie $\hat{C}$ comun.

Rezultă:

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{AC}{BC}$$

sau:

$$\frac{a'}{c} = \frac{b}{a};$$

de unde:

(1) $$a' = \frac{bc}{a}.$$

In mod analog se obţin relaţiile:

(2) $$b' = \frac{ca}{b} \quad ; \quad (3) \quad c' = \frac{ab}{c}.$$

Inmulţind (1), (2) şi (3) se obţine:

(4) $$a' \cdot b' \cdot c' = a \cdot b \cdot c$$

(relaţia I din enunţ).

Adunând relaţiile (1), (2) şi (3):

(5) $$a' + b' + c' = \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}.$$

Inmulţind relaţiile (4) şi (5):

$$a'b'c'\,(a' + b' + c') = abc\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2.$$

q. e. d.

Soluţia II dată de D-l RADU APOSTOL (Lic. Militar Nicolae Filipescu):

$\overline{AA'}$ şi AB fiind antiparalele în raport cu AC şi BC avem:

$$\widehat{A'AC} = \hat{B} \quad ; \quad \widehat{AA'C} = \hat{A}.$$

In triunghiul AA'C avem:

$$\frac{a'}{\sin C} = \frac{b}{\sin\widehat{AA'C}} = \frac{b}{\sin A};$$

(1) $$\begin{cases} a' = b\dfrac{\sin C}{\sin A}; \text{ analog: } b' = C\dfrac{\sin A}{\sin B}, \quad c' = a\dfrac{\sin B}{\sin C}. \end{cases}$$

Făcând produsul relaţiilor (1) membru cu membru:

(2) $$a'b'c' = abc,$$

adunând relaţiile (1):

$$a' + b' + c' = \frac{\Sigma b \sin B \sin^2 C}{\Pi \sin A} \quad ; \quad \text{dar:} \quad \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\sin B = \frac{b}{2R} \quad ; \quad \sin C = \frac{c}{2R}.$$

Deci:

$$a' + b' + c' = \frac{\sum \frac{b^2c^2}{8R^3}}{\prod \frac{a}{2R}} = \frac{\sum b^2c^2}{abc};$$

$$(a' + b' + c')\, abc = \sum b^2c^2.$$

Ţinând seama şi de relaţia (2):

$$a'b'c'\,(a' + b' + c') = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2.$$

q. e. d.

Notă. 1. D-l ROŞCULEŢ N. MARCEL găseşte următoarele relaţii:

$$a'b' = c^2 \ldots \; ; \quad a'b'c'\,(a'^2 + b'^2 + c'^2) = \frac{1}{abc} \cdot (a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4).$$

2. D-l DORIN N. THEODORESCU mai găseşte următoarele relaţii:

$$\sum a'b' = \sum c^2 \; ; \quad \sum aa' = \sum bc \; ; \quad \sum a'b'c = \sum c^3.$$

3. A mai dat o soluţie trigonometrică D-l ALEXANDRU POPESCU-ZORICA.
4. A mai rezolvat problema, D-l TILICĂ C. ŞTEFAN.

I. AL.

PROBLEMA 4850. *Să se arate că:*

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{U_{2n+1}}{2U_{2n+1} + U_{2n}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{U_{2n}}{U_{2n} + U_{2n+1}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2U_{2n+1}^2 + 4U_{2n}U_{2n+1} + U_{2n}^2} = 0$$

U_{2n} *fiind un termen de rang par din şirul lui* FIBONACCI.

LT. C. IONESCU-ŢIU.

1. *Soluţie* dată de D-ra VENERA V. TĂNĂSESCU (studentă, Bucureşti) şi D-nii: DUMITRU I. CIOC (Clasa VIII-a Liceul Militar, Craiova), S-LT. M. GRUMĂZESCU, MIRCEA A. NEGREA (profesor, Brăila), V. A. PĂDUREŢ (Chişinău), TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI (Student, Bucureşti), MARCEL N. ROŞCULEŢ şi V. L. FLORESCU.

Ţinem seama că dacă

$$\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg} c,$$

avem:

$$c = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b) = \frac{a-b}{1+ab}.$$

Relaţia propusă devine:

$$\frac{\dfrac{U_{2n+1}}{2U_{2n+1}+U_{2n}} - \dfrac{U_{2n}}{U_{2n}+U_{2n+1}}}{1+\dfrac{U_{2n+1}\cdot U_{2n}}{(2U_{2n+1}+U_{2n})(U_{2n}+U_{2n+1})}} = -\frac{1}{2U_{2n+1}^2+4U_{2n}U_{2n+1}+U_{2n}^2}$$

care se transformă în relaţia:

$$(1) \qquad U_{2n+1}^2 - U_{2n+1}U_{2n} - U_{2n}^2 = -1.$$

Ştiind că în şirul lui FIBONACCI: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

$$U_{n+1} = U_n + U_{n-1},$$

relaţia (1) devine:

$$U_{2n+1}(U_{2n+1} - U_{2n}) - U_{2n}^2 = -1,$$

sau

$$(2) \qquad U_{2n+1}U_{2n-1} - U_{2n}^2 = -1.$$

Relaţiile (1) şi (2) se deduc prin metoda inducţiunii (*Culegere de probleme de aritmetică*, I. I. IV, 20, Ed. I).

2. In G. M. XXII, 253 avem relaţia:

$$U_{n+1}^2 - U_n U_{n+1} - U_n^2 + (-1)^n = 0,$$

care pentru n par devine relaţia (1); iar în G. M. XIII, 138, avem relaţia:

$$U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1} + (-1)^n = 0,$$

care deasemenea pentru n par devine relaţia (2).

3. In G. M. XXI, 125, D-l GH. ZAPAN a stabilit relaţia:

$$U_{n+s} = U_n U_s + U_{n-1}U_{s-1}$$

din care în G. M. XXIX, 214 se deduce relaţia:

$$U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = (-1)^{n+1}$$

care generalizată devine:

$$U_{n+s}U_{n-s} - U_n^2 = (-1)^{n+s}U_{s-1}^2.$$

4. *Observare.* Pentru un termen de rang depărtat, termenul:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2U_{2n+1}^2+4U_{2n}U_{2n+1}+U_{2n}^2},$$

are o valoare destul de mică, deci

$$\operatorname{tg}\frac{U_{2n}}{U_{2n}+U_{2n+1}} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\frac{U_{2n+1}}{2U_{2n+1}+U_{2n}}$$

au valori sensibil egale.

Astfel, pentru $n=4$, se obţine egalitatea:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{13}{34}-\operatorname{arc\,tg}\frac{21}{55}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2143}$$

care face obiectul Exerc. VII. 174 din *Suplimentul Gazetei Matematice.* Anul II. 222.

C. I. Ţ.

PROBLEMA 4877. *Să se facă expresiunea:*

$$E\equiv\frac{(p^2-q^2)\sin 2\alpha-2pq\cos\alpha}{(p^2-q^2)\sin 2\alpha+2pq\cos 2\alpha}$$

calculabilă prin logaritmi.

PAUL DOBRESCU.

Soluţie dată de D-ra V. TĂNĂSESCU şi D-nii: N. N. TOMA şi I. I. SOLOMON.

Expresiunea dată se poate scrie

$$E\equiv\frac{2\cos\alpha\left[\sin\alpha-\dfrac{2pq}{2(p^2-q^2)\cos\alpha}\cdot\cos\alpha\right]}{\sin 2\alpha+\dfrac{2pq}{p^2-q^2}\cos 2\alpha}.$$

Făcând

$$\frac{2pq}{p^2-q^2}=\operatorname{tg}\theta \quad \text{şi} \quad \frac{2pq}{2(p^2-q^2)}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\varphi$$

avem

$$E\equiv\frac{2\cos\alpha(\sin\alpha-\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha)}{\sin 2\alpha+\operatorname{tg}\theta\cos 2\alpha}=\frac{2\cos\alpha\left(\dfrac{\sin\alpha\cos\varphi-\sin\varphi\cos\alpha}{\cos\varphi}\right)}{\dfrac{\sin 2\alpha\cos\theta+\sin\theta\cos 2\alpha}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{2\cos\alpha\cos\theta\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi\sin(2\alpha+\theta)}.$$

c. c. t. d.

Intre $tg\theta$ şi $tg\varphi$ există relaţia

$$\frac{tg\,\theta}{tg\varphi} = 2\cos\alpha$$

ceea ce serveşte a calcula pe φ după determinarea lui θ.

Notă. 1. Au transformat expresiunea sub alte forme calculabile prin logaritmi D-nii: N. I. MILU, ADOLF ŞAICHIN, LOCOT. PANAITE V. M. NEGOIŢĂ şi D. I. CIOC.

2. Celelalte soluţii primite, din cari majoritatea au fost anunţate pe coperta gazetei, au considerat — pentru simetrie — şi la numărător $\cos 2\alpha$ în loc de $\cos\alpha$, ajungându-se uşor la expresiunea

$$E \equiv \frac{\sin(2\alpha - \theta)}{\sin(2\alpha + \theta)} \qquad \left(tg\theta = \frac{2pq}{p^2 - q^2}\right).$$

COL. G. I. LIT.

PROBLEMA 4899. *a, b, c fiind laturile, iar* α, β, γ *unghiurile unui triunghiu, ele satisfac relaţia:*

$$ab(a-b)\cos^2\frac{\gamma}{2} + bc(b-c)\cos^2\frac{\alpha}{2} + ca(c-a)\cos^2\frac{\beta}{2} = 0.$$

GH. VASILIU.

Soluţia întâia, dată de D-rele CRĂCIUNESCU I. MIOARA şi GEREANU C. ANA (studente) şi de D-nii: SUB-LT. GRUMĂZESCU M., elev ing. AMĂRĂŞTEANU F. M., JAREGHIE V. IOAN, MIRONESCU TR. DINU, MOTAŞ CAMIL, PANTELIMON V. CONST., POPA D. MIRCEA, PEPTU P. C., SAVIN I. IOAN, SECU V. AD., SOLOMON I. ISAC, STREDER I. şi TURCU R. SANDU (elevi lic. militar Iaşi); ANDRIEVICI N., BUZNEA D. DINU, DECIULESCU GH., DIACONESCU MARCEL, FLORESCU VIGTOR, IONESCU-FULGER M. C., STOENESCU D. MIREL (elevi lic. militar Târgovişte); ALEXANDRESCU C. M., CORNĂŢEANU I. AUREL, DIACONESCU D. IOAN, FLORESCU M., IONESCU B. N. GH., MILU I. NIC., MODÂLCĂ EMIL, NEGREA A. MIRCEA, OBREJA DORIN, PÂRVULESCU AL. VL., POPESCU-ZORICA N. AL., PREDOESCU ŢÂNŢĂRENI, REISSCHER L. H., ROŞCULEŢ M., ŞAICHIN O. A., SEGAL JOE, STĂNCULESCU MIRCEA, TILICĂ C. ŞTEFAN, TURTOIU FĂNICĂ şi ZANCU C. AUREL.

Ţinând seamă că:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}; \text{ etc.}\ldots$$

relaţia propusă devine:

$$p\,\Sigma\,(a-b)\,(p-c) = 0$$

care uşor se verifică că este identică cu zero, făcând dezvoltările şi reducerile în suma:

$$\Sigma\,(a-b)\,(a+b-c) = 0.$$

Soluţia a doua. Din cunoscutele rapoarte:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

deducem că, de ex.:

$$a-b = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\gamma}\,c.$$

Deci:

$$ab\,(a-b)\cos^2\frac{\gamma}{2} = abc\,\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{2\sin\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$= abc\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = abc\,(\cos\gamma - \cos\beta).$$

Adică:

$$\Sigma\,a\,.\,b\,.\,(a-b)\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{abc}{2}\,\Sigma\,(\cos\gamma - \cos\beta) = 0.$$

Aşa au rezolvat problema D-nii: BEIU-PALADI E., GOLDENBERG I. şi TĂTARU N. NIC.

In fine soluţiuni mai lungi şi asemănătoare între ele au trimes următorii elevi ai lic. militar din Cernăuţi: ARHIPESCU M. C., BANCEA N. N., BOŞOLDEA GR. GR., CURCĂ C-TIN, FLOAREŞ I. AD., GVIAZDOMORSCHI E. R., NEDELCU V. NIC., POPA C. B., RUSSU I. E., ŞERBĂNESCU N. ŞT. şi ŞTEFANOV P. ŞT.

GH. V.

EXERCIȚII

30. Fie a şi b rădăcinile *complexe* ale ecuaţiei cu coeficienţi *reali* :

(1) $$x^2 + px + q = 0.$$

Pentru ce valori ale lui p şi q ecuaţia :

(2) $$x^2 + ax + b = 0$$

admite *o singură* rădăcină reală ?

N. N. IONESCU.

R. Fie x_1 rădăcina reală a ecuaţiei (2).
Se are identitatea :

(3) $$x_1^2 + ax_1 + b \equiv 0.$$

Să schimbăm în această identitate pe i (unitatea imaginară) în $-i$; a se schimbă în b şi b în a, căci ecuaţia (1), având coeficienţi reali, rădăcinile ei complexe sunt conjugate. Se obţine identitatea :

(3′) $$x_1^2 + bx_1 + a \equiv 0.$$

Scăzând membru cu membru identităţile acestea, se obţine :

(4) $$x_1(a - b) + b - a \equiv 0$$

$$\therefore \qquad x_1 = 1.$$

Inlocuind această valoare în (2) se obţine :

$$1 + a + b = 0.$$

Deci :

(5) $$p = 1.$$

Ecuaţia (1) se scrie :

(1′) $$x^2 + x + q = 0.$$

Ca a şi b să fie numere complexe trebue :

$$1 - 4q = -\alpha^2 \qquad (\alpha \text{ real})$$

$$\therefore \quad q = \frac{1 + \alpha^2}{4} .$$

Aşa că ecuaţia (1) scrie :

$$4x^2 + 4x + 1 + \alpha^2 = 0.$$

Sau :

(1″) $$(2x + 1)^2 + \alpha^2 = 0.$$

Observaţie : Chestiunea e în ordinea de idei a problemei No. 4553.

31. Se prelungeşte fiecare latură a unui triunghiu, cu o lungime egală cu de n ori latura respectivă; fie S' suprafaţa triunghiului format de extremităţile acestor prelungiri şi S suprafaţa triunghiului dat.

Să se arate că avem:

$$S' = (3n^2 + 3n + 1)\,S$$

sau

$$S' = n\,(n + 1)\,S$$

după cum prelungirile laturilor s'au făcut sau nu în acelaş sens.

CORNELIU GEORGESCU

R. Fie ABC un triunghiu oarecare; prelungesc pe $\overline{BA}$ cu $\overline{AC'} = n \times \overline{BA}$, pe $\overline{AC}$ cu $\overline{CB'} = n \times \overline{AC}$ şi pe $\overline{CB}$ cu $\overline{BA'} = n \times \overline{CB}$ adică pe toate în acelaş sens. Se vede uşor că S' este compusă din S plus suma suprafeţelor triunghiurilor B'CA', C'BA' şi B'AC'.

Fie D şi D' proecţiile punctelor B şi A' pe AC, triunghiurile dreptunghice asemenea BDC şi A'D'C, dau:

$$\frac{\overline{A'D'}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{BC}}, \text{ dar } \overline{A'C} = (n + 1) \cdot \overline{BC}$$

şi deci

$$\overline{A'D'} = (n + 1) \cdot \overline{BD}.$$

Să calculăm acum supraf. triunghiului B'CA'; avem:

$$\text{aria } B'CA' = \frac{\overline{B'C} \times \overline{A'D'}}{2} = \frac{(n \cdot \overline{AC}) \cdot (n + 1)\,\overline{BD}}{2} = n\,(n + 1)\,S.$$

In acelaşi mod se găseşte că şi triunghiurile C'BA' şi B'AC' au suprafeţele egale cu $n\,(n + 1)\,S$, aşa că

$$S' = 3n\,(n + 1)\,S + S = (3n^2 + 3n + 1)\,S.$$

c. c. t. d.

Dacă acum, în loc să prelungesc pe BA până în C', voiu prelungi pe AB până în C'', obţin $\overline{BC''} = n \times \overline{AB}$. Triunghiul B'C''A' răspunde părţii a II-a a problemei. Fiindcă BC împarte pe AB' şi pe AC'' în părţi proporţionale, rezultă BC $\parallel$ B'C'' şi B'C'' $= (n + 1)$ BC sau B'C'' $=$ A'C; figura A'CB'C'' este deci un paralelogram şi triunghiurile B'C''A' şi B'CA' sunt echivalente ceea ce atrage după sine a doua egalitate a problemei, adică

$$S' = n\,(n + 1)\,S$$

S' fiind suprafaţa tr. B'C''A'.

PROBLEME PROPUSE

4939. In *„Aritmetica şi Comptabilitatea"* pentru clasa IV-a a Liceelor industriale de fete de PETRE MARINESCU, GHEORGHE I. DÂMBOIANU şi ION M. DUTCHEVICI, 1937, se găseşte la pagina 54 următoarea problemă:

„O persoană vrea să cumpere o casă care costă 450000 lei. Ne-având decât 3/15 din aceşti bani, se împrumută pentru rest dela o bancă. Ştiind că banii au fost luaţi cu 12% şi că timpul a fost de 2 ani, să se afle ce dobândă va plăti.

Cum s'ar putea rectifica problema cu minimum de schimbări de cifre ?

I. IONESCU.

4940. Să se arate că expresiunea:

$$(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-k)-(n-1)(n-2)(n-2)\ldots(n-k)$$

este divizibilă cu $(m-n)$. Generalizare !

CPT.-COMANDOR GR. ZAPAN.

4941. Cum se au numerele:

$$N_1 = 3^{\alpha}! \qquad N_2 = 3^{\alpha-1}! \qquad 3^{3\alpha-1} + 2\alpha - 1$$

unul faţă de celălalt ?

MAIOR I. LINTEŞ.

4942. Să se găsească patratul de opt cifre, care se obţine scriind patru cifre identice între numerele N şi 2N.

G-L GH. BUICLIU.

4943. Unind consecutiv mijloacele diagonalelor feţelor laterale ale unui trunchiu de piramidă triunghiulară, se obţine un exagon al cărui perimetru este constant când baza mare este fixă, iar baza mică variază.

C. IONESCU-BUJOR.

4944. Intr'un tetraedru ortocentric, sfera ortogonală la cele patru sfere care au centrele în baricentrele feţelor şi diametrele medianele tetraedrului, este egală cu sfera conjugată.

V. THÉBAULT.

4945. Dacă $mx + ny + pz = 0$, avem şi:

$$mnp(x^3 + y^3 + z^3) + xyz(m^3 + n^3 + p^3) + \Sigma myz[p(py + mz) + n(my + nz)] = 0$$

Σ însumând termenii obţinuţi prin permutarea concomitentă

$$x, y, z \; ; \; m, n, p.$$

N. N. MIHĂILEANU.

4946. Să se construiască grafic şi apoi să se rezolve trapezul ABCD, cunoscându-i-se perimetrul $2p$, diferenţa bazelor $2d$ şi unghiurile C, D adiacente bazei mari.

GH. DUMITRESCU.

4947. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei:

$$\frac{\sin 5x + \cos 5x}{\sec x + \operatorname{cosec} x} = k,$$

pentru diferitele valori ale parametrului k.

Să se rezolve complet ecuaţia pentru $k = \frac{11}{54}$.

GH. D. SIMIONESCU.

4948. Pe axa Ox se iau punctele A, A' şi pe axa Oy se iau punctele B, B'. Se notează cu C intersecţia dreptelor A'B', AB şi cu L, M, N mijloacele diagonalelor OC, AB' AB ale patrulaterului complet OACB'BA'. Se ştie că punctele L, M, N sunt colineare. Presupunând punctele A, A', B date, să se determine punctul B' astfel ca $\overline{LM} = \overline{MN}$. Să se indice o construcţie geometrică simplă a punctului B'.

D. V. IONESCU.

4949. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri polar reciproce faţă de un cerc O: A' polul lui BC, B' polul lui CA, C' polul lui AB.

Fie intersecţiunile:

$$C_a \equiv (AB, A'C') \; ; \; B_a \equiv (AC, A'B') \; ; \; C_b \equiv (BA, B'C') \; ;$$

$$A_b \equiv (BC, B'A') \; ; \; A_c \equiv (CB, C'A') \; ; \; B_c \equiv (CA, C'B).$$

Să se arate că:

1°. Dacă unul din patrulaterele $AA'C_aB_a$, $BB'C_bA_b$, $CC'A_cB_c$ este inscriptibil, atunci toate sunt inscriptibile.

2°. In acest caz, cele trei cercuri circumscrise şi cercul O fac parte din acelaşi fascicol punctual linear.

AD. GHEORGHIU.

4950. Să se figureze variaţia funcţiei:

$$y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

şi să se deducă neegalitatea:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}$$

pentru $n \geqq 1$. Numărul e este baza logaritmilor naturali.

TH. ANGHELUŢĂ.

ERATA. Problema 2947. Să se arate că dacă ecuaţia algebrică $f(x) = 0$ are toate rădăcinile sale reale, şi ecuaţia:

$$125[f^3 + (f^3)'] - 275a[ff' + (ff')' - af'f''] + 6a^4[f'f''' + (f'f''')'] - 6a^3f[f'' + f''']'$$
$$+ a^2(f + f')'[150f' - 55af''] + 55a^2f'''(f - af') - a^2f''[70f' - 55f] - 6a^3f'f''' = 0$$

are iarăşi toate rădăcinile sale reale, a fiind un număr real, iar accentele însemnând operaţiunea de derivare.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexandrescu C. M. (4900); *Brotea Gh.* (4908); *Buznea D. D.* (4895); *Călinescu Aurelian* (4773, 889); *Cârdeiu Gh.* (4829, 98, 900, 08); *Cetăţeanu St.* (4899, 900, 08, A); *Cioc I. D-tru* (4850); *Cornăţeanu I. A.* (4814, 65, 900, 25); *Costinescu Adrian* (4908); *Costinescu O.* (4878); *Crăciunescu Mioara* (4930); *Florescu L. Victor* (4788, 850, 928); *Grumăzescu M. Subloc.* (4550, 765, 850, 92, 911, 21, 28); *Hortopan G. Gr.* (4900); *Ionescu B. Gh.* (4900); *Mărculescu O.* (4923, 24, 25, 30, 34, 36); *Matei D. V.* (4900); *Modâlcă S. E.* (3692, 4035, 570); *Motaş C. C.* (4900); *Negoiţă Panait Locot.* (4928); *Negrea A. M.* (4860); *Pădureţ Vasile* (4850, 93, 908, 24); *Pantelimon V. Const.* (4761, 863); *Paparizu I. G.* (4918); *Pârvulescu Adrian* (4908); *Pârvulescu A. Vl.* (4918, 21); *Petrescu Achille* (4923); *Popa D. Mircea* (4863); *Popescu Zorica N. A.* (4863, 78); *Rădulescu Octavian* (4899, 900, 06, 07); *Rohr I. Alex.* (4899); *Roşculeţ Marcel* (4850); *Segal Joe* (4906); *Stoenescu D. M.* (4900); *Streder I.* (4921); *Tănăsescu V. Venera* (4850); *Tătaru Nicolae* (4884); *Toma N. Nicolae* (4878); *Vlad C. I. Mihai Locot.* (4908, 11).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia VI . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* 1926. (Epuizată).

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50
Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

C. 50.760

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIII

NUMĂRUL 9. — MAI 1938

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Architecturae militaris tyrocinium a lui E. Vols . . . . . *Victor Marian.*
2. Aritmetica lui Gheorghe Asachi (urmare) . . . . . *P. Z. Cazanacli.*
3. Convergența seriilor cu termenii pozitivi . . . . . *M. Ghermănescu.*
4. O rețea de conice . . . . . *Lt. Mihail I. Focșeneanu.*
5. Note Matematice: 41 — 43.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 276.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1563, 3692, 3703, 4097, 4248, 4574, 4687, 4827, 4835, 4893, 4903.
11. Exerciții: 32 — 34.
12. Probleme propuse: 4951 — 4962.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1938

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stan**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1937 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4859, 71, 79, 88, 90, 94, 901, 04, 05, 09, 12, 13, 14, 15, 20, 22, 26, 27, 29, 32, 33, 37, 38, 41, 42, 44, 45, 46, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLIII. Nr. 9 *SUPLIMENT* MAI 1938

DARE DE SEAMĂ

Asupra Mesei Comune care a încheiat Concursul Societăţei „Gazeta Matematică", în seara zilei de 30 Aprilie 1938

Dela început trebue să mărturisesc, nimic nu mă îndreptăţea să bănui, pe când mergeam liniştit spre strada 11 Iunie, că ajuns la „Luzana", fostul meu Comandant dela Liceul Militar *«Mânăstirea Dealu»*, D-l CPT. COMANDOR GRIGORE ZAPAN, profitând de condescendenţa pe care o au faţă de D-sa foştii D-sale subalterni, are să mă desemneze pe mine, fără posibilitate de discuţie, să însemn pentru Istorie evenimentele mesei comune din anul acesta.

Totuşi privind bine relaţia ce lega între ele în ziua de **30** Aprilie cele două numere prime care fixau poziţia în spaţiu a restaurantului „Luzana" — **11** Iunie Nr. **41** —

$$11 + 30 = 41,$$

ceva trebuia să-mi dea de gândit.

Însă, nu cred că aceasta să fi inspirat pe colegul GH. TH. GHEORGHIU, ca în seara aceia să vină pregătit cu hârtie velină, gata de orice sacrificiu şi dispus pe grabnică filantropie.

Singura părere de rău este că n'am ştiut veni mai devreme, să surprind pe D-l GH. ILIESCU neobosit maestru al acestor ceremonii, luând ultime dispoziţiuni, sau să înregistrez cronologic apariţia celor ce vor rămâne, membrii şi corespondenţi, timp de 3 ore, într'o atmosferă specifică meselor comune ale *Gazetei Matematice*.

Se petrece în fiecare an un fenomen ciudat, un fenomen sufletesc de proporţii neobicinuite ca durată şi intensitate.

Timp de 3 zile — dintre cele mai frumoase ale vacanţei Paştelui — elevi din toate colţurile ţării se supun de bună voie unor emoţii cu mult superioare celor din orele de şcoală, aceasta de dragul unei verificări pentru care se luptă un an de zile să o poată obţine.

Însă, nu dorul ambiţios al unei întreceri deşarte îndeamnă tinerii concurenţi să-şi scurteze vacanţa cu 3 zile şi nici interesul cine ştie cărei răsplate materiale.

Este necesitatea spirituală de pătrundere în miezul *Gazetei Matematice*, este o forţă instinctiv îndreptată spre origina încă vie a „Gazetei", este o trăire condensată la câteva zile a celor 12 numere primite între două concursuri.

Este ceva asemănător copilului care își îndreaptă mâinile spre gâtul mamei sale, ceva asemănător păsărilor care își caută cuibul primelor avânturi.

Sorgintă de știință și caracter, *Gazeta Matematică* continuă modest și discret de 43 ani să alimenteze această educație a minții și a sufletului între corespondenții săi, adesea ingrați.

Insă, după ce încordarea celor 3 zile de muncă și emoție a trecut, după ce membrii *Gazetei Matematice* încetează de a mai fi spaimă și teroare, se cuvine o destindere: la cele 3 zile ale concursului urmează 3 ore ale banchetului.

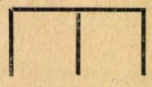
Atmosfera acestor 3 ore de camaraderească petrecere ar fi imposibil de redat fără a i se altera specificul care o face să nu mai poată dispare din sufletul celor ce au trăit-o odată.

Se îmbină în seara aceasta din muzică și vorbe frumoase un suflet colectiv uniform, din care fiecare participant pleacă înzestrat definitiv și pentru care lucrează un an cu dragoste multiplă.

Nimeni din cei cari au participat cândva la una din mesele comune ale *Gazetei Matematice* nu poate uita aceste manifestări de sublimă solidaritate.

Și cum cititorii acestei dări de seamă sunt foști sau viitori participanți ai acestor mese comune, îmi poate fi justificată teama de a nu reda real atmosfera caracteristică.

. . . Și astfel, în seara zilei de 30 Aprilie 1938, când ceasornicul din peretele sălii de banchete al restaurantului „*Luzana*" arăta orele 21.10, erau așezați în jurul unei mese având forma



D-nii: GENERAL ION S. DEMETRESCU, LT. COL. ALEXIU, LT. COL. PANĂ, M. BOTEZ, V. GRIGORCEA, LT. V. MERIU și D. ROMAȘCANU, invitați ai Soc. *Gazeta Matematică*.

D-nii: I. IONESCU și G. ȚIȚEICA, stâlpi ai *Gazetei Matematice*.

D-nii: E. ABASON, G-RAL GH. BUICLIU, I. BUȘILĂ, AL. BUNESCU, D. CAMBUREANU, V. CAMBUREANU, I. CHIȚULESCU, N. CIORĂNESCU, GH. I. DUMITRESCU, M. GEORGESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, GH. ILIESCU, G. A. IOACHIMESCU, H. IONESCU-BISS, LT. IONESCU-ȚIU, CPT.-CDOR LINTEȘ, GENERAL LITEANU, AL. PANTAZI, AL. A. ROȘU, SUB-LT. A. STAN, D. STOICA, H. TEODORU, I. VASILACHE, ING. VASILIU, GR. ZAMFIRESCU și CPT.-COMANDOR GR. ZAPAN, membri ai *Gazetei Matematice*.

D-ra GEORGETA ROMAȘCANU și D-nii: METEA VIRGIL, POSTELNICESCU MIRCEA, ALDEA VIRGIL, APOSTOL V. RADU, BUSNEA D., CIOC D., CONSTANTIN P., CORNĂȚEANU I. A., COSTESCU I., DUMITRESCU C., FLORESCU L. V., FLOREȘTEANU D. AL., GANEA M., IONESCU ST., JIPA AL., MINEA V. ALDEA, RĂDULESCU O., STOENESCU M., ȘTEFĂNESCU D. N., STREDER D. I., TĂTARU N. și TEODORESCU DORIN candidați la concursul anual.

Păstrându-se tradiția, stâlpii simetric așezați față de mijlocul barei transversale, spre centru, țineau parcă în echilibru forțele potențiale ale elevilor și membrilor tineri așezați spre extremități.

Lipsa D-lui A. G. IOACHIMESCU, unul din stâlpii *Gazetei* a făcut ca distanța dintre D-nii IONESCU și ȚIȚEICA să se modifice, pentru ca echilibrul să rămână același, dat fiind și așezarea D-lui GENERAL BUICLIU sosit mai târziu.

Se observă de câtăva vreme că acestui simbolic ⌈⌉ îi revine cinstea de a proiecta pe plan așezarea în spațiu a participanților meselor comune; astfel părând a se tranșa o veche rivalitate, ce ar fi existat între el și tradiționalul ⊓, mult întrebuințat în vremurile vechi, dovedindu-se că nu totdeauna π poate strânge în jurul său termeni matematici.

Dar multe s'au schimbat de atunci.

Fabrica de Chibrituri și Regia cu pitorețtile lor surprize au trecut în domeniul istoriei.

Taraful de lăutari Ionel Țăranu are pe Fănică Bambaci „diseur" și cântă circular „șlagăre" moderne.

Corespondenții Gazetei au îmbrăcat haine militare.

Pe nesimțite timpul contrazice ceasul rămas la 10 fără zece.

Buna dispoziție nu îngădue consultarea orologiilor.

Dar deodată treizeci de voci din piepturi aliniate militărește răsunară: „Sănătate"!

Pe fețele examinatorilor se citește o crispație de teamă.

Să fie restul candidaților ocupați încă la pregătirea oralului viitor și cari nu au avut „timp" să participe anul acesta la masa comună?

O fi oare pedeapsa sadică a răsbunării prin muzică?

Dar elevii liceelor militare n'ar putea face aceasta.

Acum mai puțin ca orișicând, căci dirijează D-l MARCEL BOTEZ, Inspector de muzică al Liceelor militare.

Pentru orice precauțiune D-l I. IONESCU se ridică.

Este ora 11, tradiția nu trebue să fie întreruptă;

însă anul acesta polinomul toasturilor începe cu termenul al doilea: D-l A. G. IOACHIMESCU fiind bolnav, D-l IONESCU începe:

„Ca cel mai bătrân dintre stâlpi, mie îmi revine datoria să vorbesc primul. D-L IOACHIMESCU *fiind suferind este oprit să participe.*

Cei ce citesc **Gazeta Matematică** *văd pe copertă anul 43. Încă din secolul trecut s'au pus bazele acestei reviste al cărui scop este propășirea științei și punerea unei baze învățământului nostru matematic. Acum scopul este atins. S'a recunoscut aceasta și de către Ministerul Instrucțiunii care a făcut abonamente adesea. Apoi la sărbătorirea celor 40 ani de existență, însuși* MAIESTATEA SA REGELE *a venit și a prezidat aniversarea, urând ca să trăiască* **Gazeta** *de 40 de ori câte 40 ani. Deci* **Gazeta Matematică** *poate fi considerată Instituție de Stat.*

De aceea gândul nostru trebue să se îndrepte către M. S. REGELE, *urându-I să trăiască împreună cu Augusta-I familie".*

După ce corul elevilor condus de D-l MARCEL BOTEZ a sfârșit de intonat Imnul Regal, ne vorbește D-l G. ȚIȚEICA:

« Eri împrejurarea a făcut să vizitez pe un prieten inginer, la o construcție mare, frumoasă, dar veche. Atât de veche încât se despica. Ei bine, așa sunt stâlpii **Gazetei Matematice.** *Cei trei stâlpi au început să se șubrezească. Eu sunt cel mai șubred dintre ei, însă tot am putut lua parte la această masă comună.* D-l IOACHIMESCU *însă nu a putut lua parte și astfel stâlpii sunt de data aceasta doi ».*

D-l ȚIȚEICA citește apoi următoarea scrisoare primită dela D-l A. G. IOACHIMESCU :

«Către toți cei cari au luat parte la concursul **Gazetei Matematice** *din anul 1938, ca examinatori, ca examinați sau numai ca asistenți, dela cei mai tineri până la cei ce nu mai sunt tineri.*

Din cauză de boală, neputând lua parte anul acesta la concursul anual al **Gazetei Matematice,** *nici la examen, nici la masa comună, să-mi fie îngăduit ca pe această cale, să urez tuturor multă sănătate, muncă cu spor, spre binele fiecăruia în parte, și spre binele general al țării, care are atâta nevoie de elemente harnice și pricepute.*

Să trăiți».

Reluând povestirea D-l ȚIȚEICA spune :

«Și privind clădirea despre care v'am vorbit, nu m'am oprit să-i spun inginerului teama mea. Însă acesta mi-a răspuns : « Nu am nicio grije. Alături am o casă nouă care o sprijină pe aceasta ». Tot astfel la **Gazeta Matematică** *alături de stâlpi se găsesc membrii tineri care îi asigură trăinicia și din cauza aceasta nu am nicio teamă ».* D-l ȚIȚEICA sfârșind, ridică un pahar pentru sănătatea D-lui A. G. IOACHIMESCU și în timp ce se ciocnesc pahare, multiplicându-se prin fiecare participant urarea de sănătate adresată D-lui IOACHIMESCU, corul condus de elevul STANCIU AUREL întonează : *« Pe al nostru steag e scris Unire ».*

Teama membrilor examinatori poate să dispară : vocea elevilor este invers proporțională cu calitatea lucrărilor scrise.

După o scurtă pauză ne vorbește D-l I. IONESCU.

«Concursul din anul acesta are un caracter militar. Numărul candidaților militari este mai mare decât cel al candidaților civili. Nu am urmărit concursul în întregime însă din câte am ascultat am găsit elemente admirabil pregătite în special la clasele superioare ; cele inferioare le-am găsit mai slab pregătite, mai ales clasa 5-a. Să sperăm însă că vor veni și acestea mai bine pregătite, dacă nu se va modifica programa analitică, dându-se o mai mare atenție științelor morale. Deși, nu numai morala moralizează cum a dovedit-o D-l ȚIȚEICA».

D-l I. IONESCU aducând mulțumiri Instituțiunilor Militare ce pregătesc pe elevi atât de bine, închină paharul în sănatatea D-lui GENERAL I. DEMETRESCU. Corul întonează *« mulți ani trăiască ».*

Imediat urmează replica D-lui GENERAL I. DEMETRESCU.

D-sa începe mărturisind că sărbătorește înrâurirea matematicei asupra militarilor. Vorbind de *Gazeta Matematică* D-sa spune: „Născută dintr'un avânt tineresc, crescută cu energii și privațiuni, *Gazeta Matematică* a devenit

o instituție de Stat". D-sa aduce omagii D-lor ION IONESCU, GHEORGHE ȚIȚEICA și A. IOACHIMESCU, stâlpii care au dus la apogeu *Gazeta Matematică*. D-sa le urează în numele instituției ce reprezintă o tărie de granit.

In sănătatea stâlpilor, cari au impregnat tuturor lucrărilor publice spiritul lor, D-l GENERAL I. DEMETRESCU închină paharul său.

Asistența în picioare urează sănătate stâlpilor.

In altă ordine de idei D-l GENERAL I. DEMETRESCU spune: „D-l COMANDOR ZAPAN îngrijorat că nu mai venea D-l BUNESCU — (casierul Societății, N. A.) — îmi făcea anumite semne pe care eu nu le înțelegeam, dar pe care caut să le interpretez acum" ... Astfel D-sa donează Soc. *Gazeta Matematică* suma de lei 10.000 din partea D-lui GENERAL ARGEȘEANU, ministru al Apărării Naționale, iar din partea Direcțiunei Liceelor Militare suma de lei 20.000.

Un ropot de aplauze subliniază ultimele cuvinte ale D-lui GENERAL DEMETRESCU, care continuă:

„Ne legăm ca ori care vor fi împrejurările Invățământului Secundar, să ne străduim ca în Liceele Militare, studiul matematicei să rămână cel de azi. In același timp făgăduim că la liceele militare vom îmbunătăți valorile morale. Precum la 1916 s'au ridicat inimile peste Carpați, tot astfel vom crește elevi pregătiți să apere granițele țării. Să fie România tare".

Corul anticipează rezultatul străduinței promise de D-l GENERAL DEMETRESCU, intonând *«Trei culori cunosc pe lume»*.

După atâtea probe de jertfă, corul care a privit până atunci din front, „M"-ul armonic divizat de fericiții lor colegi are permisiunea să se așeze la masă în fața paharelor cu apă.

Părerea lor de rău nu trebue să fie prea mare.

Și anul acesta, derivata doua a strugurilor a avut valoarea zero.

Pentru verificare se poate lesne constata că derivata întâia a avut o valoare constantă, nu prea mare.

Și mesenii multiplicați astfel continuă să se bucure de tangențiala lor apropiere cu stâlpii.

Se observă totuși o anumită timiditate la elevi, în majoritate militari.

D-l I. IONESCU remarcă: „Cum să nu fie timizi când se află în sală atâția generali!"

Intr'adevăr la cei 17 elevi de liceu militar, 3 Generali, 2 Cpt. Comandori, 2 Lt.-Coloneli, 2 Locotenenți și un Sublocotenent sunt o forță armată de temut.

Deodată un clinchet solicitator de liniște se aude.

D-l ȚIȚEICA începe mult așteptata cuvântare morală:

„In imperativul categoric al meselor comune este cuvântarea instituită de colegul IOACHIMESCU.

In fiecare dimineață, în fața casei mele trece un bătrân cu o flașnetă. Cu aceeași flașnetă veche, cântând o aceeași romanță răsuflată. Cam așa este și cuvântarea mea morală, cam așa este și vorbitorul. Totuși trebue să mă execut, căci mai este încă ceva.

In fiecare seară aceleași stele de mii și mii de ani se văd strălucind pe cer. Apoi primăvara florile și copacii înverzesc fără să ne fi pilctisit

vreodată de ei. Tot așa este și cuvântarea morală. Dar chiar dacă nu este așa, Dv. o veți primi-o orișicum. Am trecut prin Cișmigiu. E în floare și plin de verdeață. E admirabil".

D-l Profesor ȚIȚEICA invită corespondenții să treacă să verifice aceasta.

D-sa continuă apoi:

„*Candidații sunt ca florile. Dar este o deosebire. Pe când candidații au în ei ceva capricios, copacii n'au nimic capricios în ei. Seva merge uniform dela rădăcină până la floare. La candidați nu-i așa. S'au risipit valori care nu trebuiau să se risipească. Nouă ne trebue un element de încredere. Matematica este o disciplină spre care converge seva. Disciplina aceasta va fi sperăm și pentru Dv. o disciplină așa cum a fost și pentru noi. Matematica este puterea de viață a noastră. Matematica e nu numai o putere a minții ci și una a sufletului și în care trebue să avem încredere, căci o disciplină este un îndreptar sufletesc. Veți fi veșnic biruitori sprijiniți în matematică, oriunde veți avea acest îndreptar sufletesc.*

Și după cum v'ați supus acestei discipline acum la concurs, așa avem încredere că vă veți supune pe viitor matematicei".

D-l ȚIȚEICA terminând cuvântarea d-sale morală, corul acoperă aplauzele asistenței, intonând „*Gaudeamus igitur*".

Dar „*Gaudeamus igitur*" la mesele comune ale *Gazetei Matematice* se cântă de către toți, ingineri, ofițeri, profesori, câți au fost și ei la rândul lor elevi veniți la concursurile *Gazetei*.

Acum fiecare a uitat grija ocupațiilor de mâine. Toți formează un loc geometric: *locul geometric al punctelor egal dinamizate de stâlpi.*

Și indiferent de câtă parte din zi dedică fiecare matematicei, nimeni nu i-ar putea nega această disciplină sufletească comună ce o are.

Primul care vrea să dovedească aceasta este D-l GENERAL BUICLIU, care de puțină vreme a părăsit cariera militară.

D-l GENERAL BUICLIU răspunde cuvântării morale a D-lui PROFESOR ȚIȚEICA spunând că nu a fugit, ci a schimbat tabăra.

„Dela tabăra militară — acea splendidă *epură a României Mari* — am trecut în tabăra lui Vulcan — nu la Societatea Anonimă, — care face scule pentru apărat epura. Sculele costă foarte scump. Sunt însă soluții pentru a le ieftini. Una și cea mai bună este de a ști matematică. Căci este foarte prețios de știut de unde vine și unde trebue trimis proiectilul, care este foarte scump.

Franța în războiul mondial ducând lipsă de ofițeri, a luat ingineri care știți cât de sgârciți sunt — să ne scuze d-nii ingineri — și cu ajutorul acestora a făcut față situației".

Terminând, D-l GENERAL BUICLIU observă ceasul din perete rămas la ora 10 fără 10 și urează alegoric: „*Trăiască matematica până când se va mișca ceasul*".

Corul — bine „asezonat" după cum observă D-l PANTAZI gândindu-se probabil la menu-ul ingrat cu D-sa — intonează „*Cântați Gloria Țării*".

Pentru ca să nu dea de gândit rezolvarea orei exacte, pe un ceas ostentativ rămas cu limbile simetric așezate, elevul NEGUȚ NICULAE cântă din armonium bucăți alese.

Este o ocupație mult mai comodă decât cea efectuată de restul asistenței, căci menu-urile — aceste diplome sigure în miniatură care nu așteaptă decât autografe pentru a li se certifica autenticitatea — circulă cu viteze variate în ambele sensuri.

Pericolul întâlnirii nu-l simte decât punctul viu de intersecție, devenit punct multiplu, care rezolvă semnând resemnat.

Din răgazul consumării creionului d-sale roșu, D-l PROFESOR ȚIȚEICA se ridică :

„*La concursul* **Gazetei Matematice** *se prezintă foarte rar fete. Insă de 3 ani încoace aceeași d-șoară se prezintă. Nu anticipez asupra raportului, acesta depinzând de lucrările făcute, dar străduința d-sale merită a fi semnalată*".

D-sa închină pentru D-șoara GEORGETA ROMAȘCANU, vădit emoționată de cele auzite.

Urmează D-l CPT. COMANDOR GRIGORE ZAPAN, — cel mai recent membru delegat al societății.

„*In numele delegației aduc mulțumiri deosebite* **Direcțiunei Liceelor Militare,** *în special D-lui* GENERAL DEMETRESCU, *care an de an însămânțează acest simț al gustului de matematice, dând tot concursul liceelor militare și sprijin material* **Gazetei Matematice.**

Mulțumim de asemenea **Direcțiunei Generale a Căilor Ferate** *care și anul acesta, a acordat avantaje de transport elevilor.*

Mulțumim **Școalei politechnice** *din București care a pus la dispoziție sălile necesare ținerii concursului.*

Mulțumim D-lui THIERRIN *care a pus Institutul D-sale la dispoziție pentru găzduirea elevilor civili, care nu ar fi avut unde locui.*

Societatea **Gazeta Matematică** *aduce mulțumiri profesorilor dela licee în special dela Liceele Militare, pentru zelul depus în pregătirea elevilor.*

Aduce mulțumiri de asemenea deosebitei insistențe ce s'a depus la liceele de fete, pentru avântul ce-l ia acolo matematica".

D-l CPT. COMANDOR ZAPAN închină apoi pentru toți cei ce lipsesc dar așteaptă rezultatul și cărora le trimite mulțumiri, urându-le să trăiască.

D-l GENERAL BUICLIU denunțând pe D-l GH. ILIESCU spune că totul este organizat și pregătit de D-sa.

Din partea elevilor, fostul premiat al *Gazetei* din anul trecut — elevul N. D. ȘTEFĂNESCU, foarte emoționat se ridică și spune :

„Dârzenia cu care a fost condusă *Gazeta Matematică* până acum îi asigură un drum, nu în virtutea inerției, ci dat fiind impulsul inițial pe care ni l-a transmis nouă, datorită acestei veșnice forțe vii.

Gazeta Matematică ne-a învățat să fim ordonați și disciplinați. Cuvântarea D-lui PROFESOR ȚIȚEICA este sinteza unui curs pe care noi l-am învățat la *Gazeta Matematică* ».

D-sa încheind, asigură stâlpii *Gazetei Matematice* că vor fi veșnic conduși de învățămintele lor și nu le vor contraria așteptările.

Închină urând stâlpilor *Gazetei Matematice*, sănătate pentru a nu se mai simți șubrezi.

D-l GENERAL LITEANU ca ofiţer de Stat Major ia cuvântul vrând să evidenţeze şi legătura matematicei cu partea tehnică.

D-sa spune: „Matematica este suprema logică.

« Consider că cel mai mare act pentru un comandant de oştire este judecarea situaţiei. Sunt o serie de polisilogisme, care conduc la hotărîrea bună de luat. Marii comandanţi au arătat că s'au ocupat de matematice. Ca primul mititar activ dela **Gazeta Matematică** — *„toţi suntem activi la* **Gazeta Matematică**", *replică prompt D-l* GENERAL BUICLIU — *să închinăm în numele D-lui* GENERAL BUICLIU *ce a dat impuls de lucru militarilor la* **Gazeta Matematică**".

D-l ŢIŢEICA profitând de cele spuse de D-l GENERAL LITEANU observă următoarele:

« Teorema enunţată de D-l GENERAL LITEANU *are o reciprocă. Ceea ce a spus D-l* GENERAL LITEANU *despre D-l* GENERAL BUICLIU, *poate spune şi D-l* GENERAL BUICLIU *despre D-l* GENERAL LITEANU».

D-l ŢIŢEICA închină pentru D-l GENERAL LITEANU şi pentru toţi ofiţerii dela *Gazeta Matematică.*

Urarea făcută de D-l ŢIŢEICA naşte o controversă: D-l CPT. COMANDOR LINTEŞ — care este îmbrăcat civil — fiind solicitat de D-l CPT. COMANDOR ZAPAN să răspundă, trece acestuia cuvântul, motivând că nu are haine militare.

D-l CPT. COMANDOR ZAPAN anticipând asupra eventualei D-sale cuvântări spune că aceasta va avea de bună seamă o reciprocă şi în consecinţă să o enunţe D-l LINTEŞ.

D-l LINTEŞ modest mărturiseşte fără teamă — concursul a trecut — că nu e tare în reciproce.

D-l GENERAL BUICLIU *observă: «D-l* GENERAL LITEANU *a enunţat o teoremă. D-l* ŢIŢEICA *a găsit reciproca, iar cele spuse de D-nii* ZAPAN *şi* LINTEŞ *sunt corolariile teoremei».*

Buna dispoziţie domneşte constant la maximum absolut.

Corul continuă a intona cântece fericit alese.

D-l G-RAL BUICLIU anunţă un mare pericol: se va termina serbarea Şi pentrucă la reuşita ei în astăseară a contribuit şi D-l MARCEL BOTEZ închină pentru D-sa.

D-l PROFESOR ŢIŢEICA însă nu dă curs alarmismului. Se ridică şi spune:

«Tinerii corespondenţi ai **Gazetei** *cunosc numai pe cei în vârstă. Dar în afară de aceştia mai sunt la* **Gazeta Matematică** *o seamă de tineri matematicieni care fac fală matematicei. Închin un pahar pentru aceştia ».*

D-l N. CIORĂNESCU, deşi mărturiseşte că nu l-au vizat aluziile D-lui PROFESOR ŢIŢEICA, se ridică şi după ce se scuză printr'o anecdotă că vorbeşte imediat după cuvântarea D-lui ŢIŢEICA spune: „deşi aşezat pe o latură interioară a mesei rezervată celor ce nu sunt hărăziţi să vorbească — pentru aceştia fiind rezervate laturile exterioare — vorbesc ca o prelungire analitică a celor spuse de D-l ŢIŢEICA".

« S'a spus că matematicienii sunt morali. Dar D-l ŢIŢEICA *a dovedit că ei sunt şi galanţi.» Apoi mai departe: « două lucruri sunt calme fundamental: Cerul stelat şi imperativul categoric din suflet.*

„In viaţa de toate zilele se pleacă dela postulatul acesta: viaţa e haos şi amorf. Trebue să introducem un reper cu 3 axe: binele, adevărul şi frumosul, cu ajutorul cărora introducem ordine".

D-sa adresându-se tinerilor — deşi e tânăr (mărturia d-sale!) le spune: „studiaţi matematicile, chit că nu o să vă faceţi matematicieni".

Cuvântarea D-lui N. CIORĂNESCU, des întreruptă de către D-l GH. GHEORGHIU, care nu reuşise să rezolve o problemă practică enunţată de către D-l G. DUMITRESCU — a avut ca urmare o nouă avertizare a D-lui GENERAL BUICLIU: *«peste două secunde se sună stingerea»*.

Intr'adevăr sunt orele 24 şi ziua de 1 Mai începe să se întrezărească.

Feţele elevilor se întunecară. Cele 3 ore petrecute împreună cu membrii *Gazetei Matematice*, trecuseră prea repede.

Partea artistică atât de salvatoare altădată pentru grija despărţirii prea de vreme, anul acesta a întârziat să vină.

Faptul că la aceasta a contribuit şi reducerea provizorie a stâlpilor la doi a făcut ca părerea de rău a celor ce ne despărţim să fie împletită cu rugăciunea ca la anul să fim cu toţii împreună.

Impreună şi cu ceilalţi obicinuiţi membrii ai *Gazetei* a căror lipsă se simte azi: A. G. IOACHIMESCU, O. N. ŢINO, C. ORĂŞEANU, P. SERGESCU, A. IOANOVICI, A. D. STAN, C. IONESCU-BUJOR...

Lipsa D-lui C. IONESCU-BUJOR fiind simţită cu prisosinţă de către mine, care am fost nevoit să-l înlocuesc la facerea acestei dări de seamă pe D-sa, talentatul povestitor al meselor din trecut.

Astfel serbarea s'a sfârşit.

Totul a fost un vis frumos cu care corespondenţii vor rămâne să-şi împletească orele de matematici un an de zile, până când la anul aceeaşi emoţie, aceleaşi revederi, vor cimenta mai trainic dragostea de *Gazeta Matematică*.

Grupuri, grupuri, participanţii se îndreaptă spre casă.

Un grup de membrii, D-nii GH. DUMITRESCU, AL. PANTAZI şi GH. GHEORGHIU se îndreaptă spre o direcţie necunoscută, să încerce rezolvarea unei probleme de mult insolubilă.

Iar pentru ca nu cumva cronicarul acestor rânduri să fie tentat a continua într'o atmosferă mai puţin matematică purtarea manuscriselor ce i-au fost încredinţate, D-l CPT. COMANDOR ZAPAN îi oferă un loc în confortabilul D-sale Lincoln-Zephyr.

Şi astfel prezenta dare seamă a văzut lumina zilei.

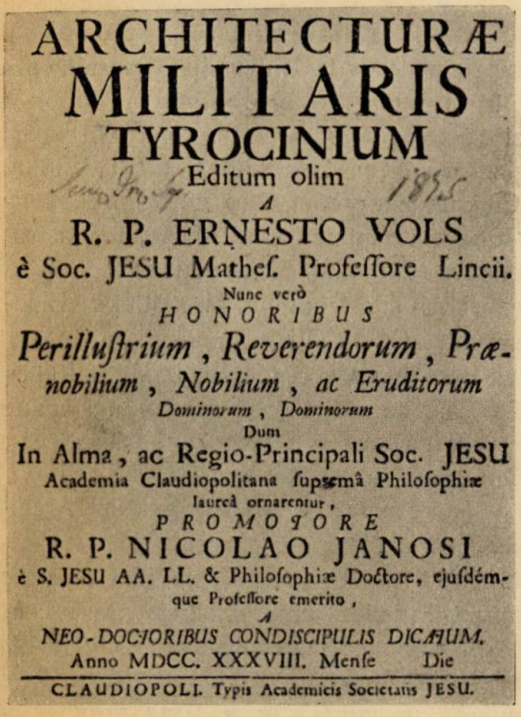
ALEXANDRU AL. ROŞU.

ARCHITECTURAE MILITARIS TYROCINIUM

A LUI

E. VOLS

Se împlinesc două veacuri de când a apărut la Cluj o carte cu titlul de mai sus. Titlul românesc corespunzător ar fi: „*Introducere în Architectura Militară*". Cartea e un manual universitar şi e scrisă în latineşte, după cum era obiceiul în acea epocă. Formatul cărţii e 4⁰, conţine IV + 34 pagini, 5 planşe cu 46 figuri şi e legată artistic în piele aurită.



ARCHITECTURÆ
MILITARIS
TYROCINIUM
Editum olim
A
R. P. ERNESTO VOLS
è Soc. JESU Matheſ. Profeſſore Lincii.
Nunc verò
HONORIBUS
Perilluſtrium, Reverendorum, Præ-nobilium, Nobilium, ac Eruditorum
Dominorum, Dominorum
Dum
In Alma, ac Regio-Principali Soc. JESU
Academia Claudiopolitana ſupremâ Philoſophiæ
laureâ ornarentur,
PROMOTORE
R. P. NICOLAO JANOSI
è S. JESU AA. LL. & Philoſophiæ Doctore, ejuſdémque Profeſſore emerito,
A
NEO-DOCTORIBUS CONDISCIPULIS DICATUM.
Anno MDCC. XXXVIII. Menſe Die
CLAUDIOPOLI. Typis Academicis Societatis JESU.

După cum se vede din foaia de titlu, reprodusă aci, ediţia din Cluj e o retipărire a unei cărţi cu acelaşi titlu a călugărului iezuit ERNEST VOLS. Despre acesta am aflat următoarele date biografice [1]): VOLS s'a născut în Radkerspurg (Stiria) la 27 Decemvrie 1650, sau, după STÖGER, la 1 Noemvrie 1651. A intrat în ordinul călugărilor iezuiţi la 9 Octomvrie 1667 şi a predat gramatica, umanităţile, retorica, timp de 20 de ani matematicele, apoi teologia morală în Graz, Linz şi în sfârşit Sf. Scriptură la Viena. El a contribuit mult la înfiinţarea cabinetului de matematici al Universităţii din Viena. A fost rectorul liceului academic din Linz. A murit în Viena la 22 Iulie 1720.

1) C. SOMMERVOGEL S. J.: *Bibliothéque de la Compagnie de Jésus.* Bruxelles-Paris. I. Partie. Bibliographie, Tome VIII. 1898, pag. 903.

In domeniul matematicei VOLS a publicat numai două cărţi:

1. *Architecturae Militaris Tyrocinium. Lincii.* Anul apariţiei nu e indicat pe carte, dar din foaia de titlu reiese că ea a fost tipărită în Linz la 1709.

2. *Institutionum Mathematicarum libri tres. Viennae Austriae.* Nici această carte nu poartă dată, dar în „*Acta Eruditorum*“ din 1716, în care se face o dare de seamă asupra cărţii, se dă ca an al apariţiei 1714. Această carte încă e un manual cu caracter universitar. Capitolul IX din întâiul volum al acestei cărţi poartă titlul «*De Architectura Militari*“ şi reproduce, — cu foarte mici modificări, — textul cărţii de mai sus.

* * *

Ediţia clujană a Architecturii Militare a lui VOLS se datoreşte călugărului IANOSI, pe atunci profesor la Universitatea iezuită din Clui, care cu un an mai înainte îngrijise şi o ediţie a Trigonometriei lui GOODEN (Vezi „*Gazeta Matematică*“, anul XLII, pag. 617). IANOSI era de origine săcuiu şi s'a născut la 1701. A intrat în ordinul iezuiţilor din Cluj, unde a predat timp de 5 ani filozofia şi geometria. Lui i se datoreşte înfiinţarea unui observator astronomic pe lângă Universitatea din Cluj, în conducerea căruia a avut de urmaş pe matematicianul şi astronomul MAXIMILIAN HELL. La 20 Februarie 1738 împăratul CAROL VI îl numeşte pe IANOSI ca „teolog“ al episcopului român unit din Blaj, I. MICU KLEIN. IANOSI a depăşit atribuţiile sale de sfătuitor al episcopului având din acest motiv conflicte dese cu acesta. Vedem deci că IANOSI a jucat şi un rol politic. El a murit la 19 Martie 1741.

In cele de mai jos voiu rezuma pe scurt cuprinsul Architecturii Militare a lui VOLS.

Ediţia clujană are o prefaţă, pe două pagini, datorită de sigur lui IANOSI, din care reproduc, în traducere, următoarele rânduri, ce caracterizează în mod plastic utilitatea matematicelor: „*Odinioară* ARISTIPPUS, *după cum ne istoriseşte* VITRUVIUS *în cartea a VI-a a Architecturii sale, a suferit un naufragiu şi fiind aruncat pe ţărmul insulei Rhodos a scăpat cu viaţă. Aici aruncându-şi privirea înţeleaptă împrejur observă că nisipul e răscolit cu compasul şi conţine semne matematice. Bucurându-se foarte mult, se adresă tovarăşilor săi şi zise: Să sperăm la cele mai bune, căci şi aici se află semne omeneşti*“.

Cartea se împarte în şase capitole. Primul e un *capitol* introductiv şi conţine elementele de geometrie necesare înţelegerii chestiunilor de architectură militară, care formează obiectul propriu zis al cărţii. Se tratează în acest capitol următoarele chestiuni: Construcţia unei perpendiculare la o dreaptă dată. Injumătăţirea unui segment de dreaptă, a unui arc sau a unui unghiu. Ducerea unei paralele la o dreaptă. Construcţia unui paralelogram. Impărţirea unei drepte în mai multe părţi. Impărţirea unui cadran în grade. Construcţia unui raportor şi a unui unghiu de un anumit număr de grade. Măsurarea unui unghiu. Construcţia triunghiurilor asemenea şi a unei scări geometrice. Determinarea centrului alor trei puncte cari nu zac pe aceeaşi dreaptă.

Capitolul al doilea poartă titlul: *Elementa Architectonica.* Se tratează probleme în legătură cu poligoanele regulate şi anume: Determinarea unghiurilor poligoanelor. Construcţia unui poligon oarecare şi a unui poligon de o latură dată. Construcţia unui patrat, a unui pentagon, heptagon, octogon, enneagon şi decagon de latură dată. Aflarea laturilor poligoanelor înscrise unui cerc dat.

Reproduc, ca exemplu, construcţia unui heptagon pe o latură dată AB. Amintesc aici că autorul ştie că această construcţie, cu ajutorul riglei şi compasului, e imposibilă astfel că soluţia indicată de el este numai aproximativă. Procedeul indicat de VOLS e următorul: „*Vom prelungi* AB *până în* C *în aşa fel ca* AB = BC. *In* B *se va duce perpendiculara* BD. *Din* A *şi* C, *cu distanţa* AC *se vor descrie arcele ce se întretaie în* D. *Cu aceeaşi deschidere de compas se vor descrie din* C *şi* D *arcele care se întretaie în* E. *Se va duce* EA *care taie perpendiculara* BD *în* F. *Cu distanţa* AF *vom descrie din* A *şi* B *arcele ce se vor întretăia în* G, *centrul cercului, în care se poate înscrie de 7 ori latura dată* AB". Această construcţie ne dă pentru latura heptagonului regulat, înscris cercului de rază R, valoarea aproximativă

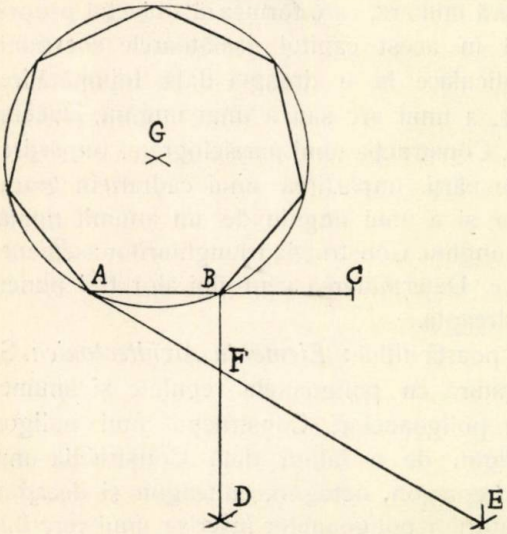
$$L = \frac{1}{2} R \sqrt{3} \sim 0{,}866\ R,$$

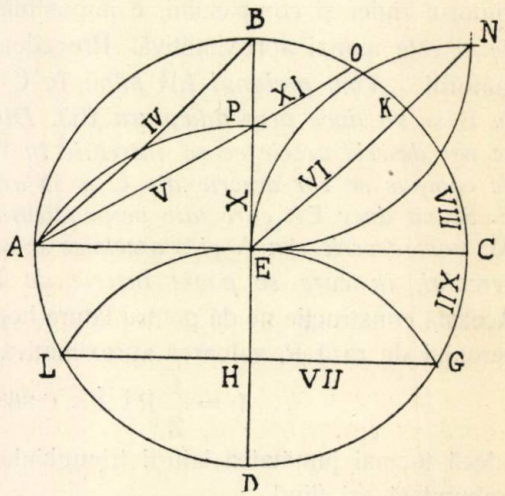
adecă tocmai jumătatea laturii triunghiului echilateral. Valoarea întrebuinţată azi fiind

$$L = 2\,R \sin \frac{180^0}{7} \sim 0{,}862\ R,$$

se vede că aproximaţia construcţiei folosită de VOLS e foarte bună.

E interesantă de asemenea şi ultima problemă a acestui capitol: Aflarea laturilor poligoanelor înscrise într'un cerc dat ABCD. Soluţia acestei probleme e un rezumat al construcţiilor singuraticelor poligoane şi ne înfăţişează în chip intuitiv raportul laturilor poligoanelor înscrise într'un acelaşi cerc, printr'un procedeu asemănător reprezentării arcelor trigonometrice. Procedeul lui VOLS e următorul: „*Vom împărţi cercul cu ajutorul alor doi diametri în patru părţi egale. Cu lungimea razei se va descrie din* D *arcul* LEG. *Se vor uni punctele* L *şi* G *prin dreapta* LHG, *care reprezintă latura triunghiului înscris. Jumătatea* HG *a aceleia e latura heptagonului, iar* GC *a decagonului. Tot cu raza cercului vom descrie din* B *şi* C *arcele care se întretaie în centrul* E *şi în* N. *Să ducem dreapta* EN; *segmentul* EK *va fi latura hexagonului, iar coarda* CK *a octogonului. Din* H *vom descrie cu distanţa* HA *arcul ce întretaie raza* EB *în* P. *Să ducem dreapta* APO; *segmentul* AP *va fi latura pentagonului,* PO *a undecagonului,* EP *a decagonului, iar* PB *luat de 16 ori formează un poligon înscris. In sfârşit coarda* AB *a cadranului va fi latura tetragonului sau a patratului*".





(Va urma).

VICTOR MARIAN.

ARITMETICA LUI GHEORGHE ASACHI

(Urmare dela pag. 398)

Prin capitolul care urmează: *„De regula de tri“* revenim la Aritmetică. Avem definiția: (§ 141): *„Prin Regula de tri se înțelege o regulă prin care date fiind trii numere, se caută un al patrulea carile să fie în proporție cu acele date“*. Și mai departe: *„Regula de trii se numește* **simplă,** *când expresia cererii cuprinde numai patru câtimi, din care trii sânt cunoscute“*. § 143: *„Regula de trii se numește* **compusă,** *când termenii proporții către care atârnă câtimea căutată se compun de mai multe câtimi care se cuvine mainainte a calcului (socoti) chiar după starea cererii“*. § 144: *„O regulă de trii este* **directă,** *când după starea cererii, câtimea care are a se găsi se cuvine a fi cu atâta mai mare sau cu atâta mai mică cu cât acea, cu care imediat ea este legată, ce se numește a ei relativă, este ea însăși mai mare sau mai mică“*. § 145: *„O Regulă de trii se numește* **inversă,** *când după expresia cererii, câtimea care se caută are să fie cu atâta mai mică cu cât a ei relativă este mai mare, sau cu atâta mai mare cu cât a ei relativă este mai mică“*. § 146: *„Știut este că în o regulă de trii intră patru câtimi. Din acestea patru, două sânt de un feliu, și alte două iarăși de un feliu, dar deosebite de acel întâiu; și pentru de a așeza după cuviință acele termine, se cuvine a scrie: Acel mai mare al feliului întâi este la acel mai mic de tot acel feliu precum acel mai mare de feliul al doile este la acel mai mic de tot acel feliu. Sau, acel mai mic al feliului întâi este la acel mai mare a tot acelui feliu cum acel mai mic de felul al doile este la cel mai mare a acelui feliu“*.

Am reprodus în întregime aceste definiții pentru a arăta întru cât expunerea lui ASACHI diferă de cea de astăzi; unele definițiuni par, într'adevăr, destul de încurcate și se înțeleg cu greu.

Urmează apoi exemplele: *Problema întâi: „60 coți de o stofă au costat 660 lei, cât vor costa 25 coți?*

Dispoziție:	60 coți,	660 lei
	25 —	*x (terminul neștiut).*

Vederat este că 25 coți vor costisi mai puțin de cât 60, deci x trebui să fie mai mic de cât 660. Deci proporția va fi:

x, acel mai mic al feliului întâi, este la 660, acel mai mare a tot acelui feliu, cum 25, acel mai mic de feliul al doile, este la 60, acel mai mare de tot acel feliu: x:660::25:60". Se găseşte *x* după cum s'a arătat la proporţii, şi se scrie:

$$x = \frac{660 \times 25}{60}, \quad \text{sau } x = \frac{66 \times 25}{6}, \quad \text{sau } x = 11 \times 25 = 275 \text{ lei.}$$

Se face şi: *„Pruba" : „60 coţi au costisit 660 lei, câţi coţi vom cumpăra cu 275 lei? Dispoziţie:*

660 *lei,* 60 *coţi*
275 — *x.*

Vederat este că cu 275 lei vom cumpăra mai puţină stofă decât ca 660 lei. Deci x trebui să fie mai mic decât 60. Vom avea deci proporţia aceasta: x:60::275:660". Se găseşte: $x=25$.

„Deci cu 275 lei vom cumpăra 25 coţi. Asemine s'ar putea căuta celelalte două termine; dar aceasta se face nefolositoriu fiind că prin aceasta din urmă se vede că regula trecută au fost adevărată".

Problema II: „Un curier au făcut o cale de 100 mile în 25 ceasuri; cât drum va face în 8 ceasuri?" Judecata problemei, *„dispoziţia"* şi *„pruba"* se fac întocmai ca în problema întâi: deci nu le voiu reproduce aici.

Problema III: „O moşie a căria cumpărătură este de 160,000 lei, se dă în posesie pe an, câte 10,200 lei; se cere a şti cât p. %₀ (proţent sau dobândă) aduce pe an?".

Aici *„dispoziţia"* este:

160,000 *lei capital,* 10,200 *lei proţent.*
100 — *x.*

Se face o judecată analogă cu cele din problemele precedente şi se găseşte $x = \frac{10{,}200 \times 100}{160{,}000}$, sau $x = \frac{102}{16}$, sau $x = \frac{51}{8}$.

„Extraguind pe întregii cuprinşi în această expresie fracţionară, vom avea $6\frac{3}{8}$ *p. %₀*". *„Pruba"* se face ca în problemele I şi II. La sfârşitul acestui paragraf se propun 2 *„probleme de dizlegat" :* 1°) *„Un neguţitori au cumpărat cafe de 24,000 lei, se întreabă a şti cu cât trebui să o vândă pentru ca să câştige 15 p. %₀"? „Urmând precum sus se vede se arată: cum că ar*

trebui să vândă această cafe cu 27,600 lei pentru de a câştiga 15 p. %. Adecă el va câştiga 3600 lei".

2°) „*O oaste de 12,000 soldaţi închisă în o cetate are proviant pe 6 luni (sau 180 zile); către acest garnizon se adaug încă 3000 soldaţi, se întreabă pe câte zile le va ajunge proviantul? Li va ajunge pe 144 zile*".

Capitolul „*De regula de trii compusă*" ocupă, ca şi cel de mai sus, vreo zece pagini (§ 147). „*Regule de trii compuse sânt acele în care intră mai multe de cât patru termine. Acest feliu de regule se dizleagă reducându-le la Regula de trii simple*".

Problema I. „*240 lucrători în 90 de zile au făcut, lucrând câte 8 ceasuri pe zi, un canal de 360 palme lungime. Se cere a şti 300 lucrători câte zile vor întrebuinţa, lucrând câte 12 ceasuri pe zi, pentru de a face un canal de 640 palme?*

„*Dispoziţia:* 240 *lucrători,* 90 *zile,* 8 *ceasuri,* 360 *palme*
300 — *x* — 12 — 640 —

„*Făcând dintâi abstracţie de ceasuri şi de lucru, cererea se va reduce la aceasta: 240 lucrători au întrebuinţat 90 de zilę de a face oare care lucru; 300 de lucrători câte zile vor întrebuinţa pentru de a face tot acel lucru?*

Se rezolvă această problemă cu ajutorul Regulii de trei simplă şi se găseşte: 72 zile. „*Acum luând aminte şi la ceasurile vom zice: lucrând 8 ceasuri, trebuiesc 72 zile; câte zile vor trebui lucrând câte 12 ceasuri? Dispoziţia:*

8 *ceasuri,* 72 *zile*
12 — *x zile.*

x trebui să fie mai mic decât 72, căci, lucrând mai multe ceasuri pe zi, vederat este că vor întrebuinţa mai puţin timp. x, acel mai mic de feliul întâiu, este la 72, acel mai mare de tot acel feliu, cum 8, acel mai mic de feliul al doile, este la 12, acel mai mare de tot acel feliu, $x : 72 :: 8 : 12$. *Se găseşte:* $x = 48$ *zile*". „*Apoi luând aminte şi la lucru, vom avea această depe urmă cerere: Pentru de a face 360 palme, trebuesc 48 zile; câte zile vor trebui pentru de a face 640 palme?*". Se rezolvă şi această ultimă problemă parţială; găsim $x = \frac{256}{3}$. „*Extrăgând pe întregii cuprinşi în această espresie fracţională, avem* $x = 85$

zile ⅓ sau 8 ceasuri". „*Pruba problemei trecute*" se face rezolvând problema următoare: „*300 lucrători întrebuinţează 85⅓ zile lucrând 12 ceasuri pe zi, pentru de a face un canal de 640 palme; 240 lucrători câte zile vor întrebuinţa, lucrând câte 8 ceasuri pe zi pentru de a săpa un canal de 360 pe palme? „Dispoziţia*" problemei date, judecata, „*dispoziţiile problemelor parţiale* şi rezolvarea lor se fac întocmai ca mai sus, încât nu este nevoie să citez ceva din această „*prubă*".

„*De Regula de companie sau de soţietate*" ocupă numai patru pagini (§ 148). „*Regula de companie este spre a împărţi un număr în porţii sau părţi proporţionale cu numere date. Ea se întrebuinţează la negoţiu spre a împărţi câştigurile unei companii, în proporţia somei pe care au pus-o fieşcarile companion Exemplu: Trii companioni au făcut oare care operaţie de comerţu în care au câştigatu 60,000 lei. Acel întâi companion au pus la mijloc... 90,000. Al doile... 60,000... Al triile... 40,000. Se cere a şti câştigul a fieşcăruia dintre aceşti companioni. Vederat este că fieşcare va avea cu atâta mai mult câştig cu cât va fi pus la mijloc mai mare somă. Deci câştigul de 60,000 lei trebui să se împarţă în porţii proporţionale cu punerea fieşcăruia. Noi vom aduna dintâi partnicile puneri pentru a cunoaşte punerea gheneralâ:*

90,000 *lei*
60,000
40,000
190,000 *punerea gheneralâ*".

Deci vom avea următoarea proporţie:

„*190,000 gheneralnica punere, este la 60,000 câştigul gheneral, cum 90,000 punere particulară acelui întâi companion, este la x câştigul particular a tot acelui companion.*

I-a Regula de trii: 190,000 : 60,000 : : 90,000 : *x*.

$$x = \frac{90{,}000 \times 60{,}000}{190{,}000} = \frac{90{,}000 \times 6}{19} = \frac{540{,}000}{19}.$$"

„*Se găseşte* $x = 28421\frac{1}{19}$ lei".

„*Tot acea marşă se va urma pentru de a face proporţia acelorlalţi companioni, schimbând numai soma punerii particulare*".

Continuând la fel, găsim $18947\ \frac{7}{19}$ lei, *„câştigul acelui al doile“* şi $12631\ \frac{11}{19}$ lei, *„câştigul acelui al 3“*. Iar la urmă: *„Pentru că adăogând câştigul fieşcăruia dintre dânşii, găsim obştescul câştigu 60,000 lei, vederat este că operaţia s'au făcut bine“*.

(Va urma). P. Z. CAZANACLI.

CONVERGENŢA SERIILOR CU TERMENII POZITIVI

Fiind dată o serie cu termenii pozitivi

$$(u) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

se ştie că dacă teorema raportului ne dă $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$, atunci se întrebuinţează criteriul lui RAABE-DUHAMEL, adică se caută limita

$$\lambda = \lim_{n=\infty} n\alpha_n = \lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right).$$

Dacă $\lambda > 1$, seria este convergentă, iar dacă $\lambda < 1$ seria este divergentă, având îndoială pentru $\lambda = 1$. Se arată că dacă λ există, aceeaşi limită o va da şi *criteriul logaritmic* al lui CAUCHY, adică vom avea şi

$$\lambda = \lim \frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}.$$

Ce se întâmplă însă în cazul când prin criteriul lui RAABE-DUHAMEL se obţin mai multe limite, depinzând de forma rangului termenului general faţă de un divizor fix, egal cu numărul limitelor obţinute?

Voiu arăta că, în acest caz, criteriul logaritmic dă o limită unică, egală cu media aritmetică a limitelor obţinute prin aplicarea criteriului lui RAABE-DUHAMEL. Voiu mai arăta că aceeaşi limită se obţine şi pe altă cale, de unde voi deduce o condiţiune necesară şi suficientă pentru convergenţa unor astfel de serii.

1. Fie, în general, λ_1, λ_2, ... λ_p limitele obţinute prin aplicarea criteriului lui RAABE-DUHAMEL, date de

$$\lambda_i = \lim_{n=\infty} (pn+i)\,\alpha_{pn+i} = \lim (pn+i)\left(\frac{u_{pn+i}}{u_{pn+i+1}} - 1\right),$$

unde $i = 0, 1, 2, \ldots p-1$. Să punem

$$U_n = \log \frac{1}{u_{np+i}} \quad , \quad V_n = \log (np+i).$$

Vom avea, aplicând criteriul logaritmic împreună cu teorema lui CÉSARO [1]), i şi p fiind fixe

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \dfrac{1}{u_{np+i}}}{\log (np+i)} = \lim \frac{U_n}{V_n} = \lim \frac{U_{n+1} - U_n}{V_{n+1} - V_n} = \lim \frac{\log \dfrac{u_{np+i}}{u_{(n+1)p+i}}}{\log\left(1 + \dfrac{p}{np+i}\right)}$$

$$= \lim \frac{\log \dfrac{u_{np+i}}{u_{np+i+1}} + \log \dfrac{u_{np+i+1}}{u_{np+i+2}} + \ldots + \log \dfrac{u_{(n+1)p+i-1}}{u_{(n+1)p+i}}}{\log\left(1 + \dfrac{p}{np+i}\right)}.$$

Insă, din

$$k = \lim_{m=\infty} m\left(\frac{u_m}{u_{m+1}} - 1\right)$$

se deduce uşor (loc. cit. p. 170)

$$\lim \frac{\log \dfrac{u_m}{u_{m+1}}}{\log\left(1 + \dfrac{1}{m}\right)} = k.$$

Vom avea deci

$$\lim \frac{\log \dfrac{u_{np+i+j}}{u_{np+i+j+1}}}{\log\left(1 + \dfrac{p}{np+i}\right)} = \frac{\lambda_{i+j}}{p} \quad , \quad \lambda_{p+r} = \lambda_r \ ,$$

1) A se vedea de ex. *Cursul* meu, pag. 145, Ex. 20 şi 21.

astfel că

$$\lim \frac{\log \frac{1}{u_{np+i}}}{\log (np+i)} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p}{p} .$$

Putem deci enunța următorul rezultat:

Dacă prin criteriul lui RAABE-DUHAMEL *se obțin* p *limite* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$, *depinzând de forma rangului termenului general față de divizorul* p, *atunci criteriul logaritmic va da o singură limită, egală cu media aritmetică a celor* p *limite de mai sus, adică*

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p}{p} .$$

Cu alte cuvinte,

In condițiunile de mai sus, seria propusă este convergentă dacă $\lambda > 1$ *și divergentă în cazul contrar, având îndoială pentru* $\lambda = 1$.

2. Condițiunea de convergență de mai sus o putem obține și pe altă cale. Anume, să desfacem seria dată într'o sumă de p serii, în care indicii termenilor consecutivi să difere cu p unități. Fie

$$(u_i) \qquad u_i + u_{p+i} + u_{2p+i} + \ldots + u_{np+i} + \ldots$$

una din aceste serii ($0 \leqslant i < p$). Aplicându-i criteriul lui RAABE-DUHAMEL, vom avea de căutat limita

$$\lambda = \lim n\alpha_n = \lim n \left(\frac{u_{np+i}}{u_{(n+1)p+i}} - 1 \right) .$$

Identitatea

$$V_1 V_2 \ldots V_p - 1 = (V_1 - 1)(V_2 - 1) \ldots (V_p - 1) + \Sigma_{p-1} + \Sigma_{p-2} + \ldots + \Sigma (V_i - 1),$$

unde Σ_k reprezintă suma produselor cantităților $(V_i - 1)$, luate câte k, precum și observația că putem scrie

$$\frac{u_{np+i}}{u_{(n+1)p+i}} = \frac{u_{np+i}}{u_{np+i+1}} \cdot \frac{u_{np+i+1}}{u_{np+i+2}} \ldots \frac{u_{(n+1)p+i-1}}{u_{(n+1)p+i}},$$

unde fiecare din fracțiile din membrul al doilea are ca limită unitatea, permit a scrie

$$\lambda = \lim n \left[\left(\frac{u_{np+i}}{u_{np+i+1}} - 1 \right) + \left(\frac{u_{np+i+1}}{u_{np+i+2}} - 1 \right) + \ldots + \left(\frac{u_{(n+1)p+i-1}}{u_{(n+1)p+i}} - 1 \right) \right] = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p}{p},$$

adică acelaş rezultat ca în cazul precedent. Limita aceasta fiind independentă de i, urmează că seriile (u_i), deci şi suma lor, adică seria (u), sunt convergente sau divergente în acelaşi timp. Cum şi invers, dacă (u) este convergentă, rezultă că şi seriile (u_i) sunt în mod necesar convergente, căci au termenii pozitivi, putem spune:

Condiţia necesară şi suficientă ca o serie cu termenii pozitivi — în care criteriul lui RAABE-DUHAMEL *dă* p *limite, depinzând de forma rangului termenului general faţă de divizorul* p — *să fie convergentă, este ca seria obţinută luând termenii seriei date din* p *în* p, *începând dela orice termen, să fie convergentă.*

M. GHERMĂNESCU.

Notă. Aceste cercetări mi-au fost sugerate de problema 2945, propusă de D-l Prof. TH. ANGHELUŢĂ. D-sa obţine, pe un exemplu particular, acelaş rezultat ca cel de mai sus. Metoda de investigaţie însă, întrebuinţată de D-l TH. ANGHELUŢĂ, este cu totul diferită de cele de mai sus.

M. G.

O REŢEA DE CONICE

D-l G-L GH. BUICLIU tratează în problema 3649 [1]) următoarea chestiune:

Care este înfăşurătoarea tangentelor la un cerc, ce trece prin 2 puncte fixe, în punctele de intersecţie cu o dreaptă dată.

Vreau să fac câteva observaţiuni asupra acestei probleme şi să o generalizez.

Pentru aceea e necesar să dau câteva definiţii.

1°. Dacă se consideră trei conice Γ_1, Γ_2, Γ_3 de ecuaţii omogene punctuale:

$$(\Gamma_i) \quad f_i(x, y, z) = 0. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Ecuaţia

$$(1) \qquad \lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2 + \lambda_3\Gamma_3 = 0$$

reprezintă *o reţea punctuală de conice,* cu condiţia ca $\lambda_{1,2,3}$ *să nu fie nuli* simultan.

1) A se vedea soluţiunea din *G. M.* Vol. XXXVIII. pag. 265—267.

Printre conicele (1), care în general depind de 2 parametri $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ şi $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$, se găsesc o serie de conice, care se reduc fie la *două drepte distincte,* fie la *două drepte confundate.*

Ecuaţiile acestor drepte se obţin din relaţiile:

$$\lambda_1 \Gamma_1 + \lambda_2 \Gamma_2 + \lambda_3 \Gamma_3 \equiv \alpha \, D \, D' \qquad (D \, D' = 0) \tag{2}$$

$$\lambda_1 \Gamma_1 + \lambda_2 \Gamma_2 + \lambda_3 \Gamma_3 \equiv \alpha \, D^2. \tag{3}$$

— In general *dreptele definite de ecuaţia (3), înfăşoară o curbă de clasa 3-a* Σ', care se numeşte *Cayleyana* reţelei punctuale (1).

— In adevăr dreptele definite de ecuaţia (3), depind de *un singur parametru* $\mu = \varphi\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)$ şi eliminând acest parametru între $D = 0$ şi $\frac{dD}{d\mu} = 0$ se găseşte *ecuaţia Cayleyenei.*

— De asemenea conicele definite de ecuaţia (2), se descompun *în două drepte distincte,* care au *un punct dublu,* intersecţia celor două drepte.

Locul acestor puncte duble este în general o curbă tot de clasa 3-a, Σ, numită *hessiana,* reţelei (1).

Dreptele definite de relaţia (2), depind de un parametru, care eliminat între $D = 0$ şi $D' = 0$, ne dă *ecuaţia hessianei.*

Notă. Ecuaţiile acestor curbe sunt:

Hessiana $H = | C'_{1x}, C'_{1y}, C'_{1z} | = 0$

unde $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ sunt conicele de bază şi C'_i derivatele ecuaţiilor lor.

Cayleyana $C = | \Gamma'_{1x}, \Gamma'_{1y}, \Gamma'_{1z} | = 0$

unde $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$ sunt ecuaţiile tangenţiale ale conicelor de *ecuaţii punctuale* $C_i = 0$ şi $\Gamma'_i = 0$ analog.

2°. Aceste 2 curbe în legătură cu reţelele de conice, mai au şi alte definiţii (CH. MICHEL. *Compléments de Géométrie*).

— *Hesiana* este *locul punctelor* M, *ale căror polare faţă de conicele reţelei date, sunt concurente* într'un punct M', care este *conjugatul lui* M.

— *Cayleyana* este *înfăşurătoarea dreptei* MM'.

3°. Să presupunem că *reţeaua de conice,* are drept conici de bază, două conici $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ şi una care se reduce la *două drepte confundate* de ecuaţia $D^2 = 0$.

Ecuaţia reţelei va fi:

$$C_1 + \lambda C_2 + \mu D^2 = 0. \tag{4}$$

Hesiana ei va fi

$$(H) = \begin{vmatrix} C'_{1x} & C'_{1y} & C'_{1z} \\ C'_{2x} & C'_{2y} & C'_{2z} \\ 2DD'_x & 2DD'_y & 2DD'_z \end{vmatrix} = 2D \begin{vmatrix} C'_{1x} & C'_{1y} & C'_{1z} \\ C'_{2x} & C'_{2y} & C'_{2z} \\ D'_x & D'_y & D'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Şi se reduce deci la dreapta $\boxed{D = 0}$ şi conica

$$(\sigma) = \begin{vmatrix} C'_{1x} & C'_{1y} & C'_{1z} \\ C'_{2x} & C'_{2y} & C'_{2z} \\ D'_x & D'_y & D'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Care se vede că este *locul polului dreptei* D, *faţă de conicele relaţiei.* (CH. MICHEL, *Complements de Géométrie* 113).

Se observă că conica (σ) este deasemenea, *locul polului dreptei* D *faţă de conicele fascicolului conicelor* (C_1, C_2).

4°. Să găsim conicele reţelei (4), care se descompun în 2 drepte distincte. Acestea vor avea ecuaţia de forma:

$$\alpha \times \Delta \times \Delta' = C_1 + \lambda C_2 + \mu D^2 = 0 \tag{5}$$

sau

$$C_1 + \lambda C_2 + (\mu + \mu_1) D^2 = 0.$$

Care ecuaţie se scrie

$$\underbrace{C_1 + \lambda C_2 + \mu D^2}_{R} + \mu_1 D^2 = 0. \tag{6}$$

Şi reprezintă tocmai *ecuaţia tangentelor la o conică a reţelei (4) în punctele de intersecţie ca dreapta* D.

Ori, prin definiţie aceste Conice descompuse *înfăşoară Cayleyana* reţelei (4). Se poate spune deci că *tangentele în punctele de intersecţie ale unei conice a reţelei (4), cu dreapta* D, *înfăşoară Cayleyana, reţelei.*

Din ecuaţia (5) se vede că şi *tangentele la conicele fasciculului* (C_1, C_2), *în punctele de intersecţie cu dreapta* D, *înfăşoară Cayleyana reţelei determinate de* C_1, C_2 *şi* D.

5°. Ultima proprietate enunţată, generalizează tocmai chestiunea din problema D-lui G-L GH. BUICLIU, care se poate pune sub forma:

Cercurile unui fascicol punctual, taie o dreaptă fixă în două puncte. Tangentele în aceste puncte, la cercurile fascicolului, înfăşoară **Cayleyana** *reţelei de conice formate de fascicol şi dreapta dublă, dată.*

Analog *generalizarea* se enunţă:

Tangentele în punctele de intersecţie ale unui fascicol punctual cu o dreaptă dată, înfăşoară **Cayleyana** *reţelei de conice determinată de fascicol şi dreapta dublă dată.*

6°. *Despre Cayleyană.* a) *In cazul general,* are *dreapta* D, *tangentă dublă,* pentrucă $D^2 = 0$ reprezintă conica reţelei (4), degenerată în *2 drepte confundate.* Ele *sunt conjugate* şi coincid. (CH. MICHEL 113).

In acest caz Cayleyana e de grad 6 *şi* de *clasa 3-a.*

Tot în cazul general, Cayleyana are *6 contacte cu Lesiana* (6), distincte.

In adevăr o tangentă în Ω la *Cayleyană* taie dreapta D şi conica (6) în 3 puncte A, $M_1 M_2$, care împreună cu Ω formează o diviziune armonică:

$$\frac{\overline{\Omega A}}{\overline{\Omega M_1}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MM_1}}$$

şi când $M \to M_1$, $\Omega \to M_1 \to M$. Deci există puncte în care *Cayleyana* e tangentă conicei (6).

b) *In cazul particular al fascicolului de cercuri.*

Ecuaţiile punctuale ale conicelor ce formează reţeaua sunt:

$$(C_1) \quad x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 = 0$$

$$(C_2) \quad yz = 0$$

$$(C_3) \equiv (D)^2 (ax + by + cz)^2 = 0$$

dacă luăm ca axe de coordonate, *axul radical al fascicolului* şi *linia centrelor.* Ecuaţia reţelei se scrie

$$(7) \quad \boxed{x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 - 2\lambda yz + \mu (ax + by + cz)^2 = 0} \ .$$

Ecuaţia punctuală a *hesianei* este

$$(H)\equiv\begin{vmatrix} 2x & 2y & -2\alpha^2 z \\ 0 & z & y \\ 2aD & 2bD & 2cD \end{vmatrix} = 4(ax+by+cz)(ay^2-bxy+cxz-a\alpha^2 z^2)=0$$

adică dreapta (D) şi hiperbola $ay^2 - bxy + cxz - a\alpha^2 z^2 = 0$. Care are *o asimptotă perpendiculară pe dreapta* D şi *alta perpendiculară pe axul radical al fascicolului.*

Am regăsit:

Polul unei drepte fixe faţă de un fascicol punctual de cercuri descrie o hiperbolă, cu asimptotele perpendiculare pe dreaptă şi axul fascicolului.

Ecuaţia în coordonate tangenţiale a *cayleanei* este:

$$(C)\equiv\begin{vmatrix} u & 0 & 0 & 0 & w & v \\ 0 & v & 0 & w & 0 & u \\ 0 & 0 & w & v & u & 0 \\ 1 & 1 & -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2 & c^2 & bc & ca & ab \end{vmatrix} = 0.$$

(Vezi M. H. PIQUET *Géométri Analytique*).

Ecuaţia aceasta se reduce la

$$(8)\qquad (C)\equiv\begin{vmatrix} \alpha^2 u & 0 & w & v \\ 0 & \alpha^2 v & 0 & u \\ w & v & u & 0 \\ \alpha^2 a^2 + c^2 & \alpha^2 b^2 + c^2 & ac & ab \end{vmatrix} = 0$$

o curbă de *gradul 6*, bitangentă dreptei (D).

Aceasta este deci înfăşurătoarea cerută în problema dela început.

7°. *Cazuri particulare.*

a) *Dacă dreapta* D *trece prin unul din punctele comune ale fascicolului de cercuri.*

In acest caz *hesiana* e tot o *hiperbolă* ca mai sus, nu mai că trece prin acest punct, care astfel e *punct dublu* al ei, deoarece hiperbola şi dreapta constitue *hesiana.*

Cayleyana se reduce la punctul considerat al fascicolului de cercuri şi *o conică* (σ') (CH. MICHEL 111).

In acest caz se poate enunţa:

Tangenta în punctul de intersecţie al unui fascicol de cercuri cu o dreaptă ce trece prin unul din puncte fascicolului, înfăşoară o **conică.**

b) Dacă *dreapta* D *este dreapta dela infinit.*

In acest caz tangentele la conicele fascicolului în punctele de intersecţie devin *asimptotele* lor.

Se poate enunţa deci:

Asimptotele unui fascicol punctual de conice, înfăşoară **Cayleyana** *reţelei punctuale formate de fascicol şi dreapta dela infinit.*

8°. Problema are o *generalizare şi mai largă,* rezultată din definiţia *Cayleyanei* în cazul general al unei reţele de conice:

Fiind date 3 conice, nefăcând parte din acelaş fascicol, punctual, secantele comune uneia din conice, cu conicele fascicolului determinat de celelalte două, înfăşoară **Cayleyana** *reţelei punctuale, determinate de cele 3 conice date.*

Mai sunt şi alte cazuri interesante de *reţele speciale,* asupra cărora voi reveni.

Este de asemenea de notat că se pot enunţa proprietăţi corelative pentru *fascicolele tangenţiale* de conice.

LOCOT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

NOTE MATEMATICE

41. *Un sistem diofantian.* Sistemul

$$X + Y + Z = M^2$$
$$X^3 + Y^3 + Z^3 = Q^2$$

se rezolvă dacă se ia

$$X = a^4 + 2ab^3$$
$$Y = b^4 + 2a^3b$$
$$Z = 3a^2b^2$$
$$M = a^2 + ab + b^2$$
$$Q = a^6 + 7a^3b^3 + b^6.$$

Dacă $(a^2 - ab + b^2)^2 + 2a^2b^2$ este patrat perfect, atunci avem şi

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = P^2.$$

Aceasta are loc pentru

$$a = 3 \quad , \quad b = 2$$

ceea ce dă rezultatul

$$124 + 129 + 108 = 19^2$$
$$124^2 + 129^2 + 108^2 = 209^2$$
$$124^3 + 129^3 + 108^3 = 2305^2.$$

Aceste numere verifică şi următoarele relaţiuni interesante:

$$124^2 + 129^2 + 108^2 + 2(15996 + 13392 + 13932) = 19^4.$$
$$124^4 + 129^4 + 108^4 + 2\,(15996^2 + 13392^2 + 13932^2) = 209^4$$
$$124^6 + 129^6 + 108^6 + 2\,(15996^3 + 13392^3 + 13932^2) = 2305.$$

A. MOESSNER.

42. *O demonstraţie a formulei lui* TAYLOR *pentru polinoame.* Voiu proceda prin inducţie completă.

Fie polinomul de gradul întâiu

$$P(x) \equiv A_0 x + A_1.$$

Verificăm imediat că

$$P(x+h) \equiv A_0(x+h) + A_1 \equiv \underbrace{A_0 x + A_1} + h \cdot A_0.$$
$$\equiv P(x) + \frac{h}{1} \cdot P'(x).$$

Tot astfel putem verfica pentru polinomul de gr. II-lea

$$P(x) \equiv A_0 x^2 + A_1 x + A_2$$

că

$$P(x+h) \equiv P(x) + \frac{h}{1} \cdot P'(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot P''(x).$$

Să presupunem pentru polinomul de gradul $(n-1)$

$$P(x) \equiv \sum_1^n A_{i-1} \cdot x^{n-i},$$

verificată identitatea

$$(A)\quad P(x+h)\equiv P(x)+\frac{h}{1}P'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\cdot P^{(n-1)}_{(x)}$$

şi să arătăm că ea subsistă şi pentru polinomul de gr. n:

$$Q(x)\equiv A'_0x^n+A_0x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}$$

ori avem

$$(1)\qquad Q(x)\equiv A'_0x^n+P(x)$$

$$(2)\qquad Q(x+h)=A'_0(x+h)^n+P(x+h).$$

Derivând pe (1) de n ori obţinem

$$(3)\quad \begin{cases} Q'(x)\equiv nA'_0x^{n-1}+P'(x)\\ Q''(x)\equiv n(n-1).A'_0x^{n-2}+P''(x)\\ \vdots\\ Q^{(n-1)}(x)\equiv n!\,A'_0x+P^{(n-1)}(x)\end{cases}$$

$$(4)\qquad Q^{(n)}(x)\equiv n!\,A'_0.$$

Ţinând seamă de (1), (2), (3) identitatea (A) devine succesiv

$$Q(x+h)-A'_0(x+h)^n\equiv[Q(x)-A'_0n^n]+\frac{h}{1}[Q'(x)-n.A'_0x^{n-1}]$$

$$+\frac{h^2}{2!}[Q''(x)-n(n-1).A'_0x^{n-2}]+\ldots\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}[Q^{n-1}(x)-n!\,A'_0x]$$

$$\equiv Q(x)+\frac{h}{1}Q'(x)+\ldots\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+A'_0h^n$$

$$-A'_0\left[x^n+\frac{n}{1}h.x^{n-1}+\ldots+\frac{n}{1}h^{n-1}x+h^n\right]$$

$$=Q(x)+\frac{h}{1}Q'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+A'_0h^n-A'_0(x+h)^n$$

şi deci

$$Q(x+h)\equiv Q(x)+\frac{h}{1}Q'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+A'_0h^n.$$

Insă din relaţia (4) rezultă

$$A'_0 \equiv \frac{Q^{(n)}(x)}{n!}$$

şi formula este astfel demonstrată.

In manualele de cl. 8-a există numai o *verificare* a formulei lui TAYLOR, fapt care m'a făcut să pun la îndemâna elevilor această demonstraţie, — deşi nu ştiu dacă este sau nu cunoscută.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

43. *Exponentul funcţiei balistice.*

In „Balistica Exterioară" se notează adesea drept funcţie de viteză:

1) $$F(v) = b \cdot v^n$$

unde b este constant.

In acest caz determinarea exponentului n se face prin derivare şi se obţine:

2) $$n = \frac{v \cdot F'(v)}{F(v)} .$$

Aceste valori ale lui n, astfel calculate, sunt adesea utilizate, mai cu seamă în Italia.

Dar, determinarea dată mai sus, presupune n constant, ori formula 2) ne arată ulterior că în realitate n este variabil, prin urmare se face o eroare.

Considerând însă pe n variabil şi funcţie de v, atunci avem prin derivare:

$$n + n' \cdot v \cdot \text{Lg.}\, v = \frac{v \cdot F'(v)}{F(v)}$$

sau:

3) $$n' + n \cdot \frac{1}{v \cdot \text{Lg.}\, v} - \frac{F'(v)}{F(v) \cdot \text{Lg.}\, v} = 0.$$

Integrala acestei ecuaţiuni diferenţiale este:

4) $$n = e^{-\int \frac{dv}{v \cdot \text{Lg.}\, v}} \cdot \left[c + \int \frac{F'(v)}{F(v)\, \text{Lg.}\, v} \cdot e^{\int \frac{dv}{v\, \text{Lg.}\, v}} \cdot dv \right]$$

care ne dă adevărata valoare a lui n.

Admițând:

$$\int \frac{dv}{v \,.\, \text{Lg}.\, v} = \text{Lg}.\,(\text{Log}\, v)$$

adică, considerând constanta nulă, iar a doua constantă, determinându-o, pentru o rezistență patratică în cazul vitezelor mici, găsim $c = 6{,}84$, atunci putem calcula cu mai multă exactitate valorile lui n.

Pentru viteze cuprinse între 400 m/sec. și 1500 m/sec. am găsit că diferența variază crescând dela 0 la 25%, schimbând astfel simțitor calculele balistice.

MAIOR I. LINTEȘ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL «GAZETEI MATEMATICE» DIN ANUL 1938

28—29 Aprilie 1938

CLASA IV-a

Geometria. Se consideră o piramidă cu baza un *triunghiu echilateral* ABC și muchia VA perpendiculară pe planul (P) al bazei.

Un plan (Q), paralel laturii BC și perpendicular pe planul (P), taie muchiile AB, AC, VC, VB respectiv în punctele D, E, F, G.

Să se arate că:

1°. Figura DEFG este un dreptunghiu.

2°. Locul geometric al centrului (I) al acestui dreptunghiu este o dreaptă. Să se deducă de aci că dreptele ce unesc mijloacele muchiilor opuse ale piramidei sunt concurente.

3°. Există o poziție a planului (Q), pentru care secțiunea devine un patrat; să se precizeze construcția patratului și să se demonstreze relația

$$\frac{2}{L} = \frac{1}{a} + \frac{1}{l},$$

în care L este latura patratului, $2a$ latura triunghiului ABC, iar $2l$ muchia cea mică a piramidei.

4°. G_1, F_1, fiind respectiv proecțiile lui A pe VB și VC, iar D_1, E_1 proecțiile punctelor G_1 și F_1 respectiv pe AB și AC, atunci figura $D_1E_1F_1G_1$ este tot un dreptunghiu, și triunghiul $G_1D_1E_1$ este asemenea triunghiului VAB.

5º. Volumul solidului DEFGCB, în cazul particular când punctele D, E sunt mijloacele laturilor AB şi AC, este $^3/_4$ din volumul piramidei date.

[Se va construi figura cât mai clar şi se va lua, pentru uşurinţa calculelor, $AD = x$].

Algebra. I. Din oraşul A pleacă spre Bucureşti un tren cu 54 călători. Ajungând în staţia C se coboară 1/2 din călătorii clasei a III-a, 1/3 din călătorii clasei a II-a, 1/6 din călătorii clasei I-a şi se urcă 3 călători în clasa III-a, 2 în clasa a II-a şi 1 în clasa I-a.

Ajungând în staţia D nu se coboară nimeni, însă se urcă în clasa a III-a un număr de călători egal cu 1/3 din numărul călătorilor cari se aflau în tren cu bilete de clasa III-a; la clasa II-a se urcă 3 călători, la clasa I-a numai 1 călător şi în plus încă 8 călători dintr'un autobuz C. F. R. rămas în pană şi cari nu sunt obligaţi să stea într'o anume clasă. Se cere să se afle câţi călători avea trenul în fiecare clasă la plecarea din oraşul A şi cu câţi călători a ajuns la fiecare clasă în Bucureşti, ştiind că la sosirea în Bucureşti are în total exact numărul de călători cu care a plecat din A şi că numărul de călători cu bilete de clasa a III-a este cât numărul călătorilor din celelalte două clase la un loc, exceptând cei 8 călători dela autobuz.

II. Se consideră expresia algebrică:

$$E \equiv \frac{1}{2}[x^2y - yz + zx^2 - 2z^2]$$

şi se cere:

1º. Să se pună sub forma unei sume algebrice de trei pătrate.

2º. Apoi să i se calculeze valoarea pentru:

$$x = \sqrt{a-1},$$
$$y = 0,$$
$$z = 1 - a.$$

(Ambele chestiuni obligatorii).

CLASA V-a

Geometria plană. Se dă un cerc ω cu centrul O şi trei puncte A, M, N pe cerc. O dreaptă Δ perpendiculară pe MN întâlneşte dreptele AM, AN în B, C.

a) Să se afle locul geometric al centrului cercului ABC, când punctele M, N sunt mobile pe cercul ω.

b) Fie P un punct al dreptei AO şi T punctul în care tangenta dusă din P la cercul ABC atinge cercul. Să se afle locul geometric al punctului T, punctele M, N fiind mobile pe cercul ω.

Algebra. I. Se dă ecuaţia:

$$(1) \qquad x^2 - 2\sqrt{3}(\lambda + \mu - 1)x - \lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\lambda + 2\mu - 6 = 0,$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali.

Se cere:

1°. Să se arate că ecuaţia (1) are rădăcinile reale oricare λ şi μ reali.

2°. Să se afle λ şi μ pentru cari (1) are rădăcinile egale şi să se afle rădăcina.

3°. Folosind ecuaţia (1), să se arate că şi ecuaţia:

$$(2) \qquad x^2 - 2(2\lambda - 1)x + (\lambda + 1)^2 - 3 = 0$$

are rădăcinile reale oricare λ real.

4°. Să se arate că între rădăcinile ecuaţiei (2) există relaţiile

$$x_1 + x_2 = -6 + 4\sqrt{x_1 x_2 + 3}.$$

II. Se dă polinomul:

$$P(x) \equiv x^5 + 2(a-1)x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 2(a-1)$$

şi se cere:

1°. Să se determine coeficienţii lui $P(x)$ aşa încât să se dividă cu:

$$D(x) \equiv x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

2°. Să se afle apoi direct câtul diviziunii lui $P(x)$ prin $D(x)$ şi să se studieze variaţia acestui cât când a variază dela $-\infty$ până la $+\infty$.

(Ambele chestiuni obligatorii).

CLASA VI-a

Trigonometria. Se consideră un triunghiu ABC în care cunoaştem laturile b, c şi unghiul A. Prin A se duce o dreaptă AD (D fiind pe BC) făcând cu AB un unghiu φ. Unghiul φ este măsurat dela AB înspre AC.

1°. Să se calculeze AD în funcţie de datele problemei.

2°. Din expresia găsită să se deducă expresia înălţimei şi bisectoarelor unghiului A.

3°. Să presupunem că prin B ducem o dreaptă BE (E fiind pe AC) care să facă un unghiu φ cu BC şi tot aşa se duce o dreaptă CF (F fiind pe AB) care să facă cu CA un unghiu φ. Să se arate că există triunghiuri pentru cari se poate determina un unghiu φ în aşa fel ca

$$AD = BE = CF.$$

4°. Să se arate că între laturile unui triunghiu care satisface condiţiilor dela 3° există relaţia

$$a^2(a-c) + b^2(b-a) + c^2(c-b) = 0.$$

Geometria în spaţiu. I. Fie V un punct astfel ca distanţele lui VD, VE, VF la laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu, să fie egale.

a) Conul circumscris piramidei VDEF este înscris (ori exînscris) piramidei VABC; — vârful V, comun.

b) Perpendicularele în planul ABC pe VA, VB, VC formează triunghiul A'B'C'; tetraedul VA'B'C' are muchiile opuse perpendiculare.

c) $$\overline{VA'}^2 + \overline{B'C}^2 = \overline{VB'}^2 + \overline{C'A}^2 = \overline{VC'}^2 + \overline{A'B'}^2.$$

II. Se duce printr'un punct O, trei drepte pe care se ia punctele A, A' pe prima; B, B' pe a doua şi C, C' pe ultima. Un plan oarecare taie laturile triunghiurilor ABC, A'B'C' în a, b, c respectiv a', b', c'. Oa', Ob', Oc' taie laturile triunghiului ABC în α, β, γ şi Oa, Ob, Oc taie laturile triunghiului A'B'C' în α', β', γ'. Dreptele abc, $a'b'c'$, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sunt concurente.

CLASA VII-a

Algebra. A. Fie $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, x)$ funcţiuni omogene, fiecare având gradul de omogenitate m. Se consideră şi determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} .$$

Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{(x+y+z)\,D}{m} = f \cdot \begin{vmatrix} \varphi'_x & \psi'_x & 1 \\ \varphi'_y & \psi'_y & 1 \\ \varphi'_z & \psi'_z & 1 \end{vmatrix} + \varphi \cdot \begin{vmatrix} \psi'_x & f'_x & 1 \\ \psi'_y & f'_y & 1 \\ \psi'_z & f'_z & 1 \end{vmatrix} + \psi \cdot \begin{vmatrix} f'_x & \varphi'_x & 1 \\ f'_y & \varphi'_y & 1 \\ f_z & \varphi'_z & 1 \end{vmatrix} .$$

B. Se consideră sinusoida (S) şi tangentoida (T), corespunzătoare funcţiunilor $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, raportate la acelaş sistem de axă xOy.

Fie A un punct pe axa Ox, de abscisă x, astfel că $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Perpendiculara, ridicată pe Ox în punctul A, taie curbele (S) şi (T) respectiv în punctele M_1, M_2. Tangentele, duse în M_1 şi M_2 la curbele (S) şi (T), taie axa xx' respectiv în punctele T_1, T_2.

Să se stabilească următoarele proprietăţi:

1. Există relaţia:

$$\overline{M_1T_1}^2 - \overline{M_2T_2}^2 = \overline{AM_1}^4 .$$

2. Cercul, care trece prin punctele M_1, T_1, T_2, este tangent dreptei AM_1 în punctul M_1.

3. Avem:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\overline{T_1T_2} - \overline{AT_1} \cdot \overline{AT_2}}{\overline{T_1T_2}\sin x - \overline{AT_1} \cdot \overline{AT_2}\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Geometria descriptivă. Se dă:

1°. Punctele (A) 87, 10, 43; (B) 116, 56, 18; (C) 138, 35, 57.

2°. Planul $Q\beta Q'$, β fiind la 200 din marginea din stânga a paginei. βQ face cu linia pământului un unghiu de 22°, iar $\beta Q'$ 54°, ambele spre stânga. Linia pământului paralelă cu marginile mici ale paginei şi la mijloc.

Se cere:

1°. Intersecţia planului Q cu planul P al triunghiului ABC.

2°. Prin punctul G, de întâlnire al medianelor triunghiului ABC să se ridice o perpendiculară pe planul P.

3°. Să se găsească:

a) urmele acestei perpendiculare pe planele de proiecţiune.

b) intersecţia acestei drepte cu planul Q.

Cotele date sunt în milimetri.

Prin A (x, y, z) se înţelege: x distanţa liniei de ordine a punctului dela marginea din stânga a paginei; y depărtarea şi z cota punctului.

CLASA VIII-a

Algebra. Fie ecuaţia:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6\ 1 + a^2)\ x^2 + 12\,(1 - a^2)\,x + 4a + 12 = 0.$$

A. Să se stabilească următoarele proprietăţi:

1°. Pentru $a \geqslant 6$, ecuaţia are toate rădăcinile reale.

2°. Există cel puţin patru valori reale pentru a: a_1, a_2, a_3, a_4 astfel că pentru fiecare valoare, $f(x)$ are o rădăcină dublă.

3°. Nu există nici o valoare reală pentru a, astfel ca $f(x) = 0$ să aibă două rădăcini duble.

B. Notăm membrul I al ecuaţiei cu $f(x, a)$, apoi se notează:

$$\varphi(a) = \frac{f(1, a) - f(1, -a)}{a\,[f(-1, a) + f(-1, -a)]}.$$

Să se arate că aria $\mathcal{A}$, cuprinsă între curba $y = \varphi(x)$ şi axa x-lor, este dată de relaţia:

$$\mathcal{A} = \frac{4\pi}{\sqrt{6}}.$$

Geometria analitică. Se consideră pe o parabolă trei puncte A, B, C. Tangentele în aceste puncte la parabolă formează un triunghiu MNP (NP fiind tangenta în A, PM în B şi MN în C). Prin B se duce o paralelă la axa parabolei care taie pe AC în L. Se cere:

1°. Să se arate că figura LMNP este un paralelogram.

2°. Că cercul circumscris triunghiului MNP trece prin focarul F al parabolei.

3°. Să se arate că dacă şi L se află pe acest cerc, N se află pe directoarea parabolei.

4°. Presupunând că dreapta AC trece prin F şi că dreapta BF este perpendiculară pe ea să se găsească şi să se construiască locul punctului L.

Mecanica. Un stâlp al unei linii electrice, având înălţimea deasupra pământului de 10 m., susţine trei fire de aramă de 8 mm. diametru şi care trag de stâlp, în sens orizontal, cu 16 kg/mm² într'un sens şi cu 9 kg/mm² în celălalt sens. Stâlpul este aşezat la un colţ de stradă unde axele străzilor fac un unghiu de 120°. Firele sunt legate de stâlp prin izolatori aşezaţi primul la 50 cm dela vârf şi următorii doi la câte 75 cm distanţă, unul sub altul.

Pentru ca stâlpul să nu se rupă, este susţinut cu o ancoră de oţel. Ancora este fixată de stâlp la 1 m. sub ultimul izolator şi are o lungime de 8 m.

Să se calculeze:

1°. Diametrul la bază a stâlpului.

2°. Diametrul ancorei de oţel.

3°. Direcţia ancorei de oţel faţă de direcţia firelor.

Pentru calculul celor două diametre se vor utiliza formulele:

— Pentru diametrul stâlpului (se presupune că ancora nu există):

$$W = \frac{M}{k_b}$$

în care

$$W = \frac{\pi d^3}{32};\ d = \text{diametrul stâlpului}$$

M = momentul la baza stâlpului

$k_b = 110$ kg/cm².

— Pentru diametrul ancorei

$$S = \frac{T}{k_z},$$

în care

S = secţiunea firului

T = efortul în fir

$k_z = 20$ kg/mm².

ANUL PREPARATOR AL ŞCOLII POLITECHNICE

Algebra superioară. I. Fie

$$f(x) = \sum_1^m \frac{x^i}{i},\quad g(x) = \sum_1^m C_m^i \frac{x^i}{i}$$

avem

a) $$f(x+1) - g(x) = \text{constant.}$$

b) $$g(-1) = -f(1)$$

c) $$\sum_k^m \frac{C_i^k}{i} = \frac{C_m^k}{k}.$$

II. Să se determine valoarea lui m, astfel ca

$$\lim_{x=0} \frac{\left[\lim_{\alpha=0} (1 + x \operatorname{tg} \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right]^m}{\frac{1}{2} x^2 + \cos x - 1}$$

să fie finită şi diferită de zero.

Geometria analitică. Se dă dreapta variabilă (D) :

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{ay}{\lambda + b} - 1 = 0,$$

a, b fiind cantităţi date, iar λ un parametru variabil.

1°. Să se arate că (D) înfăşoară o parabolă (P) a, b şi să se exprime coordonatele unui punct al parabolei în funcţie de λ.

2°. Să se arate că dacă între valorile λ_1, λ_2, λ_3 avem relaţia:

$$(\lambda_1 + b)(\lambda_2 + b)(\lambda_3 + b) + a^2\lambda_1\lambda_2\lambda_2 = 0,$$

triunghiul format de dreptele $(D)_1$, $(D)_2$, $(D)_3$ admite originea ca ortocentru.

3°. Considerând pe a, b variabile, să se arate că dacă parabolele (P) a_1, b_1 şi (P) a_2, b_2 au axele paralele, focarele lor sunt în linie dreaptă cu originea şi reciproc. Aceeaşi proprietate are loc considerând în loc de focare, vârfurile parabolelor.

4°. Cantităţile a, b fiind variabile, se consideră parabolele ale căror tangente la vârf trec printr'un punct fix; să se arate că locul focarelor lor este o iperbolă echilateră, cu centrul în punctul considerat,

Geometria descriptivă. Se dă:

1°. O sferă cu raza de 50, care este tangentă la ambele plane de proiecţiune, linia de ordine a centrului ei fiind exact la mijlocul paginei.

2°. O dreaptă AB: A (80, 22, 100) ; B (120, 53, 56).

Socotind planele de proiecţiune şi sfera opace, să se caute intersecţia dreptei cu sfera şi să se puncteze dreapta cu părţile ei văzute şi nevăzute, porţiunea din interiorul sferei fiind considerată ca neexistentă.

Să se găsească secţiunea plană făcută în sferă prin planul determinat de dreapta dată şi de centrul sferei determinând şi aci părţile văzute şi nevăzute.

Să se găsească pe cercul de secţiune, punctele cele mai de sus şi mai de jos; cele mai dela dreapta şi mai dela stânga, cele mai apropiate şi mai depărtate de planul vertical de proiecţiune.

Cotele în milimetri; linia pământului paralelă cu marginile mici ale paginei şi la mijloc. Prin A (x, y, z) se înţelege: x depărtarea liniei de ordine a punctului A de marginea din stânga a paginei, y depărtarea şi z cota punctului.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXV, fascicola II. Februarie 1938. Momentele unui grup de funcţiuni de probabilitate şi relaţiile lor cu ecuaţiile diferenţiale lineare de al doilea ordin. Ecuaţiile lui LAPLACE, Fracţiile continue algebrice şi suma seriilor divergente de C. E. DIEULEFAIT.

Boletin Matematico, publicat de B. I. BAIDAFF, Buenos-Aires. Anul X. Nr. 13. Ianuarie 1938. Serii tayloriene în raport cu numerele prime de M. PETROVITCH. Asupra triunghiurilor pitagorice de R. NOGUERA.

Idem. Anul X. Nr. 14. Februarie 1938.

Idem. Anul X. Nr. 15. Februarie 1938.

Bulletin of the American Mathematical Society. Menasha Vol. 44. Nr. 2. Februarie 1938. Asupra şirurilor de polinomiale ortogonale simultane în cercuri oarecare de G. M. MERRIMAN. Rezolvantul unei transformări închise de A. E. TAYLOR. Operaţii lineare asupra funcţiilor cu variaţie bornată de T. H. HILDEBRANDT. Notă asupra spaţiilor linear tropologice de D. H. HYERS. Notă asupra distribuţiilor în probabilitate de R. VON MISES. O aplicaţie a ecuaţiei modulare a lui SCHLÄFLI, la o conjectură cu RAMANUJAN de D. H. LEHMER. Extensiunile funcţionalelor în spaţii complexe lineare de H. F. BOHNENBLUST şi A. SOBCZYK. Asupra fracţiilor continue de H. S. WALL. Teoreme de existenţă pentru soluţiile ecuaţiilor diferenţiale ne-integrabile de EVERETT PITCHER şi W. E. SEWELL. Notă asupra condiţiilor de integrabilitate a ecuaţiilor diferenţiale implicite de CLYDE M. CRAMLET. Teoria invariantului diferenţial în tensorii alternanţi de CLYDE M. CRAMLET. Notă asupra regiunii convexe a sferei de R. M. ROBINSON. Asupra unor ecuaţii în matrice ale căror elemente se prelungesc în algebra diviziunii de M. H. INGRAHAM. Asupra determinării operaţionale a două funcţii dimensionale ale lui GREEN în teoria conducţiei căldurii de A. N. LOWAN. Numere indice în echilibrul general economic de F. W. DRESCH. Notă asupra unor forme generale de P. R. HALMOS. Spaţii metrice cu curbe geodezice RICCI de JACK LEVINE.

Journal de mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 62. Nr. 13. 1 Aprilie 1938. Paris.

Idem. Nr. 14. 15 Aprilie 1938.

Mathesis, publicată de AD. MINEUR. Tom. LII. Nr. 3 — 4. Aprilie 1938. Bruxelles. Asupra geometriei tetraedrului de P. DELENS. Asupra conicelor osculatoare parabolelor de indice oarecare şi spiralei logaritmice de R. GOORMAGHTIGH. Asupra întrebuinţării laturelor poligoanelor regulate în evaluarea apropiată a rădăcinilor unor ecuaţii transcendente de V. G. CAVALLARO.

Pitagora. Revistă de matematici. Anul III. Nr. 7. Colegiul naţional „Carol I" Craiova. Aprilie 1938. Notă asupra studiului liniei drepte în geometria analitică de N. BALABAN. Asupra unei teoreme a D-lui POMPEIU de CĂLIN POPOVICI. Asupra unui exerciţiu de geometrie analitică de R. GEORGESCU.

Revista Artileriei. Volum jubilar. Anul L. Nr. 2 — 3. Timişoara. Martie 1938.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVIII. Nr. 2. 15 Aprilie 1938. Asupra cercurilor APOLLONIUS de N. N. MIHĂILEANU.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Anul 8. Nr. 5. Mai 1938. Bruxelles.

LT. COMANDOR ING. LINTEŞ. Calculul şi construcţia traiectoriilor bombelor de avion, (extras din Revista Aeronauticei şi Marinei, anul XII, Martie 1938).

CERERI

276. Ce se ştie despre studiile făcute, în ţară şi în străinătate, de Inginerul SPIRIDON IORCEANU, despre care am vorbit în Nota 274 din acest an? El a făcut studiile inginereşti la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Paris, iar după întoarcerea în ţară a fost Secretar general al Ministerului de Lucrări publice, Profesor la Şcoala de Poduri şi Şosele din Bucureşti, Preşedinte al Consiliului tecnic superior, etc.

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

S. PEDLEY. Examples in Arithmetic. Part I and II. Londra 1894.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

A. RICHTER. Arithmetische Aufgaben für Gymnasien, Realgymnasien, und Oberrealschulen. Lipsca 1898.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

HUGUET et SUFFRIN. Calculs Aérodynamiques des Avions. (Lois de la résistance de l'air).
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1563. *Se dă o conică şi fie* A *un vârf al ei. Se ia în plan un punct* M, *prin care se duce o paralelă la axa ce trece prin* A, *paralelă care taie conica în* N. *Să se găsească locul geometric al lui* M *aşa ca* MN = NA. *Să se explice rezultatul în cazul când conica este un cerc.*

G. THIERRIN.

Iau ca axe de coordonate axa care trece prin A şi tangenta în A la conică. Ecuaţia conicei este, în aceste condiţiuni

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx = 0.$$

Punctele M se obţin luând intersecţia dreptei

(1) $$y = \beta$$

cu cercul

(2) $$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$$

cu centrul în N (α, β) pe conică şi cu raza AN. Locul lui M se obţine imediat eliminând pe α, β între ecuaţiile (1), (2) şi

(3) $$A\alpha^2 + C\beta^2 + 2D\alpha = 0.$$

Rezultatul acestei eliminări este

(4) $$A(x^2 - y^2)^2 + 4Cx^2y^2 + 4Dx(x^2 - y^2) = 0.$$

Curba cerută este deci o cuartică trecând prin origină.
Când conica este un cerc de rază R avem:

$$A = C \quad \text{şi} \quad \frac{D}{C} = -R$$

aşa că locul (4) devine

$$(x^2 + y^2)^2 - 4Rx(x^2 - y^2) = 0$$

adică *lemniscata* lui BERNOUILLI.

Notă. 1°. Dacă punctul M se construieşte în aceleaşi condiţii însă pe paralela dusă prin N la Ay se obţine prin aceleaşi calcule că locul lui M este cuartica

$$4Ax^2y^2 + C(x^2 - y^2) + 8Dxy^2 = 0$$

în cazul când N se mişcă pe o conică sau cuartica

$$(x^2 + y^2)^2 - 8Rxy^2 = 0$$

în cazul când N se mişcă pe un cerc de rază R. Ultima cuartică este tot aşa de cunoscută ca şi lemniscata lui BERNOUILLI. (A se vedea de ex. *Géometrie Analytique* par M. H. PICQUET 1-ère partie pag. 566).

2°. Problema se poate extinde încă în felul următor:

Pe o conică se dă punctul fix A *şi un punct mobil* N. *Se cere locul geometric al intersecţiei cercului* N (AN) *cu o dreaptă trecând prin* N *şi paralelă cu o direcţie dată* Δ.

Iau ca origină pe A şi ca axe o paralelă şi o perpendiculară la Δ.
Problema revine la a elimina pe α, β între

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha + 2E\beta = 0$$

$$\beta = y$$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

Se găseşte cuartica

$$A(x^2 - y^2)^2 + 2Bxy(x^2 - y^2) + 4Cx^2y^2 + 4Dx(x^2 - y^2) + 8Ex^2y = 0.$$

Când se ia direcţia Δ ca axă de y, atunci ecuaţia cercului geometric este

$$4Ax^2y^2 + 4Bxy(y^2 - x^2) + C(y^2 - x^2) + 8Dxy^2 + 4Ey(y^2 - x^2) = 0.$$

3°. Problema se poate pune într'un cadru şi mai general, anume punctul A este fix, iar N mobil pe o curbă oarecare

$$F(x, y) = 0.$$

Locul lui M va fi

$$F\left[\frac{x^2 - y^2}{2x}, y\right] = 0 \quad \text{sau} \quad F\left[x, \frac{y^2 - x^2}{2y}\right] = 0$$

după cum Δ este paralelă sau perpendiculară pe axa de x.

4°. In fine se rezolvă la fel cazul când

$$NM = k \times NA.$$

5°. S'au primit pe vremuri soluţiuni foarte bune la problema 1563 cum a fost propusă, de la D-nii: I. ATANASIU, E. CARAMAN, N. CHIRIAC, S. KAUFMANN, P. MELAS, I. MITITELU şi I. TRUFAŞ.

In ultimul timp am primit şi o soluţie dela un harnic din actualii corespondenţi. Din păcate soluţia sa este greşită şi în raţionament şi în calcule.

G-L GH. B.

PROBLEMA 3692. *Să se găsească patratul perfect* d m s z u *ştiind că suma cifrelor este pătratul ultimei cifre, că prima este suma celor două ce-i urmează şi că cifra sutelor este suma cifrelor miilor şi unităţilor.*

I. FOCA.

Soluţie dată de D-l CEZAR COŞNIŢĂ.

Suma cifrelor patratului nu poate fi 1, deoarece ar urma că $u = 1$ şi celelalte cifre ar trebui să fie egale cu 0. Evident că nu se poate.

Suma aceasta nu poate fi 4, nici 9, deoarece ultima cifră a pătratului ar urma să fie 2 sau 3, ceeace nu se poate. Suma $(d + m + s + z + u)$ este cel mult egală cu 45.

Această sumă fiind un pătrat perfect, este deci cel mult egală cu 36.

Din cele de mai sus, rezultă că suma $(d+m+s+z+u)$ poate fi:

$$16;\ 25;\ 36;$$

şi deci u poate avea valorile 4; 5; 6.

Ultimele două cifre ale numărului cerut, pot fi date de unul din următoarele grupuri:

$$04;\ 24;\ 44;\ 64;\ 84;\ 25;\ 16;\ 36;\ 56;\ 76;\ 96.$$

1. Deoarece $s = m + u$, dacă $u = 4$, $s \geqslant 4$.

Se poate forma tabloul:

u	4
m	0, 1, 2, 3, 4, 5
s	4, 5, 6, 7, 8, 9.

Din enunţ avem: $d = m + s$, astfel că d poate fi 4; 6; 8.

Aşa dar putem căuta patratul cerut printre numerile:

40404; 61504; 82604; 40424; 61524; 82624; 40444; 61544; 82644; 40464; 61564; 82664; 40484; 61584; 82684.

Dintre acestea excludem pe acelea a căror sumă a cifrelor nu este egală cu patratul lui u şi pe acelea care nu sunt patrate. Rămâne soluţia:

$$61504 = 248^2.$$

2. Pentru $u = 5$, $s \geqslant 5$.

Rezultă tabloul:

u	5
m	0, 1, 2, 3, 4
s	5, 6, 7, 8, 9.

Formăm numerele: 50525; 71625; 92725.

Niciunul nu este patrat perfect.

3. Pentru $u = 6$, $s \geqslant 6$.

Se formează tabloul:

u	6
m	0, 1, 2, 3
s	6, 7, 8, 9.

Cercetăm numerele:

60616; 81716; 60636; 81736; 60656;

81756; 60676; 81776; 60696; 81796.

Suma cifrelor nu este egală cu patratul unităţilor la niciunul din aceste numere.

Singura soluţie a problemei este numărul

$$61504 = 248^2.$$

Au rezolvat problema foarte bine D-nii: N. ALDEA, N. ANTONESCU, ROMEO BRASSAT, EUGENIU BURLACU, VLADIMIR CRIVĂŢ, G. G. CONSTANTINESCU, ADRIAN GHEORGHIU, GH. TH. GHEORGHIU, SORIN GOROVEI, PETRE GHIŞOIU, EMILIAN MIHALCEA, MIRCEA LEONTE NEGREA, PANAITE GH., IOAN C. SAVIN, IUSTIN VÂLCEANU, N. VELICESCU şi NICOLAE O. ZAHARIA.

Au dat soluţii bune D-nii: AURELIAN ANGELESCU, PETRE ALMĂJAN, TEODOR BACIU, IOAN BOIAN, PETRE BUMBULICI, GH. BOERESCU, BORIS BÂCICOV, VICTOR BÂCICOV, A. BURICLIOVICI, AURELIAN CĂLINESCU, V. G. DRĂGUŢ, EUGEN DUMITRESCU, N. DONCIU, MIRCEA GROSU, CONSTANTIN HEYTMANEK, HARALAMBIE P. IONESCU, DIAMANT LADISLAU, ENE MILEA, IOAN CR. MOCĂNESCU, THEODOR I. MĂRCULESCU, IOAN V. MĂTIEŞ, COSTACHE NICULAE, GH. PĂUN, M. PAMFIL, IOAN GH. POPA, THEODOR PANAITE, NICOLAE PARASCHIV, VIRGILIU C. POPESCU, CRISTIAN I. RÂMNICEANU, EMANUEL B. ROSENBLATT, CONSTANTIN RUSSE, ALEX. RAICU, DUMITRU ŞERBAN, CONSTANTIN T. SIMIONESCU, IOAN ŞCHIOPULESCU, SILVIU ŢILENSCHI, MIHAIL UNGHEANU, TITU VELICESCU, IOAN VONICA, ION O. ZAHARIA şi GH. ZAMFIRESCU.

GH. D.

PROBLEMA 3703. *Se cer valorile lui* **n** *pentru care rădăcina patrată a lui* **n!** *este egală cu* **n.**

G-L GH. BUICLIU.

Sunt de considerat trei cazuri pentru rezolvarea problemei.

1°. **n** *este rădăcina patrată exactă a lui* **n!** Avem:

$$n! = n^2 \tag{1}$$

şi cum $n \neq 0$, căci altfel problema nu are sens,

$$(n-1)! = n.$$

Să comparăm pe n cu produsul ultimilor doi factori ai lui $(n-1)!$ Se găseşte uşor că

$$(2) \qquad (n-2)(n-1) > n$$

pentru

$$n < 2 - \sqrt{2} = 0{,}6\ldots \quad \text{şi} \quad 2 + \sqrt{2} = 3{,}4\ldots < n.$$

Prima limită, dând numere fracţionare sau negative, nu interesează.

Am găsit deci că pentru $n < 4$ avem (2) deci cu atât mai mult

$$(n-1)! > n$$

pentru $n < 4$. Pentru (1) vom avea de examinat numai valorile 1, 2, 3 dintre care convine 1, singura soluţie a cazului 1°:

$$\boxed{n = 1} \quad \text{şi} \quad \boxed{\sqrt{1!} = 1}.$$

2°. **n** *este rădăcina patrată cu aproximaţie în minus a lui* **n!** Luând aproximaţia de o unitate trebue să avem

$$n < \sqrt{n!} < n + 1$$

$$\therefore \quad n^2 < n! \quad \text{şi} \quad n < (n-1)!$$

Procedând ca la 1° se găseşte $n < 5$, iar prin încercări obţinem soluţia

$$\boxed{n = 4} \quad \text{şi} \quad \boxed{4 < \sqrt{4!} < 5}.$$

3°. **n** *este rădăcina patrată cu aproximaţie în plus a lui* **n!** Deci

$$n - 1 < \sqrt{n!} < n$$

de unde, ca la 2°, se găseşte soluţia

$$\boxed{n = 3} \quad \text{şi} \quad \boxed{2 < \sqrt{3!} < 3}.$$

Problema are deci soluţiile 1, 3, 4.

Se poate examina pe aceeaşi cale şi cazul aproximaţiunilor fracţionare.

Au examinat numai cazul 1° şi au găsit soluţia 1, D-nii: P. BUMBULICI, VL. I. CRIVĂŢ, G. G. CONSTANTINESCU, V. GR. DĂNCIULESCU, V. G. DRĂGUŢ, GH. TH. GHEORGHIU, P. I. GHIŞOIU, C. HEYTMANEK, M. MARGULIUS, D. D. MATEI, E. I. MIHALCEA, N. N. MIHĂILEANU, I. PETRICĂ şi I. C. SAVIN.

Nu menţionez numele rezolvitorilor cari au găsit soluţia $n = 0$ sau $n = \infty$.

GH. B.

PROBLEMA 4097. *Intr'un cerc dat, de diametru* AB, *se duce secanta* AC, *care face unghiul x cu diametrul. Prin punctul* D, *mijlocul razei* OB *se duce secanta* CD, *care taie cercul în* G. *Să se afle elementele triunghiului* ACG *în funcţie de raza cercului şi unghiul x.*

IULIU DEAC.

Soluţie dată de D nii: CEZAR IVĂNESCU, M. I. POPESCU-STĂNEŞTI, I. I. PETRESCU, V. I. C. VISARION.

Pentru uşurinţă vom schimba notaţia, punând diametrul AG în loc de AB, iar punctul de întretăiere G îl înlocuim prin B. Avem deci de calculat elementele triunghiului ABC în funcţie de raza R şi de unchiul x, notaţiile fiind acum cele obişnuite.

Laturile. Avem:

$$b = 2R\cos x . \qquad (1)$$

Pentru aflarea celorlalte două laturi, calculăm lungimea CD. In triunghiul ACD avem

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AD}\cos x .$$

Inlocuind

$$AC = b = 2R\cos x \quad \text{şi} \quad AD = \frac{3R}{2}$$

obţinem

$$\overline{CD}^2 = 4R^2\cos^2 x + \frac{9R^2}{4} - 6R^2\cos^2 x$$

$$= \frac{9R^2 - 8R^2\cos^2 x}{4} = \frac{R^2}{4}(9 - 8\cos^2 x)$$

deci

$$CD = \frac{R}{2}\sqrt{1 + 8\sin^2 x} .$$

Din triunghiurile asemenea ADB şi CDG avem:

$$\frac{AB}{CG} = \frac{AD}{CD} = \frac{DB}{GD}.$$

De unde

$$AB = \frac{AD \cdot CG}{CD} \quad \text{şi} \quad DB = \frac{AD \cdot GD}{CD}.$$

Deci:

$$AB = c = \frac{3R}{2} \cdot \frac{2R \sin x}{\frac{R}{2}\sqrt{1 + 8\sin^2 x}} = \frac{6R \sin x}{\sqrt{1 + 8\sin^2 x}} \cdot \tag{2}$$

şi

$$BC = a = CD + DB = \frac{R}{2}\sqrt{1 + 8\sin^2 x} + \frac{3R}{2} \cdot \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} \cdot \sqrt{1 + 8\sin^2 x}}$$

$$= \frac{\frac{R}{2}(1 + 8\sin^2 x) + \frac{3R}{2}}{\sqrt{1 + 8\sin^2 x}} = \frac{2R(1 + 2\sin^2 x)}{\sqrt{1 + 8\sin^2 x}} \tag{3}$$

Unghiurile. Avem:

$$\hat{B} = \hat{G} = 90^0 - x \tag{4}$$

$$\sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{6R \sin x}{2R\sqrt{1 + 8\sin^2 x}} = \frac{3 \sin x}{\sqrt{1 + 8\sin^2 x}} \tag{5}$$

iar

$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{1 + 2\sin^2 x}{\sqrt{1 + 8\sin^2 x}} \cdot \tag{6}$$

Suprafaţa.

$$S = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{2R(1 + 2\sin^2 x)}{2\sqrt{1 + 8\sin^2 x}} \cdot \frac{6R \sin x}{\sqrt{1 + 8\sin^2 x}} \cdot \cos x$$

$$= \frac{6R^2 \sin x \cos x (1 + 2\sin^2 x)}{1 + 8\sin^2 x} = \frac{3R^2 \sin 2x (1 + 2\sin^2 x)}{1 + 8\sin^2 x}.$$

Observaţii. 1. S'au primit soluţii analoage dela D-nii: EM. MEREUŢĂ-NEAMŢ, EM. PĂNOIU cu mici greşeli de calcul.

2. Alte soluţii mai puţin simple au trimes D-nii: D. D. MAVRODIN, M. MĂNESCU, M. MARGULIUS, C. I. STAN, M. LEONTE-NEGREA.

3. D-l CEZAR IVĂNESCU, care a sugerat înlocuirea lui G prin B, şi invers, servindu-se de relaţiile cunoscute:

$$h_a = \frac{bc}{2R}, \ldots ; \; h'_a = 2R\cos A, \ldots ; \; h''_a = 2R\cos B\cos C, \ldots ; \; OH = \sqrt{9R^2 - (a^2+b^2+c^2)}$$

a calculat în funcţie de R şi x, înălţimile, distanţele dela ortocentru la vârfuri şi la picioarele înălţimilor, precum şi distanţele OH şi OG.

4. In unele soluţii primite — şi anunţate pe copertă — nu s'au dat expresiunile elementelor cerute în enunţ, *direct*, în funcţie de R şi x, ci s'au aflat elementele altor triunghiuri din figură, rămânând ca apoi după calculul lor — în cazuri concrete — să se poată calcula elementele cerute în enunţ, servindu-ne de relaţiile cunoscute la triunghiurile oarecari ori dreptunghice.

5. Unele soluţii au prezentat greşeli de calcul prea mari.

G-AL G. I. L.

PROBLEMA 4248. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\operatorname{tg}^2(\alpha + x) + \operatorname{tg}^2(\beta - x) = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta$$

α şi β fiind daţi.

N. C.

Notăm:

$$\operatorname{tg}\alpha = a, \quad \operatorname{tg}\beta = b, \quad \operatorname{tg} x = y$$

avem:

$$\operatorname{tg}(\alpha + x) = \frac{a+y}{1-ay} \qquad \operatorname{tg}(\beta - x) = \frac{b-y}{1+by}$$

şi ecuaţia propusă devine:

$$\left(\frac{a+y}{1-ay}\right)^2 + \left(\frac{b-y}{1+by}\right)^2 = a^2 + b^2$$

sau:

$$(1-a^2b^2)(a^2+b^2)y^4 - 2(a-b)[1+ab(a^2+b^2)+ab]y^3$$
$$+ [2(1+ab)^2 + 4ab - (a-b)^2(a^2+b^2) + 2ab(a^2+b^2)]y^2$$
$$- 2(b-a)(a^2+b^2+ab+1)y = 0.$$

Avem deci soluţia:

$$y = 0 \qquad \therefore \qquad \operatorname{tg} x = 0$$
$$x = k\pi$$

şi ne rămâne:

$$(1-a^2b^2)(a^2+b^2)y^3 - 2(a-b)[1+ab(a^2+b^2)+ab]y^2$$
$$+ [2(1+ab)^2 + 4ab - (a-b)^2(a^2+b^2) + 2ab(a^2+b^2)]y$$
$$- 2(b-a)(a^2+b^2+ab+1) = 0$$

care se desface în produsul

$$[(1+ab)y-(b-a)]\,[(1-ab)(a^2+b^2)y^2$$
$$+(b-a)(a^2+b^2+2)y+2(a^2+b^2+ab+1)]=0$$

de unde avem:

$$(1)\qquad y=\frac{b-a}{1+ab}$$

$$(2)\quad y=\frac{(a-b)(a^2+b^2+2)\pm\sqrt{(b-a)^2(a^2+b^2+2)^2-8(1-ab)(a^2+b^2)(a^2+b^2+ab+1)}}{2(1-ab)(a^2+b^2)}$$

din (1) deducem:

$$\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}x=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)\qquad x=k\pi+\beta-\alpha.$$

Ecuaţia dată admite prin urmare soluţiunile

$$x=k\pi$$

$$x=k\pi+\beta-\alpha$$

iar din (2):

$$\operatorname{tg}x=\frac{(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+2)}{2(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta)}$$

$$\pm\frac{\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)^2(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+2)^2-8(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\ \operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta)(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+1)}}{2(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta)}$$

$$=\frac{A\pm B}{C}$$ [unde A, B şi C sunt cantităţi cunoscute ce pot fi uşor calculate cu ajutorul datelor din enunţ, de unde mai rezultă soluţiunile:

$$x=k\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{A\pm B}{C}\right).$$

Au rezolvat problema D-nii NEGREA A. MIRCEA-LEONTE (Brăila), DIMITRIE D. MAVRODIN (cl. VII lic. Eminescu, Bucureşti) şi PANAIT C. MAZILU (Elev-Inginer).

Soluţie incomplectă dată de D-l MARTEŞ GRIGORE (Şcoala Navală).

AD. B.

PROBLEMA 4574. *Fie* I *intersecţia diagonalelor unui patrulater ortodiagonal, iar* P, Q, R, S *proiecţiile lui* I *sub acelaşi unghiu* α *şi în acelaşi sens pe laturile patrulaterului. Se cere:*

1°. *Să se arate că patrulaterul* PQRS *este inscriptibil.*

2°. *Locurile geometrice ale intersecţiilor laturilor opuse din patrulaterul* PQRS, *când unghiul* α *variază.*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de D-nii: S-LT. I. PAREPEANU şi AL. D. STOICA (lic. «Marele Voevod Mihai»).

1°. Notăm cu P, Q, R, S proecţiile punctului I sub acelaşi unghiu α, respectiv pe laturile AB, BC, CD, DA ale patrulaterului dat. Patrulaterul IPBQ este inscriptibil deoarece:

$$(1) \qquad \sphericalangle IPB + \sphericalangle BQI = \alpha + 180^0 - \alpha = 180^0.$$

La fel se arată că patrulaterele IQCR, IRDS şi ISAP sunt inscriptibile. Rezultă imediat că:

$$(2) \qquad \sphericalangle IPQ = \sphericalangle IBC \; ; \; \sphericalangle IPS = \sphericalangle IAD \; ;$$

$$\sphericalangle IQR = ICB \; ; \; IQS = \sphericalangle IDA.$$

Şi adunând aceste egalităţi obţinem:

$$(3) \qquad \sphericalangle SPQ + \sphericalangle QRS = \sphericalangle IBC + \sphericalangle ICB + \sphericalangle IAD + \sphericalangle IDA = 180^0$$

deoarece triunghiurile IBC şi IAD sunt dreptunghice.

Relaţia (3) arată că patrulaterul PQRS este inscriptibil.

2°. Inainte de a trece la partea a doua a problemei să stabilim următoarea proprietate: *dacă* A_1 *şi* A_2 *sunt proecţiile piciorului* A' *al înălţimei* AA' *din triunghiul* ABC (A_1 *pe* AB; A_2 *pe* AC), *dreapta* A_1A_2 *taie pe* BC *într'un punct* D *astfel încât avem:*

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\overline{A'B^2}}{\overline{A'C^2}} \; .$$

In adevăr aplicând teorema lui MENELAUS avem:

$$(4) \qquad \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2A}} \times \frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}} = 1.$$

Insă în triunghiurile dreptunghice AA'B, AA'C:

$$\frac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2A}} = \frac{\overline{A'C}^2}{\overline{AA'}^2} \; ; \; \frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{AA'}^2}{\overline{A'B}^2}$$

care introduse în (4) ne dau tocmai relaţia căutată. Această relaţie arată că punctul D este fix dacă A' este fix, deci atunci când A descrie înălţimea AA'. (« S. G. M. » Vol. II exerc. VIII. 32).

Cu această observaţie să trecem la partea a doua a problemei. PQRS este patrulaterul *copodar* al punctului I faţă de patrulaterul ABCD (Se numeşte poligon copodar al unui punct I faţă de un poligon dat, poligonul format de proecţiile, sub acelaşi unghiu, al punctului I pe laturile poligonului dat). Atunci se ştie că PQRS rămâne mereu asemenea cu el însuşi având ca centru *permanent de asemănare* punctul I [1]). (Se observă că triunghiurile IPQ etc., au unghiurile constante).

Deoarece punctele P, Q, etc. descriu drepte, orice punct al acestei figuri va descrie o linie dreaptă, prin urmare şi punctele

$$M \equiv (PQ, RS) \text{ şi } N \equiv (QR, SP)\ ^2).$$

Pentru a fixa poziţia dreptei descrisă de punctul M vom lua $\alpha = 90^0$, adică vom considera poligonul podar P'Q'R'S'. Aplicând proprietatea enunţată mai sus triunghiurilor ABC şi CDA, putem spune că dreptele P'Q' şi R'S' se întâlnesc într'un punct M' pe diagonala AC astfel încât avem:

$$(5) \qquad \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'C}} = \frac{\overline{IA}^2}{\overline{IC}^2} \cdot$$

Apoi când IP devine perpendiculară (IP') pe AB şi IM devine perpendiculară (IM') pe dreapta MM' descrisă de M [3]).

Aşa dar locul geometric descris de punctul M este o dreaptă perpendiculară pe diagonala AC. In acelaşi fel se arată că locul

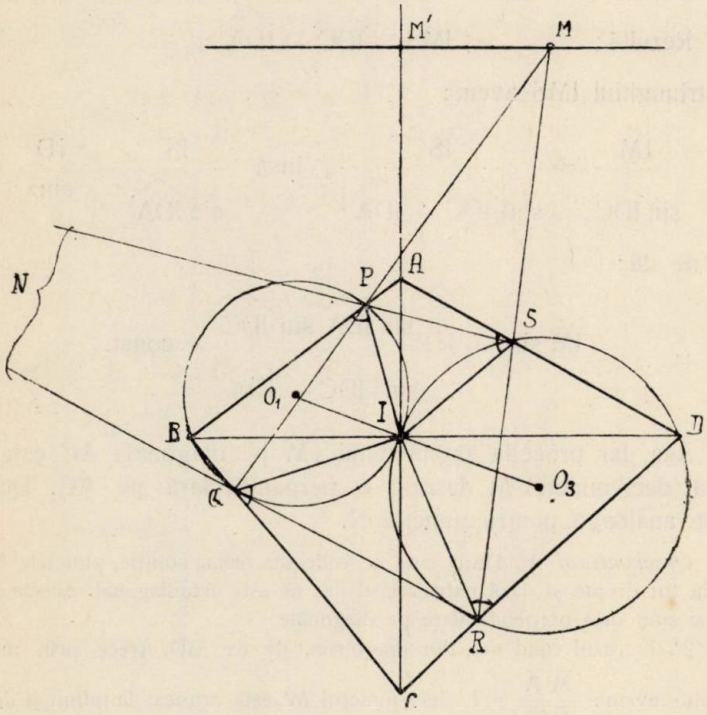
---

1) F. G. M. Exercices de géometrie pag. 1237.
2) Idem pag. 621.
3) Idem pag. 465.

punctului N va fi o perpendiculară NN′ pe diagonala BD astfel încât:

$$\frac{\overline{N'B}}{\overline{N'D}} = \frac{\overline{IB}^2}{\overline{ID}^2}$$

(N′ este pe BD).



Soluția II-a. 1°. Prima parte ca în soluția precedentă.

2°. Să notăm cu O_1, O_2, O_3, O_4 centrele cercurilor PBQI, QCRI, RDSI, SAPI și cu O centrul cercului PQRS. O_1 se va găsi pe mediatoarea segmentului BI astfel încât $\sphericalangle BO_1I = 2\alpha$, fiind unghiu la centru. Rezultă $\sphericalangle O_1IB = 90^0 - \alpha$. La fel se arată că $\sphericalangle O_3ID = 90^0 - \alpha$. Aceasta arată că punctele O_1, I, O_3 sunt colineare, deci cercurile O_1 și O_3 sunt tangente în I. Tangenta comună va face cu BD unghiul α, deoarece e perpendiculară pe O_1O_3.

Cercurile (O), (O_1), (O_3) au centrul radical la întâlnirea secantelor PQ și RS, deci în punctul M. Aceasta arată că MI este

tangenta comună cercurilor O_1 şi O_3. Atunci:

$$\sphericalangle MIS = \sphericalangle IDA = \frac{\text{măs. arc. } IS}{2}$$

$$\sphericalangle ISM = 180^0 - \overset{\frown}{ISR} = 180^0 - \overset{\frown}{IDC}$$

Rezultă: $\sphericalangle IMS = \overset{\frown}{IDC} - \overset{\frown}{IDA}$.

Din triunghiul IMS avem:

$$\frac{\overline{IM}}{\sin \overset{\frown}{IDC}} = \frac{\overline{IS}}{\sin\left(\overset{\frown}{IDC} - \overset{\frown}{IDA}\right)}, \text{ însă } \frac{\overline{IS}}{\sin \overset{\frown}{IDA}} = \frac{\overline{ID}}{\sin\alpha}$$

care ne dă:

$$\overline{IM} \sin\alpha = \overline{ID} \frac{\sin \overset{\frown}{IDA} \sin \overset{\frown}{IDC}}{\sin\left(\overset{\frown}{IDC} - \overset{\frown}{IDA}\right)} = \text{const.}$$

Aşa dar proecţia segmentului $\overline{IM}$ pe diagonala AC este constantă, deci punctul M descrie o perpendiculară pe AC. Demonstraţie analoagă pentru punctul N.

Observaţiuni. 1°. După cum se vede din prima soluţie, punctele M şi N descriu tot drepte şi dacă patrulaterul dat nu este ortodiagonal. Aceste drepte nu mai sunt însă perpendiculare pe diagonale

2°. In cazul când una din diagonale, de ex. BD, trece prin mijlocul celeilalte avem: $\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'C}} = 1$, deci punctul M' este aruncat la infinit şi dreapta MM' la fel. Patrulaterul PQRS devine trapez.

PROBLEMA 4687. *Un baston are o tijă rectilinie terminată la un cap cu un mâner semicircular. Care este poziţia de echilibru când îl punem într'un cuiu? In ce caz vârful liber cade pe verticala cuiului? Aceeaşi problemă când capătul semicircular se aşează pe cuiu. Se va neglija efectul grosimii şi frecăturile pe cuiu.*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-l VIRGILIU ECKSTEIN (Școala Politecnică din București).

Fie BAC bastonul având partea AB rectilinie și AC semicirculară. Fie l lungimea părții rectilinii, r raza medie a părții circulare și O centrul ei. Fie G_1 și G_2 centrele de greutate ale acestor două părți și G centrul de greutate al bastonului întreg. Punctele G_1, G, G_2 sunt colineare.

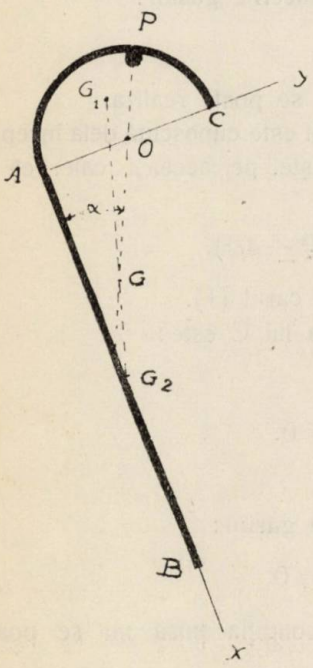
Să raportăm bastonul la axele AX și AY dirijate după AB și AC. Coordonatele punctelor G_1 și G_2 sunt

$$(-2r/\pi,\ r) \quad \text{și} \quad (\tfrac{1}{2}\ l,\ 0).$$

Fie x și y coordonatele lui G. Fie g greutatea bastonului pe metru liniar. Pentru a găsi pe x și y, avem ecuațiile:

$$(lg.\tfrac{1}{2}\ l) - [\pi rg(2r/\pi)] = (l+\pi r)g.x \ , \quad (lg.0) + (\pi rg.r) = (l+\pi r)g.y$$

$$\therefore \quad x = \tfrac{1}{2}\ (l^2 - 4r^2)/(l+\pi r) \ , \quad y = \pi r^2/(l+\pi r).$$



1. Dacă punem bastonul în cuiu, el alunecă până ce, după principiul lui TORICELLI, punctul G se va scobori cât mai jos, compatibil cu legăturile sistemului. Trebue deci ca distanța PG să fie cât mai mare posibil. Insă distanța cea mai lungă dela un punct P la un cerc trece prin centru; deci GP trece prin O.

Pe de altă parte G trebue să fie pe verticala lui P, căci asupra bastonului acționează greutatea lui în G și reacțiunea cuiului din P. Deci dreapta POG este verticală și prin urmare tangenta în P la semicercul bastonului este orizontală, ca perpendiculară pe verticala PO, rază a cercului. Poziția de echilibru este acum determinată.

Să luăm ca element de fixat poziția de echilibru a bastonului unghiul pe care-l face tija lui cu verticala, și fie α acest unghiu.

Găsim $\operatorname{tg}\alpha$ făcând raportul dintre diferența ordonatelor lui G și O față de diferența absciselor aceloraşi puncte. Găsim:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left[\frac{\pi r^2}{l+\pi r} - r\right] \Big/ \left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{l^2-4r^2}{l+\pi r}\right)\right]$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\alpha = 2rl/(l^2-4r^2).$$

Dacă $l > 2r$ tija bastonului taie verticala lui G. Dacă $l \leqslant 2r$ verticala lui G trece prin extremitatea mânerului.

Pentru ca B să cadă pe verticala lui P, trebue ca punctele O, G şi B să fie colineare, adică:

$$\begin{vmatrix} r & 0 & 1 \\ 0 & -l & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\therefore \quad lx = r(l+x).$$

Inlocuind pe x şi y şi făcând reducerile găsim:

$$l^2 + 4r^2 = 0,$$

ceea ce nu se poate. Condiția pusă nu se poate realiza.

2. In acest caz direcțiunea verticalei este cunoscută dela început, şi este anume direcțiunea GB. Se găseşte, pe aceeaşi cale, că în acest caz avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2r(\pi r + 2l)/(l^2-4r^2).$$

Facem aceleaşi observațiuni ca în cazul (1).

Condiția ca B să fie sub verticala lui C este:

$$\begin{vmatrix} 2r & 0 & 1 \\ 0 & -l & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desvoltând şi înlocuind pe x şi y găsim:

$$4r^2 + \pi rl + l^2 = 0.$$

Această relație fiind imposibilă, condiția pusă nu se poate realiza.

PROBLEMA 4827. *Să se arate că:*

$$A_m^p A_{n-p-1}^{m-p} + A_m^{p-1} A_{n-p}^{m-p+1} + A_m^{p-2} A_{n-p+1}^{m-p+2} + \ldots$$

$$+ A_m^1 A_{n-2}^{m-1} + A_m^0 A_{n-1}^m = A_n^m - A_m^{p+1} A_{n-p-1}^{m-p-1}$$

în care A *este simbolul de aranjări.*

ADRIAN BUŞILĂ.

I. *Soluţie* dată de D-l M. C. POSTELNICESCU (elev Şcoala Politechnică, Bucureşti).

Ţinând seama de formulele cunoscute:

$$A_m^n = P_n C_m^n \; ; \; C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!} = C_m^{m-n},$$

în care P este simbolul de permutări, iar C de combinări, prima parte a relaţiei din enunţ devine succesiv:

$$\sum_{k=0}^{p} A_m^k \cdot A_{n-k-1}^{m-k} = p!(m-p)! C_m^p C_{n-p-1}^{m-p}$$

$$+ (p-1)!(m-p+1)! C_m^{p-1} C_{n-p}^{m-p+1}$$

$$+ (p-2)!(m-p+2)! C_m^{p-2} C_{n-p+1}^{m-p+2} + \ldots + 0! \, m! \, C_m^0 C_{n-1}^m$$

$$= \frac{m!}{C_m^p} \cdot C_m^p C_{n-p-1}^{m-p} + \frac{m!}{C_m^{p-1}} C_m^{p-1} C_{n-p}^{m-p+1} + \frac{m!}{C_m^{p-2}} C_m^{p-2} C_{n-p+1}^{n-p+2}$$

$$+ \ldots + \frac{m!}{C_m^1} C_m^1 \cdot C_{n-2}^{m-1} + \frac{m!}{C_m^0} C_m^0 C_{n-1}^m$$

$$= m! [C_{n-p-1}^{m-p} + C_{n-p}^{m-p+1} + C_{n-p+1}^{m-p+2} + \ldots + C_{n-1}^m]$$

$$= m! [C_{n-p-1}^{n-m-1} + C_{n-p}^{n-m-1} + C_{n-p+1}^{n-m-1} + \ldots + C_{n-1}^{n-m-1}]$$

$$= m! \sum_{k=0}^{p} C_{n-k-1}^{n-m-1}$$

în baza formulei cunoscute:

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$$

vom avea succesiv:

$$C_{n-p}^{n-m} = C_{n-p-1}^{n-m} + C_{n-p-1}^{n-m-1}$$

$$C_{n-p+1}^{n-m} = C_{n-p}^{n-m} + C_{n-p}^{n-m-1}$$

$$C_{n-p+2}^{n-m} = C_{n-p+1}^{n-m} + C_{n-p+1}^{n-m-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{n-1}^{n-m} = C_{n-2}^{n-m} + C_{n-2}^{n-m-1}$$

$$C_{n}^{n-m} = C_{n-1}^{n-m} + C_{n-1}^{n-m-1}$$

de unde, prin adunarea membrilor respectivi, obținem:

$$\sum_{k=0}^{p} C_{n-k-1}^{n-m-1} = C_n^{n-m} - C_{n-p-1}^{n-m}.$$

Conform celor stabilite avem în definitiv:

$$\sum_{k=0}^{p} A_m^k A_{n-k-1}^{m-k} = m! \sum C_{n-k-1}^{n-m-1} = m!\,(C_n^{n-m} - C_{n-p-1}^{n-m})$$

$$= m!\,(C_n^m - C_{n-p-1}^{m-p-1}) = P_m C_n^m - m!\,\frac{A_{n-p-1}^{m-p-1}}{(m-p-1)!}$$

$$= A_n^m - (p+1)!\,C_m^{p+1} A_{n-p-1}^{m-p-1} = A_n^m - A_m^{p+1} A_{n-p-1}^{m-p-1}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=0}^{p} A_m^k A_{n-k-1}^{m-k} = A_n^m - A_m^{p+1} \cdot A_{n-p-1}^{m-p-1}.$$

II. *Soluție* dată de D-nii: DIMITRIE MAVRODIN și ADOLF O. ȘAICHIN (Cl. VIII-a, Lic. Matei Basarab, București).

Termenul general al sumei poate fi scris succesiv:

$$A_m^{p-i} A_{n-p+i-1}^{m-p+i} = \frac{m!}{(m-p+i)!} \cdot \frac{(n-p+i-1)!}{(n-m-1)!}$$

$$= \frac{m!}{(n-m-1)!} A_{n-p+i-1}^{n-m-1}.$$

Relația de demonstrat devine:

$$\frac{m!}{(n-m-1)!}\left[A_{n-p-1}^{n-m-1} + A_{n-p}^{n-m-1} + \ldots + A_{n-1}^{n-m-1}\right]$$

$$= A_n^m - \frac{m!}{(n-m)!} A_{n-p-1}^{n-m}$$

sau încă:

$$A_{n-p-1}^{n-m-1} + A_{n-p}^{n-m-1} + \ldots + A_{n-1}^{n-m-1} = \frac{1}{n-m} \cdot A_n^{n-m} - \frac{1}{n-m} A_{n-p-1}^{n-m}$$

$$= \frac{1}{n-m} (A_n^{n-m} - A_{n-p-1}^{n-m}).$$

In relația cunoscută:

$$(1) \qquad A_{n-1}^{p-1} + A_{n-2}^{p-1} + \ldots + A_{p-1}^{p-1} = \frac{1}{p} A_n^p$$

făcând $n = m$, obținem:

$$(2) \qquad A_{m-1}^{p-1} + A_{m-2}^{p-1} + \ldots + A_{p-1}^{p-1} = \frac{1}{p} A_m^p$$

presupunând apoi $n > m$ și scăzând relația (2) din (1), obținem:

$$A_{n-1}^{p-1} + A_{n-2}^{p-1} + \ldots + A_m^{p-1} = \frac{1}{p} (A_n^p - A_m^p)$$

în care făcând

$$p = n - m \quad \text{și} \quad m = n - p - 1$$

avem:

$$A_{n-1}^{n-m-1} + A_{n-2}^{n-m-1} + \ldots + A_{n-p-1}^{n-m-1} = \frac{1}{n-m} (A_n^{n-m} - A_{n-p-1}^{n-m})$$

adică tocmai relația de demonstrat.

AD. B.

PROBLEMA 4835. *Se consideră în plan o dreaptă* (Δ) *și un punct fix* A. *Fie* A_1 *proiecția lui* A, *și* M *un punct mobil pe* (Δ); *o dreaptă* (D) *trecând prin* M *și făcând cu* (Δ) *un unghiu* (DM, Δ) *egal cu de două ori unghiul* MAA_1. *Luăm pe* (D) *punctul* P, *astfel ca* M_1 *fiind proiecția lui* M *pe* AP, $MM_1 = R.MP$. *Locul lui* P.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție dată de D-l NICOLAE D. ȘTEFĂNESCU (lic. mil. „N. Filipescu"). Se observă că (D) *e simetrica dreptei* (Δ) *față de* AM; fie Q simetricul lui P față de AM — deci pe (Δ); în triunghiul MM_1P, conform enunțului, rezultă că *unghiul* APM *e constant*, deci și simetricul lui, AQM, adică Q *e fix;* dar AP = AQ în baza simetriei, deci *locul lui* P *este cercul de centru* A, *rază* AQ.

D-l ACHILLE PETRESCU (clasa VI-a, lic. mil. Iași), consideră proiecția N a lui A pe D; din patrulaterul inscriptibil AMM_1N

rezultă că unghiul NAP este egal cu (D, MM_1), deci constant, dar $AN = AA_1 =$ constant; triunghiul dreptunghiu ANP e deci invariabil ca mărime şi P descrie un cerc de centru A.

PROBLEMA 4893. *Ce puteri se termină cu o cifră dată?*

I. V. MĂTIEŞ.

Soluţia I-a.

Cifra cu care se termină puterea	Cifra cu care se termină numărul dat	Puterea la care se ridică numărul dat
0	0	n
1	oricare	0
	1	n
	3 sau 7	$4n$
	9	$2n$
2	2	$4n + 1$
	8	$4n + 3$
3	3	$4n + 1$
	7	$4n + 3$
4	2 sau 8	$4n + 2$
	4	$2n + 1$
5	5	n
6	2 sau 8	$4n$
	4	$2n$
	6	n
7	3	$4n + 3$
	7	$4n + 1$
8	2	$4n + 3$
	8	$4n + 1$
9	3 sau 7	$4n + 2$
	9	$2n + 1$

Au rezolvat analog problema D-nii: Aspirant C. I. CHIRIAC, V. I. FLORESCU (Lic. militar „N. Filipescu"); C. V. PANTELIMON (Lic. militar Iaşi); M. D. POPA (Lic. Militar Iaşi) şi M. ROŞCULEŢ.

Soluția II-a.

Dacă considerăm un număr oarecare $N = 10z + u$ în care dăm cifrei u toate valorile ce le poate lua și apoi ridicăm numărul la toate puterile, putem întocmi următorul tablou:

Puterea	Ultima cifră a puterei									
1^a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^a	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
3^a	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
4^a	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
5^a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

și din acest tablou rezultă în mod evident:

1. Toate puterile numerelor terminate respectiv cu 0, 1, 5, 6 se termină cu cifra ultimă a numărului.

2. Puterea $(4n + 1)$ a oricărui număr se termină cu aceeași cifră ca numărul.

3. Puterea $(2n + 1)$ a numerelor terminate respectiv cu 4 sau 9 se termină cu cifra ultimă a numărului.

4. Puterea $4n$ a numerelor terminate respectiv cu 1, 3, 7, 9 se termină cu cifra 1.

5. Puterea $4n$ a numerelor terminate respectiv cu 2, 4, 6, 8 se termină cu cifra 6.

Au rezolvat analog problema D-nii: T. C. ȘTEFAN (Liceul Traian, Severin) și M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. Mihai Viteazu, Alba-Iulia).

Notă. 1. S'au mai primit soluțiuni puțin diferite dela D-nii: C. MOTAȘ, S. R. TURCU și H. L. REISCHER.

2. Soluția a doua a fost redactată după soluțiunea trimisă de D-l AL. VASILESCU-STABU.

I. L.

PROBLEMA 4903. *Care sunt patratele mai mici ca un milion în interiorul cărora se găsesc două zerori, — și numai două, — alături?*

I. IONESCU.

Numărul n^2 având grupa 00 în interior, el are cel puţin patru cifre şi fiind mai mic decât 1 000 000 are cel mult şase cifre. De aci reiese că avem:

$$\sqrt{1\,000} \leqslant n < \sqrt{1\,000\,000},$$

$$32 \leqslant n < 1\,000.$$

După enunţ, n^2 se poate termina cu $00u$, $00zu$, $00szu$ sau $00mszu$. Să examinăm aparte fiecare caz.

1. — *n^2 se termină cu $00u$.* După tabloul dat în *Gazeta Matematică*, Anul XXXVII, pag. 368, nu putem avea patrate terminate în acest fel decât dela numere de formele $250m \pm 1$, $500m \pm 2$ şi $250m \pm 3$, ale căror patrate se termină cu 001, 004, 009. In ordinea mărimii lor, avem dar următoarele 17 soluţii:

$247^2 = 61\,009$; $249^2 = 62\,001$; $251^2 = 63\,001$; $253^2 = 64\,009$;

$497^2 = 247\,009$; $498^2 = 248\,004$; $499^2 = 249\,001$; $501^2 = 252\,004$;

$502^2 = 252\,004$; $503^2 = 253\,009$; $747^2 = 558\,009$; $749^2 = 561\,001$;

$751^2 = 564\,001$; $753^2 = 567\,009$; $997^2 = 994\,009$; $998^2 = 996\,004$;

$999^2 = 998\,001.$

2. — *n^2 se termină cu $00zu$.* După tabloul indicat la No. (1), se vede că terminaţia $0zu$ o dau patratele numerelor de forma $n = 50m \pm 5$; $n = 250m \pm 7$, 9, 33, 71 şi $n = 500m \pm 4$, 6, 8, 32, 64, 78, 84, 138, 226. Să le examinăm pe rând.

Dacă $n = 50m \pm 5$, avem $n^2 = 500m\,(5m \pm 1) + 25$. Suprimând grupa zu de la urmă, rămâne că $5m\,(5m \pm 1) = \mathfrak{M}100$, sau $m\,(5m \pm 1) = \mathfrak{M}20$. Parenteza nu mai poate fi $\mathfrak{M}5$, şi trebue deci ca $m = 5p$. Relaţia devine $p\,(25p \pm 1) = \mathfrak{M}4$. Inlocuind în valoarea lui n găsim $n = 250p \pm 5$. Cum $n < 1\,000$ trebue să luăm $p \leqslant 4$. Apoi $n \geqslant 32$. Deci $p > 0$. Relaţia de condiţie pentru p se poate scrie, suprimând $\mathfrak{M}4$, în felul acesta: $p\,(p \pm 1) = \mathfrak{M}4$. Deci nu putem lua decât $p = 1$ cu semnul —, $p = 3$ cu semnul + şi $p = 4$ cu semnul —, căci semnul + ar da $n > 1\,000$. De aci următoarele trei soluţii:

$245^2 = 60\,025$; $755^2 = 570\,025$; $995^2 = 990\,025.$

Dacă $n = 250m \pm a$ cu $a = 7, 9, 33, 71$, — deci $a^2 = 49, 81, 1\,089, 5\,041$, — să punem $a^2 = 1\,000b + c$ şi deci respectiv $b = 0{,}0\,1, 5$ şi $c = 49, 81, 89, 41$. Avem atunci

$$n^2 = 500m\,(152m \pm a) + 1\,000b + c,$$

din care suprimând ultimele două cifre c, numărul rămas trebue, să fie $\equiv 100$. Deci

$$5m\,(125m \pm a) + 10b = 100k \quad \text{sau} \quad m\,(125m \pm a) + 2b = 20k.$$

Dacă $b = 0$, cum $a \not\equiv 5$ trebue ca $m = 5p$. Deci $n = 1250p \pm a$. Nu putem lua $p = 0$, căci $a < 100$, şi nu putem lua $p \geqslant 1$, căci ar da $n > 1\,000$. Deci nu avem soluţie pentru $b = 0$. — Dacă $b = 1$ pentru $a = 33$ găsim ca mai sus că $m\,(125m \pm 33) + 2 = 20k$ şi suprimând toţi $\equiv 20$ din parenteză rămâne $m(5m \pm 13) + 2 = 20k'$. Nu putem lua $m > 4$ căci iese $n > 100$. Deci singurele valori, pe care le poate lua prima parte a ultimei egalităţi, sunt -6, 20, -4, 48, 8, 26, 30. Numai a doua convine, care corespunde lui $m = 1$ cu $+$; deci avem o soluţie numai:

$$283^2 = 80\,089.$$

Dacă $b = 5$, pentru $a = 71$, condiţia devine:

$$m\,(125m \pm 71) + 10 = 20k.$$

Se vede că e necesar ca $m = 5p$ şi deci $n = p\,(1250p \pm 71)$ care e neadmisibil, dând $n > 100$.

Dacă $n = 500m \pm a$ cu $a = 4, 6, 8, 32, 64, 78, 84, 138, 226$ la care corespund $b = 0, 0, 0, 1, 4, 6, 7, 19, 54$, găsim, ca şi în cazul precedent condiţia $m\,(250m \pm a) + b = 10k$. Dacă $b = 0$ trebue $m = 5p$ şi deci $n = 2500p \pm a > 100$, deci inadmisibil. Apoi a fiind pereche, condiţia nu este satisfăcută pentru b nepereche. Deci este de cercetat numai valorile $b = 4, 6, 51$, care vin dela $a = 64, 78, 226$. Condiţia devine în aceste cazuri, — suprimând $\equiv 10$ din prima parte: $\pm 4m + 4 = 10k'$; $\pm 8m + 6 = 10k'$; $\pm 6m + 1 = 10k'$. Apoi m nu poate trece de 2 căci ar trece n de 100. Prima condiţie este satisfăcută pentru $m = 1$ cu semnul $-$; a doua pentru $m = 2$ cu semnul $-$; a treia este imposibilă, căci prima parte e nepereche. De aci următoarele două soluţii:

$$436^2 = 190\,096; \quad 922^2 = 850\,084.$$

3. — n^2 *se termină cu 00szu.* In acest caz n^2 începe cu $t00$ în care t este o cifră semnificativă. In acest caz, calea de urmat, este alta mai simplă pentru aflarea rezultatelor. Luăm un număr de forma $t0\,000$ sau $t00\,000$ şi le extragem rădăcina patrată întreagă. Acea rădăcină sporită cu 1 o ridicăm la patrat şi dacă cifra a doua şi a treia dela stânga sunt 0, avem o soluţie. Sporim rădăcina cu 2 şi dacă găsim un patrat de aceeaşi formă, mai avem o altă soluţie. Cazul acesta nu se întâmplă însă. Se găsesc astfel uşor soluţiile:

$317^2 = 100\,489$; $448^2 = 200\,704$; $548^2 = 300\,304$; $633^2 = 400\,689$;

$775^2 = 600\,625$; $837^2 = 700\,569$; $949^2 = 900\,601$,

în număr de şapte.

Problema admite dar în total 30 soluţii.

I. I.

Notă: Problema a fost rezolvată de D-l REISCHER HERMANN (Clasa VII, Liceul Internat, Iaşi), cu un număr mare de incercări pierzând patru din ultimele şapte soluţii: 283, 448, 548, 949.

EXERCIŢII

32. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin(a+x)+1}{\cos(a+x)}.$$

S-LT MIRCEA GRUMĂZESCU.

R. Membrul al 2-lea al ecuaţiei date se poate scrie:

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(a+x) + \frac{1}{\cos(a+x)}$$

Trecând in membrul 1 pe $\operatorname{tg}(a+x)$ şi făcând suma calculabilă prin ogaritmi, avem:

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg}(a+x) = \frac{1}{\cos(a+x)}$$

sau:

$$\frac{\sin(x-a)}{\cos 2x \cos(a+x)} = \frac{1}{\cos(a+x)}.$$

O soluție a problemei este dată de ecuația:

$$\cos(a + x) = 0.$$

Alte soluții sunt date de ecuația rămasă:

$$\sin(x - a) = \cos 2x$$

sau:

$$\sin(x - a) - \cos 2x = 0.$$

Făcând membrul 1 calculabil prin log. avem:

$$2\cos\left(\frac{-(x+a)}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x-a}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Alte două ecuații cari ne mai dau 2 soluții ale problemei.

33. Să se stabilească identitatea:

$$\frac{(b+c)^2(ab^3 - ac^3) + (c+a)^2(bc^3 - ba^3) + (a+b)^2(ca^3 - cb^3)}{(b+c)(a^2b^3 - a^2c^3) + (c+a)(b^2c^3 - b^2a^3) + (a+b)(c^2a^3 - c^2b^3)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

CEZAR IVĂNESCU.

R. Să considerăm determinanții:

$$D_1 = \begin{vmatrix} bc & (b+c)^2 & a^2 \\ ca & (c+a)^2 & b^2 \\ ab & (a+b)^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a^2(b+c) & a^3 \\ 1 & b^2(c+a) & b^3 \\ 1 & c^2(a+b) & c^3 \end{vmatrix}.$$

Desvoltând determinanții D_1 și D_2 după elementele coloanei a doua, obținem respectiv numărătorul și numitorul primului membru al identității de stabilit, adică:

$$D_1 = (b+c)^2(ab^3 - ac^3) + (c+a)^2(bc^3 - ba^3) + (a+b)^2(ca^3 - cb^3)$$

$$D_2 = (b+c)(a^2b^3 - a^2c^3) + (c+a)(b^2c^3 - b^2a^3) + (a+b)(c^2a^3 - c^2b^3).$$

Pe de altă parte, ținând seamă de proprietățile determinanților, putem scrie succesiv:

$$D_1 = \begin{vmatrix} bc & b^2+c^2 & a^2 \\ ca & c^2+a^2 & b^2 \\ ab & a^2+b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} bc & 1 & a^2 \\ ca & 1 & b^2 \\ ab & 1 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\begin{vmatrix} abc & a & a^3 \\ abc & b & b^3 \\ abc & c & c^3 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2+b^2+c^2)(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

Apoi pentru D_2, adunând coloana a treia la coloana a doua şi dând pe $(a+b+c)$ factor comun avem:

$$D_2 = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 0 & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ca).$$

Ţinând seamă de cele două expresii obţinute pentru D_1 şi D_2 avem:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{(b+c)^2(ab^3-ac^3)+(c+a)^2(bc^3-ba^3)+(a+b)^2(ca^3-cb^3)}{(b+c)(a^2b^3-a^3c^3)+(c+a)(b^2c^3-b^3a^3)+(a+b)(c^2a^3-c^3b^3)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2)(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}{(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ca)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Identitatea cerută este astfel stabilită.

PROBLEME PROPUSE

4951. Se cere patratul de şase cifre:

abbaab.

I. IONESCU.

4952. Să se găsească patratele care se termină cu puterea a patra a ultimei cifre a rădăcinilor patrate. In afară de cele terminate în *zero* sau *unu*, care cel mai mic număr al cărui patrat satisface condiţiile enunţului?

M. GHERMĂNESCU.

4953. Dacă $2n+1$ este număr prim, să se arate că avem totdeauna:

$$(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n) = \mathcal{M}.(2n+1).$$

CPT. COMANDOR GR. ZAPAN.

4954. Există triunghiuri înscrise într'un cerc dat, a căror bază să fie latura triunghiului echilateral, iar înălţimea respectivă, latura patratului înscris în acel cerc? Să se extindă la alte poligoane regulate.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

4955. Fie A', B', C' punctele de tangență al cercului I înscris în triunghiul ABC respectiv cu laturile BC, CA, AB; H ortocentrul triunghiului A'B'C'; A'', B'', C'' punctele unde dreptele AI, BI, CI taie respectiv pe B'C', C'A', A'B'. Paralelele duse prin I respectiv la A''H, B''H, C''H taie laturile BC, CA, AB respectiv în A_1, B_1, C_1. Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

TH. G. COCEA.

4956. Se dau în planul triunghiului ABC trei puncte M, N, P astfel că avem:

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MAP = \sphericalangle PAC = \alpha$$

$$\sphericalangle MBA = \sphericalangle MBN = \sphericalangle NBC = \beta$$

$$\sphericalangle NCB = \sphericalangle NCP = \sphericalangle PCA = \gamma.$$

Fie M', N', P' punctele determinate de perechile de drepte (BN, AP); (CP, BM); (AM, CN). Dreptele MM', NN', PP' taie laturile AB, BC, CA respectiv în punctele M'', N'', P''. Să se arate că dreptele AN'', BP'', CM'' sunt concurente în același punct.

O. N. ȚINO.

4957. Fie ABC, AB'C' două triunghiuri ale căror cercuri circumscrise sunt tangente în A, Δ și Δ' două perpendiculare pe BC, B'C' întâlnind AB, AB' în P, P' și AC, AC' în Q, Q'. Cercurile APQ, AP'Q' sunt tangente între ele și ortogonale cercurilor ABC, AB'C'.

C. IONESCU-BUJOR.

4958. Se dă un cerc O de rază R și un punct P în planul cercului. Prin punctul P să se ducă o coardă $\overline{AB}$ astfel ca apotema coardei să fie egală cu segmentul $\overline{AP}$. Discuțiune.

Să se dea o construcțiune geometrică simplă soluțiunii aflate..

ION C. SCHILERU-DILI.

4959. Să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k A_m^k A_{n-p}^{m-k} = A_n^m$$

în care A şi C sunt respectiv simbol de aranjări şi combinări.

ADRIAN BUŞILĂ.

4960. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$\sqrt{\sec^2 x + a\operatorname{tg} x} + \sqrt{\sec^2 x - a\operatorname{tg} x} = 1 + \operatorname{tg} x$$

şi să se verifice soluţiunile pentru $a = 2$.

LT. C. IONESCU-ŢIU.

4961. Să se construiască o elipsă cunoscând poziţiile focarelor sale precum şi lungimea $2l$ a coardei comune cercurilor ei directoare. Să se repete construcţia în aceleaşi condiţiuni a unei iperbole.

Să se scrie ecuaţiile acestor conici cu ajutorul lui c şi l.

VIRGIL GHIŢESCU.

4962. O tangentă T, la conica (C) cu centrul în O, înscrisă în triunghiul ABC, taie laturile acestuia în α, β, γ.

Diametrele conjugate direcţiilor O_α, O_β, O_γ, şi diametrele conjugate direcţiilor OA, OB, OC taie tangenta T în α', β', γ' şi α'', β'', γ'' respectiv.

1°. Dreptele $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sunt paralele.

2°. Paralelele duse prin α'', β'', γ'' la direcţia comună a dreptelor $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ taie laturile opuse BC, CA, AB în trei puncte colineare.

3°. Caz particular (cercul).

S-LT MIHAIL I. FOCŞENEANU.

ERATĂ. 1°. La Problema 4939 s'a omis a se reproduce rezultatul dat în carte: (R: 14400 lei).

2°. Numărul N_2 din problema 4941 este:

$$N_2 = 3^{\alpha-1}! \times 3^{3^{\alpha-1}} + 2\alpha - 1.$$

3°. La pag. 423, rândul 9 în loc de ***variabile*** trebue ***valabile***; iar la rândul 18 în loc de ***explicaţiuni*** trebue ***aplicaţiuni***.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare : articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii :

Bârlea G. G. Victor (4908); *Bodnărescu M. H.* (4885, 908, 21, 28); *Buznea D. D.* (4910); *Cetăţeanu Stelian* (4917); *Crăciunescu I. Mioara* (4906, 08, 10, 11, 35); *Diaconescu D. I.* (4773, 75, 919); *Florescu V.* (4885); *Gereanu C. Ana* (4930, 43); *Gheorghieş Al. G-l* (P); *Herman Victor* (4906, 17); *Ionescu B. N. Gh.* (4947, 48); *Mărculescu Origen* (4931, 47, 50); *Miroslav T.* (4939, 40, 43); *Modâlcă S. Em.* (4626, 918); *Necşescu I. A.* (4908); *Pantelimon Const.* (4872); *Pascaru Const.* (4947); *Popa D. Mircea* (4930); *Popescu-Zorica N. Al.* (4766, 80, 885, 99, 911, 24, 25, E, R); *Popişcă V. Mircea* (4906); *Reischer L. H.* (4917, 28, 40); *Romaşcan Georgetta* (4410, 96, 829, 76, 934); *Rosenblatt* zis *Roth S. M.* (4869, 910, 11, 17, 40, 50); *Şaichin O. A.* (4782, 800, 917, R); *Săndulache C.* (4842, 80); *Solomon I. I.* (4908, 24, 28); *Ştefănescu D. N.* (4948); *Tătaru N. N.* (4908); *Topalescu S. Gh.* (4899, 908); *Vasiliu C. D.* (4911).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia VI . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* 1926. (Epuizată).

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50
Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. **C. D. IONESCU-ŢIU**

C. 51.102

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIII

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1938

SUMARUL

1. Rezultatele Concursului „Gazetei Matematice" . . . . . *G. Ţiţeica.*
2. Architecturae militaris tyrocinium a lui E. Vols (urmare şi sfârşit) . . . . . *Victor Marian.*
3. Aritmetica lui Gheorghe Asachi (urmare) *P. V. Cazanacli.*
4. Discuţia realităţii rădăcinilor ecuaţiilor de gradul 3 şi 4, cu coeficienţi reali. *Th. Angheluţă.*
5. Propoziţii de geometria triunghiului . . *N. N. Mihăileanu.*
6. O problemă asupra conicelor . . . . *Gh. D. Simionescu.*
7. Note Matematice: 44 — 46.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 277.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 4378, 4689, 4762, 4764, 4800, 4833, 4841, 4869, 4878.
12. Exerciţii: 34.
13. Probleme propuse: 4963 — 4974.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNEA" SIBIIU

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1938

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stan,** Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan; Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se inapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1937 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4859, 71, 79, 88, 90, 94, 901, 04, 05, 09, 12, 13, 14, 15, 20, 22, 27, 29, 32, 37, 38, 41, 42, 44, 46, 49, 51, 53, 54, 55, 59, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

ASOCIAȚIUNEA PENTRU LITERATURA ROMÂNĂ ȘI CULTURA POPORULUI ROMÂN „ASTRA" - SIBIIU
No. _____
Anul ____ luna ____ ziua ____

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLIII. Nr. 10 *SUPLIMENT* IUNIE 1938

RECREAȚIUNI

1. **Minunile lui 10.** Faptul că 10 este baza de numerație cea mai răspândită în lume, a făcut să se dea acestui număr o atențiune mai deosebită, și i s'a scornit o mulțime de proprietăți mistice, astfel avem:

a) *10 este perfect* și deaceia omul calculează cu el. *(Spesippe).*

b) *Punctul* este 1, *linia* este 2, *triunghiul* este 3, *piramida* este 4; suma acestora face 10.

c) *Un tetraedru* are 4 *vârfuri* și 6 *muchii*: suma lor este 10.—El are 4 *fețe* și 6 *diedre*: suma lor este 10.

I. I.

*

2. **Edilitate matematică.** Parisul este împărțit în 20 de arondismente, numerotate dela 1 la 20, începând dela centru și urmând o *spirală* a lui ARCHIMEDE până la periferie.

I. L.

*

3. **Numitor idealizat.** In „*Critici*" de E. LOVINESCU, la pag. 124 găsim: „Similitudinea psichologică a erorilor D-lui BRĂTESCU-VOINEȘTI ne face să-i reducem la numitorul autorului; un numitor idealizat însă".

A. O. SAICHIN.

*

4. **Numere rimate.** a) *2* și *3*. S'a făcut un colac mare, | Pe roata morii măsurat | Și l'a rupt în 2 | Și ne-a dat și nouă | Și l'a rupt în 3 | Și a dat lui Andreiu. (V. V. VARLAM).

b) *24*: Nici 24 | Bătrânul cu perii suri | Nici patru vii făpturi | Nu-l roagă idolatrul.

c) *100* și *1000*. Pe mine nu-l încântă nici | Un cor de alăute | Și nici nu-l întâmpin sute | Și mii de îngeri mici. (Din „*Scut și targă*" de PERPESSICIUS).

I. ILIUȚĂ DABULENI.

*

5. **Imprumutul, dobânda și scadența în zicători.**

— Imprumutul împrumut așteaptă.
— Dobânda multă rupe ciochinele.
— Dobânda mănâncă capetele (Capitalul).
— In loc de dobândă | Te pomenești cu osândă.
— Atâta pagubă cât și dobândă.
— Cel ce plătește la vadea (scadență) mai capătă și altă dată.

I. I.

*

6. **Interpretări.** Pentru concursul *Gazetei Matematice* din Anul acesta am avut câteva înscrieri curioase:

a) Un elev dela Liceul Brătianu din Piteşti s'a înscris pentru Fizico-Chimice şi Geografie.

b) Un elev dela Liceul din Bacău s'a înscris pentru Limba română şi Ştiinţele Naturale.

c) Un elev dela Liceul din Râmnicul Vâlcea s'a înscris la Matematici şi Istorie.

d) Un elev dela Şcoala Normală dela Carei-Sălaj s'a înscris la Matematică şi Fizico-Chimice.

e) La aceleaşi materii s'a înscris şi un elev dela Liceul Traian din Turnu Severin.

G. T. G.

*

7. **Linia dreaptă.** In „*Apologetica*" sa, Păr. TOMA CHIRICUŢĂ ne spune că drumul cel mai scurt între două puncte nu mai este linia dreaptă ci cea strâmbă. Iată în adevăr ce găsim la pag. 74:

... O, dacă teoremele geometrice, al căror adevăr intangibil îl proclamăm acum cu emfază, ar avea vreodată, prin ipoteză, strania inspiraţie de a se amesteca în interesele inimii noastre, în viaţa noastră morală, să vedeţi cât de repede s'ar înmulţi tăgăduitorii geometrii, şi cât de mulţi ar susţine, că drumul cel mai scurt între două puncte nu este linia dreaptă, ci, poate cea strâmbă.

V. CRIVĂŢ.

*

8. **Contra Matematicianilor.** Extrag următoarele din „*Récréations litéraire*" de ALBERT CIM:

„Cuvântul latin *mathematicus*, care la început însemna „*Matematician*" a luat mai în urmă sensul de „*astrolog*", de *Ghicitor*. Arta de a ghici se numia *Matematice, ars mathematica;* cea mai mistică şi mai nesigură dintre toate ştiinţele reale sau pretinse reale purta atunci numele care distinge azi pe cea mai exactă dintre ele". Intre cele două accepţiuni s'a stabilit o confuziune. Astfel a ajuns să se atribuie SFÂNTULUI AUGUSTIN această declaraţiune draconică şi singulară că „Matematicianii sunt oameni pierduţi şi blestemaţi" pe când această anatemă nu se aplica de cât astrologilor şi înşelătorilor. Cea ce probează aceasta, este cea ce povesteşte SFÂNTUL AUGUSTIN în „*Confesiuni*", capitolul *Mathematicorum devinationes reficit*, unde doi dintre aşa pretinşii matematiciani observă situaţia Cerului la naşterea copiilor şi chiar a animalelor, trasează *horoscopul* lor sau „*tema de nativitate*" şi practică complect operaţiunile astrologilor.

EUGENIU MÜLER adaogă chiar că studiul matematicilor a fost interzis de Biserica Catolică din timpul domniei lui CONSTANTIN (sec. IV) până la Domnia Impăratului FREDERIC II în Germania (sec. XIII), matematicianii fiind totdeauna ţinuţi de teologieni ca oameni fără religie, ca un fel de şarlatani.

CHATEAUBRIAND constată din partea lui, în „*Génie du Chriatianisme*“ că Biserica a protejat mai totdeauna artele, cu toate că a descurajat uneori studiile abstracte şi în acel pasagiu el se arată puţin entuziasmat pentru ştiinţe în general şi pentru matematici în particular.

I. I.

*

9. **Poeţi contra matematicilor.** Iată cam ce opinie avea originalul POE despre matematică şi adepţii ei:

„Contest folosinţa, şi prin urmare şi valoarea, unei raţiuni care este cultivată în altă formă de cât forma abstractă logică. Contest înainte de toate raţiunea care se hrăneşte prin studii matematice. Matematica este ştiinţa formei şi a cantităţii; concluziile matematice sunt numai o logică stăvilită de observarea formei şi a cantităţii. Marea greşeală trebuie căutată în presupunerea că chiar şi adevărurile aşa numitei algebre pure sunt abstracte sau generale. Axiomele matematice nu sunt în totdeauna adevăruri generale. Cea ce priveşte raportul dintre formă şi cantitate e adevărat, dar este isbitor de falş în cea ce priveşte, de pildă, morala. In ştiinţa din urmă e absolut neadevărat că părţile adunate sunt egale cu întregul. Mai sunt o mulţime de axiome care sunt adevărate numai între limitele raportului. Matematicianii însă întemeindu-se pe adevărurile lor finale, ajung de obiceiu la concluzia că ele sunt generale.

ION C. VASILIU.

*

10. **Infinitul mic şi Infinitul mare.** CAMILLE FLAMMARION scrie următoarele în „*Ce este viaţa*“ :

„Dintre toate contemplările Naturii, *Infinitul mic* este poate acela care se apropie mai mult de *Infinitul mare...*“.

„Această excursie în lumea *Infinitului mic* ne va arăta poate mai puţine minuni de cât acelea pe care ni le-au arătat zeiţa URANIA în lumea imensă a *Infinitului mare.*

G. TULEA.

*

11. **Literatură sferică.** In Vol. IV de „*Critici*“ de E. LOVINESCU găsim:

„Literatura D-lui BRĂTESCU-VOINEŞTI e sferică; nici un punct nu e pe o rază mai mare sau mai mică“.

ADOLF O. SAICHIN.

*

12. **Relaţiuni între Aritmetică şi Calculul infinitezimal.** Se poate observa uşor că cifra 8 (opt) este o reuniune de două integrale: una românească $\int$ şi alta evreiască $\beth$.

ALEXANDRU N. POPESCU-Z.

*

13. **Erori tipografice.** Primim foarte des plângeri din partea cititorilor *Gazetei Matematice* că în această Revistă sunt foarte des şi foarte multe erori de tipar. Aşa este! Nu putem nega!

Nu trebuie însă să se uite că şi cei ce tipăresc Revista şi o corectează sunt şi ei oameni şi că şi lor li se poate aplica axioma: „*Errare humanum est*“.

In secolele trecute se punea mare preţ pe lipsa de erori tipografice în tipărituri; azi, cu iuţeala de tipărire şi dorinţa mare de câştig mare, se poate spune că nu există publicaţiune fără erori tipografice. Dacă acest adevăr poate că încă nu este pus printre axiome, acest fapt se va realiza în curând!

S'au dus timpurile când fiecare pagină a unei cărţi se corecta de 7 ori de câte 10 corectori! Aşa s'a făcut cu Biblia polonă tipărită la Danzig în 1632, şi în care, după punerea în vânzare, tot s'au găsit erori tipografice care schimbau sensul afirmaţiunilor din evanghelii.

Corespondenţii noştri să fie dar mai îngăduitori! Mai ales să ţină seamă că mâine, poimâine, le va veni rândul la redactarea şi tipărirea *Gazetei Matematice*, poate, şi nu au să o poată scoate fără erori de tipografie! De altfel, chiar de pe acum, câte probleme nu ni se trimit neglijent redactate, rău scrise, cea ce nu ar trebui să fie, căci, vorba unui fost Culegător al *Gazetei Matematice*: *„Asta e matematică, Domnule"*.

I. IONESCU.

*

14. **Baza.** In Geometrie, în Chimie | Ba chiar şi'n militărie | Când linie, solidă | Suprafaţă, chiar lichidă | In capul leatului ea sare | E baza fundamentului răcane! | De baza Statului nu mai vorbesc, | Pe la justiţie toţi nemeresc | Iar ca sfârşit, ea prin vechime | Se mai numea şi înălţime!...

V. C. POPESCU.

*

15. ANATOLE FRANCE **despre Matematicieni.**

„Ce geométre enflamé rêvait sur des chiffres et sa BÉATRICE était une fleur d'Arithmétique".

I. I.

*

16. **Din Tezele de Bacalaureat.** La Constanţa în 1931 s'a dat problema: „Un turn este format dintr'o parte cilindrică şi una conică. Ştiind că produsul şi suma înălţimilor sunt respectiv numerele 320 şi 48, se cere înălţimea turnului".

N. M.

*

17. **O versiune franceză a Epitafului lui** GALILEO:

Celui dont ce tombeau renferme la poussière
Pensa perir pour trop savoir;
Dans un monde à courte vizière,
Il est dangereux de tout voir.

I. I.

*

18. **O teoremă a beţivului.** Gustul bun al apei creşte proporţional cu setea înmulţită cu patratul depărtării de cea mai apropiată cârciumă.

ELCOMIR.

*

19. **Suliţa.** Ea este o măsură populară a timpului. Aşa întâlnim expresia: „Să tot fie soarele de trei sulițe".

C. C. POPESCU.

REZULTATELE CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“

1. In zilele de 28, 29 şi 30 Aprilie 1938 s'a ţinut în localul *Şcoalei Politechnice* din Bucureşti Concursul obişnuit al *Gazetei Matematice*. Fără trâmbiţe şi surle, dar cu adânc temeiu, profesori şi elevi îşi rup din odihna vacanţei ca să dovedească printr'o sforţare comună că în ţara noastră se poate face o muncă sistematică serioasă.

Comisiunea examinatoare a fost compusă din următorii membri ai Societăţii noastre: D-nii AL. NICOLESCU, HAR. P. IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, GH. TH. GHEORGHIU, N. N. MIHĂILEANU, GH. DEMETRESCU, I. CHIŢULESCU, I. S. ANTONIU şi ARGHIRIADE.

Dintre cei 69 candidaţi admişi să treacă probele concursului, s'au prezentat 62, iar dintre cei 7 care au lipsit, trei au anunţat din vreme că nu pot veni.

După ce s'au ţinut lucrările scrise comisia a ales dintre candidaţi pe cei care pot trece oralul şi de aceea numărul candidaţilor care au trecut probele orale s'a redus la 24.

Atât membrii ai Societăţei *Gazetei Matematice*, cât şi alte persoane au urmărit mai ales probele orale.

Ţinem să mulţumim tutulor persoanelor şi instituţiilor care au sprijinit ţinerea concursului, în special:

Direcţiunii Liceelor Militare, Direcţiunii Generale a Căilor Ferate Române, Şcolii Politechnice şi D-lui G. THIERRIN.

2. Rezultatele concursului, precum se va vedea din analiza care urmează, sunt foarte bune; ele trebue să mulţumească pe toţi cei care şi-au dat osteneala de a ţine sau de a se prezenta la concurs, chiar pe cei care n'au reuşit.

Membrii Gazetei, care se strâng împreună cu Comisiunea Concursului spre a face clasificarea candidaţilor pe baza rezultatelor obţinute, simt o deosebită emoţie în această cântărire a valorilor de astăzi, care par mărunte, dar dela care sperăm, ca şi altă dată, să devină valori însemnate în ştiinţa teoretică, în ştiinţele aplicate sau în orice alt câmp de activitate.

I. Pentru locul întâi al clasificărei noastre ştiam dinainte, dela lucrările scrise şi după felul cum a trecut probele orale, că

el se cuvine D-lui ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE, elev în clasa VIII-a la liceul militar „Nicolae Filipescu" dela Mânăstirea Dealului. La toate probele acest candidat a fost notat cu nota cea mai mare: la lucrările scrise pentru siguranţa atât a calculului, cât şi a judecăţii, iar la probele orale, pe lângă aceste însuşiri, pentru numeroasele cunoştinţi pe care le stăpâneşte şi le mânueşte cu uşurinţă.

I se acordă volumele:

M. A. BUHL — *Nouveaux Éléments d'Analyse.* Tome II; I. I. CHIŢULESCU — *Chaosul;* P. JANET — *Leçons d'Électrotechnique générale.* Tome II, III; G. JULIA — *Exercices d'Analyse.* Tome I, II, III.

II. In rândul al doilea vine D-l IOAN AL. ILIE, elev în clasa VII-a la liceul militar „Nicolae Filipescu" dela Mânăstirea Dealului, cu lucrări scrise foarte bune şi cu probe orale, deşi cu oarecare îndoeli, dar totuşi foarte bune. Il aşteptăm la anul.

I se acordă volumele:

A. ANGELESCU — *Lecţiuni de calcul diferenţial;* X. ANTOMARI — *Cours de géométrie descriptive,* Septième édition; I. I. CHIŢULESCU — *Chaosul;* A. FÖPPL — *Résistance des matériaux et éléments de la théorie mathématique de l'elasticité;* J. SOMMER — *Introduction a la théorie des nombres algébriques.*

III. In rândul al treilea e D-l FLORESCU L. VICTOR, elev în aceeaşi clasă şi la acelaşi liceu ca şi precedentul, pentru lucrarea scrisă de Algebră foarte bună, probele de geometrie descriptivă, mai ales cea scrisă, aproape foarte bună şi proba orală de Algebră bună. Element bun.

I se acordă volumele:

P. APPEL — *Traité de mécanique rationnelle.* Tome I, II, III; I. I. CHIŢULESCU — *Chaosul;* E. LAINÉ — *Précis d'analyse mathématique.* Tome II.

IV. In rândul al patrulea a ieşit D-l IONESCU D. STELIAN, elev în clasa VI-a la liceul militar „Ştefan cel Mare" din Cernăuţi, cu lucrări bune de Trigonometrie şi probe aproape foarte bune, mai ales cea orală, de Geometrie în spaţiu.

I se acordă volumele:

M. A. BUHL — *Nouveaux éléments d'analyse.* Tome II; I. IONESCU — *Culegere de probleme de aritmetică.* Partea I; I. IONESCU — *Beton armat;* E. MOSNAT — *Problèmes de géométrie analytique.* Tome I, II.

V. In rândul al cincilea a fost clasificată D-ra ROMAŞCAN GEORGETA, elevă în clasa VIII-a la Şcoala Centrală din Bucureşti, pentru probele de Geometrie analitică mai mult decât bune şi proba orală de Algebră şi pentru stăruinţa cu care s'a pregătit regulat în fiecare an la concursurile noastre grele.

I se acordă volumele:

I. I. CHIŢULESCU — *Chaosul;* R. DE MONTESSUS DE BALLORE — *Probabilités et statistiques;* G. PAPELIER — *Exercices de géometrie moderne.* Vol. I, II, III.

VI. In rândul al şaselea e D-l FLOREŞTEANU D. ALEXANDRU, elev în clasa IV-a la liceul „N. Fliipescu" dela Mânăstirea Dealului, pentru proba orală foarte bună de Geometrie, pentru probele bune de Algebră, care au fost scăzute de lucrarea scrisă de Geometrie.

I se acordă volumele:

I. IONESCU — *Culegere de probleme de aritmetică.* Partea I; M. YVON — *Exercices méthodiques de mathématiques générales.* Première partie. Analyse; *Gazeta Matematică* — (Volum Jubilar).

Pe lângă aceşti candidaţi care au meritat să fie înscrişi în tabela de clasificare, mai sunt unii care au făcut lucrări bune sau foarte bune la unele materii, dar care din cauza altor lucrări slabe n'au putut intra în clasificare.

Dintre aceştia ţinem să menţionăm pe următorii candidaţi, cărora li se acordă volumele notate în dreptul fiecăruia:

Clasa VI-a. BUZNEA DINU (Geometrie), A. ANGELESCU — *Lecţiuni de Calcul Diferenţial; Gazeta Matematică* — (Volum Jubilar);

THEODORESCU DORIN (Geometrie), A. ANGELESCU — *Lecţiuni de Calcul Diferenţial;* I. IONESCU — *Beton armat.*

Clasa VII-a. JIPA ALEXANDRU (Geometria Descriptivă), A. ANGELESCU — *Lecţiuni de Calcul Diferenţial; Gazeta Matematică* — (Volum Jubilar);

RĂDULESCU OCTAVIAN (probele orale), I. IONESCU — *Beton armat;* I. IONESCU — *Culegere de probleme de Aritmetică* (Partea I).

Clasa VIII-a. CORNĂŢEANU I. AUREL (Mecanica), I. IONESCU — *Beton armat; Gazeta Matematică* — (Volum Jubilar).

Anul preparator, Şcoala Politechnică. POSTELNICESCU MIRCEA, TH. ANGHELUŢĂ — *Exerciţii şi probleme de analiză, teoria funcţiilor şi mecanică raţională;* I. I. CHIŢULESCU — *Chaosul.*

DELEGAT PENTRU RAPOARTE
G. ŢIŢEICA.

ARCHITECTURAE MILITARIS TYROCINIUM

A LUI

E. VOLS

(Urmare dela pagina 452 şi sfârşit)

Capitolul al treilea se ocupă cu problema fortăreţelor regulate, adică ale căror toate laturile şi unghiurile sunt egale. Capitolul începe cu definiţii, dintre care mai interesante sunt următoarele: „*Oraş se numeşte un număr de case înconjurate de întărituri. Cetate e o fortăreaţă situată în loc ridicat fie ca să adăpostească pe cetăţeni, fie ca să apere oraşul împotriva inamicului. Castelul este o fortăreaţă înconjurată, după datina celor vechi, cu tunuri. Citadela e fortăreaţă mică, la care distanţa punctelor extreme ale bastioanelor e mai mică de 120 de picioare. Bastion e partea cea mai înaintată în câmp a fortăreţei, dar care aparţine fortăreţei; dacă nu aparţine fortăreţei se numeşte redută*". Se studiază diferitele metode de construcţie a fortăreţelor, ca de ex. metoda franceză, italiană, olandeză, a lui GOLTMANN, etc.

In capitolul al patrulea aflăm modul de construcţie a diverselor părţi a unei fortăreţe, ca de ex.: redute, şanţuri, valuri, parapete, drumuri, canaluri, căi acoperite etc.

In capitolul al cincilea se tratează metodele de luptă. Ca regulă generală se dă următoarea: „*Fiindcă scopul unei fortăreţe este, ca un număr mic de soldaţi să poată rezista unui număr mare de agresori, trebue ca ea să aibă o astfel de formă ca nu numai singuraticele părţi să poată rezista prin soliditatea lor, sau să se poată apăra direct, ci să poată fi apărate şi de către celelalte părţi vecine lateral şi oblic*". Urmează câteva regule pentru construcţia unor părţi ale fortăreţelor, apoi normele de asediere şi de apărare a acestora.

O fortăreaţă poate fi atacată în trei feluri: 1) Prin bombe incendiare se alungă soldaţii din valuri. 2) Prin subminare şi explozii se distrug întăriturile. 3) Prin maşini de războiu se fac spărturi în ziduri (breche) ca să facă drum pentru asediatori.

Ca mijloace de apărare se recomandă în cazul (1): Camere subterane (sau casemate) în care se retrag soldaţii în timpul bombardamentului. In cazul (2) şanţuri cu apă sau înlăturarea

explozibilului printr'un contra-atac făcut la timp. In cazul (3) se recomandă eşiri dese, neliniştirea asediatorilor, nimicirea maşinilor de atac, etc.

Capitolul al şaselea cuprinde, sub formă de întrebări şi răspunsuri, câteva chestiuni polemice. Menţionez din ele următoarele:

Intrebare: *„E avantajos ca într'o ţară să fie multe fortăreţe sau să fie puţine?"*. După ce se aduc şi se discută argumentele pentru şi împotriva ambelor aserţiuni autorul dă următorul răspuns: *„E recomandabil ca o ţară să aibă multe fortăreţe"*.

La întrebarea: *„E recomandabil ca o fortăreaţă să fie construită pe un teren ridicat, sau mocirlos, sau într'un câmp?"* se dă răspunsul: *„E mai bine ca fortăreaţa să fie construită în câmp"*.

La întrebarea: *„E mai bine ca şanţul principal să fie uscat sau să conţină apă stătătoare?"* se răspunde: *„E mai bine ca şanţul să fie uscat"*.

La întrebarea: *„Valurile să fie din pământ sau din zid?"* se dă răspunsul: *„E avantajos ca ele să fie construite din zid"*.

* * *

La sfârşitul cărţii e anexată o foaie, care conţine un document istoric preţios pentru noi. Era în obiceiul universităţilor şi liceelor iezuite ca manualele să fie dedicate absolvenţilor şcoalei sau universităţii din anul apariţiei cărţii. După cum se vede din foaia de titlu ediţia din Cluj a Architecturii lui VOLS e dedicată seriei de doctori din anul 1738. Foaia anexată la sfârşitul cărţii se referă la solemnitatea promoţiei noilor doctori şi ne dă pe lângă numele conducătorilor universităţii şi lista absolvenţilor. Aflăm astfel că în acel an rector al Academiei era STEFAN DOBNER, iar prefect de studii FRANCISC PREKENFÖLD.

Absolvenţii din anul 1738 au fost promovaţi în luna August, ziua..., ora 8 dim., în aula Academiei, laureaţi în filozofie şi imediat, tot acolo, li s'a conferit de către N. IANOSI şi titlul de doctori în filosofie. Lista noilor doctori cuprinde, împărţite pe grupe, fiecare grupă în ordine alfabetică, 13 nume. E interesant, că în prima grupă locul al patrulea e ocupat de un român: „D. PETRUS DÁLLYAI *Nob. Valachus Dályaensis ex. Comit. Albensi e Sem.* S. JOSEPHI. *Defendit universam*". Ultima expresie înseamnă

că nobilul român a susţinut toate tezele, obţinând titlul de doctor al acelei universităţi.

Dau ca titlu de document şi chestiunile de examen din architectura militară la care aveau să răspundă candidaţii din acel an: „I. *Războiul se poartă în chip mai norocos prin forţe fizice sau prin cele intelectuale?*“ şi „II. *Războiul face ravagii mai mari sau epidemiile?*“.

VICTOR MARIAN.

ARITMETICA LUI GHEORGHE ASACHI

(Urmare dela pag. 457)

„*De regula de interes sau de dobândă*“. (149, patru pagini) este „*o operaţie prin care, cunoscând interesul pe care aduce o somă ştiută în cursul unui timp dat, se hotărăşte interesul sau dobânda care oricare altă somă trebui în proporţie să aducă iarăşi în cursul unui timp dat. Cuvântul de finaţie dinar este numărul carile înseamnă de câte ori atâta la sută este cuprins în 100. Aşa dar, a împrumuta câte 5 la sută sau cu dinar 20 este tot una. Imprumutând cu folos de 20 dinar, este la fieşcare 20 lei a somei împrumutate, a lua 1 leu dobândă. A împrumuta cu folos de 5 la sută, este la fieşcare 100 lei, a lua 5 dobândă*“.

Urmează „*Regula de interes simplu*“. „*Se cere a cunoaşte dobânda de 15,600 lei câte 4½ p. %₀ pentru 3 ani 11 luni 29 zile. Vederat este că câte sutimi sunt la numărul propus, de atâtea ori va fi 4½; dar 156000 sunt 156 sutimi. Deci vom avea:*

156
4½
624
78
702 *pentru un an.*

Având dobânda ce ar aduce 15,600 într'un an, uşor este a cunoaşte acea care tot acea somă va da în curs de 3 ani 11 luni 29 zile, înmulţind dobânzile a unui an prin 3 ani 11 luni 29 zile.

702 lei, *dobândă pentru un an.*

3 ani 11 luni, 29 zile.
2106 *lei pentru 3 ani.*
Pentru 6 luni. — 351 — $\frac{1}{2}$ *de un an.*
Pentru 4 luni. — 234 — $\frac{1}{3}$ *de un an.*
Pentru 1 lună. — 58,50 — $\frac{1}{4}$ *de patru luni.*
Pentru 15 zile. — 29,25 — $\frac{1}{2}$ *de o lună.*
Pentru 10 zile. — 19,50 — $\frac{1}{3}$ *de o lună.*
Pentru 3 zile. — 5,85 — 1/10 *de o lună.*
Pentru 1 zi. — 1,95 — $\frac{1}{3}$ *de trii zile.*
2806,05

Deci, 15600 lei aşezaţi la dobândă în curs de 3 ani, 11 luni 29 zile câte 4½ p. %₀ vor aduce 2806,50 lei".

Precum vedem ASACHI aplică aici *metoda părţilor alicvote.*

„*Pruba regulei trecute*" este de fapt o altă metodă pentru rezolvarea aceleeaşi chestiuni: „*100 lei aduc 4½ p. %₀ în curs de 1 an sau 12 luni; câtă dobândă vor aduce 15600 lei aşezaţi în curs de 3 ani 11 luni 29 zile?*

100 *lei* — 4½ p. %₀ — 12 *luni.*

15600 *lei* — *x* *p.* $47\frac{29}{30}$. *Reduc anii mei în luni, pentru de a avea mai puţine subîmpărţiri; de asemenea aş putea reduce toate în zile; pun zilele în fracţii, luând de numitoriu a fracţii mele pe 30, care este numărul zilelor cuprinse în o lună, pentru că dintâi toate am redus la lună*". Problema se rezolvă aşa cum s'a făcut la regula de trei compusă; se găseşte rezultatul de mai sus.

§ 150 tratează: „*De regula dobânzilor compuse*". De fapt, este vorba de o problemă care se rezolvă cu ajutorul regulii „*de soţietate*". „*Patru neguţitori au făcut o întreprindere în care au câştigat 120000 lei. Acel întâi au pus 100000 lei în curs de trii luni, şi după aceasta au mai adaos 50000 lei. Al doilea au pus 100000 lei în curs de patru luni, şi după aceasta au tras îndărăpt 50000 lei. Al triilea au pus 100000 în curs de trii luni şi după aceasta au mai adaos 50000 lei. Al patrile au pus 100000 lei în curs de 9 luni, şi după aceasta au tras îndărăpt 50000 lei. Soţietatea au ţânut 12 luni; se cere a şti câştigul a fieşcăruia companion.* **Dizlegarea:** *Însămnez mainainte că 100000 lei în 3 luni trebui să dee atâta ce şi 300000 lei în curs de 1 lună; deci*

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

noi vom avea 100000 × 3 = 300000. La încheerea de 3 luni el au adaos 50000 lei, deci acum sunt în companie 150000 lei care rămân pânăla încheiere, adecă 9 luni, pentrucă trii luni s'au trecut. Deci vom zice ca mai sus: 150000 lei, în curs de 9 luni trebui să dee atâta cât 9 ori 150000. Deci capitalul acelui întâi se poate reprezenta prin:

$$\left.\begin{array}{l} 100000 \times 3 = 300000 \\ 150000 \times 9 = 1350000 \end{array}\right\} 1650000\text{“}.$$

Judecând la fel, autorul găseşte că sumele depuse de al doilea, al treilea şi al patrulea negustor, vor putea fi înlocuite respectiv prin 800000, 1650000 şi 1050000 lei.

„Punerea acelui întâiu	1650000
al doile	800000
al triile	1650000
al patrile	1050000
Gheneralnica punere	5150000

Atunci încape iar regula de companie simplă, care se va face după cum s'au arătat şi precum urmează“:

Urmează judecata şi rezolvarea cu ajutorul regulii de trei simplă. Se găseşte: *„Acel întâi au câştigat* — $38446\frac{310}{615}$

al doile $18640\frac{400}{515}$

al triile $38446\frac{310}{515}$

al patrile $24466\frac{10}{515}$

Soma fracţiilor 2

Obştescul câştig — 120000

„Regule de **sconto**“ (§§ 151—153) ocupă patru pagini. Definiţia (§ 151): *„Regula de sconto este acea prin care se hotărăşte scăderea sau ertarea ce face un creditor, sau pierderea la care el se supune, în folosul unei plăţi anticipate pentru o somă înaintea împlinirii vadelii; această ertare sau pierdere se chiamă* **sconto.** *Deci sconto este chiar dinpotrivă de acea ce se numeşte interes, dobândă sau proţent“.*

§ 152: „*Pentru de a calcula dobânda unei some câte 5 p.* %, *adecă la sută, se zice: Dacă 100 lei se fac 105 lei, cât se va face o cutare somă? Pentru a sconta câte 5 la sută se zice: dacă 100 lei se reduc (scad) la 95, la cât se va reduce o cutare somă?*“.

§ 153: „*Sconto este proporţional la soma şi la timpul a cărora plată se anticipază. El se calculă, ca şi dobânda, cu atâta protent pe an sau pe lună. Exemplu. A afla sconto a unei polite de 8400 lei câte* ½ *p.* % *pe lună, pentru 3 luni 12 zile. In 8400 se află 84 sutimi; înmulţesc 84 prin* ½, *care este tot acea ce şi a-i lua giumătate; căci în fracţii, înmulţirea împărţeşte iar împărţirea înmulţeşte. Giumătatea de 84 este 42, şi aceasta este sconto a unei luni.*

42 lei, *pentru o lună,*
3 *luni, 12 zile.*
126 . . . . . *pentru 3 luni.*
Pentru 10 zile 14 . . . . . ⅓ *de o lună.*
Pentru 2 zile 2,8 . . . . . *de zece zile.*
142,8 *lei* (96 *bani*).

Ca şi în alte cazuri autorul face „prubă“: „*Pruba regulii de sconto se face ca acea a regulei de interes simplu prin regula de trei compusă:*

100 *lei dau* ½ *pe* 1 *lună.*
4800 *lei vor aduce* x *în curs de 3 luni*“.
Rezolvarea se face în modul cunoscut.

„*Alt exemplu: A afla sconto unui sânet de 7200 lei, pentru 5 luni, 21 zile, câte* $\frac{3}{4}$ *de sută pe lună. In 7200 sunt 72 sutimi; deci vom avea* $72 \times \frac{3}{4} = \frac{216}{4}$; *extrăgând pe întregii din această expresie fracţională, vom afla: 54 lei pentru o lună.*

5 luni 21 zile
Pentru 15 zile 27 *lei,* ½ *de o lună.*
Pentru 6 zile 10,8 *lei,* ⅕ *de o lună.*
307,8 *lei, sau* 96 *bani.*

Urmează „*pruba*“ cunoscută. Vedem că în ambele exemple de mai sus s'a aplicat metoda părţilor alicvote.

„*Regula de alegaţie*“ (§ 154) conţine abia două pagini. **„Alegaţia** *este unirea a mai multor metale la un loc topite, sau a mai multor mărfuri la un loc numai amestecate. Scoposul regulei de Alegaţie este* 1⁰) *Mai multe lucruri a cărora cătimi şi valori particulare sânt cunoscute, fiind amestecate, a afla preţul amestecării.* 2⁰) *Cunoscând preţul particular a mai multor lucruri, a hotărâ în care raport se cuvine ele a se alega, spre a face o amestecătură a unui preţ dat. Exemplu: S'au cumpărat trii feluri de grâuri, cu preţuri deosebite; voim a şti cât vom ţinea unul cu altul?*

6 merţă grâu câte 24 lei, înmulţind 24 prin 6, îmi dau 144 lei.

10 merţă ovăz câte 17 lei, înmulţind 17 prin 10 îmi dau 170 lei.

7 merţă orz câte 15 lei, înmulţind 15 prin 7 îmi dau 105 lei.

Făcând apoi adiţia de 144, 170, 105, preţurile fieşcărui fel de grăunţă, se aflu 419, care va fi împărţitul meu. Fâcând apoi adiţia şi de numărul merţilor, 6, 10, 17, aflu 23 de împărţitoriu. Făcând împărţirea, văd că aceste grăunţe amestecate costisesc, una cu alta, 18 lei $\frac{14}{23}$ “ (de fapt 18 $\frac{5}{23}$ lei). **„Alt exemplu.** *Se întrebuinţează 200 lucrători, din care 50 se plătesc câte 40 lei pe lună, 70 câte 30 lei, 50 câte 25 lei şi 30 câte 20 lei; câte cât vine fiecare lucrătoriu unul cu altul?*

50	*lucrători, câte*	40	*lei pe lună fac o cheltuială de*						2000	*lei*
70	—	— 30	—	—	—	—	—	—	2100	—
50	—	— 25	—	—	—	—	—	—	1250	—
30	—	— 20	—	—	—	—	—	—	600	—
									5950	*lei*

Deci cheltuiala plăţii a 200 lucrători este de 5950 lei pe lună, şi împărţind 5950 prin 200, aflu că fieşcare lucrătoriu vine la 29 lei 90 bani pe lună“.

(Va urma). P. V. CAZANACLI.

DISCUȚIA REALITAȚII RADACINILOR ECUAȚIILOR DE GRADUL 3 ȘI 4, CU COEFICIENȚI REALI

Imi propun să discut realitatea rădăcinilor ecuațiilor de gradul 3 şi 4 cu coeficienți reali întrebuințând o metodă elementară. La multe examene se propun chestiuni în cari intervin discuții de ecuații de gradul 3 şi 4. Am crezut util să pun la îndemâna corespondenților noştri aceste rânduri pentru a-i orienta într'o problemă fundamentală de algebră.

In prima parte a acestui articol voiu studia variația valorilor unui polinom de gradul 3 de o formă particulară şi apoi ca o consecință voiu deduce discuția realității rădăcinilor unei ecuații de gradul 3 cu coeficienți reali. In partea a doua urmând aceeaşi cale ca în partea întâia, voiu trata ecuația de gradul 4.

I. Să studiez aşadar variația valorilor polinomului

$$y = x^3 + px \tag{1}$$

când x variază dela $-\infty$ la $+\infty$, p fiind un parametru real.

Curba are ca centru de simetrie origina.

Derivata funcției y fiind

$$y' = 3x^2 + p$$

sunt două cazuri de considerat:

1°. $p \geqq 0$. Iată tabloul variației lui y pentru acest caz:

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	↗	↗ $+\infty$

2°. $p < 0$. Derivata are rădăcinile reale

$$x = \pm \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

şi deci tabloul variației este următorul:

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		0		$+\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$	↘	0	↘	$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$	↗	$+\infty$

Discuția ecuației de gradul 3.

Să discut acuma realitatea rădăcinilor ecuației [1])

$$x^3 + px + q = 0 \tag{2}$$

q fiind și el un număr real. Rezolvirea ecuației (2) revine la căutarea punctelor de intersecție ale curbei (1) cu dreapta $y = -q$.

In cazul 1° ecuația (2) are deci o singură rădăcină reală și deci 2 imaginare. In cazul 2° din tabloul corespunzător al variației lui y rezultă că dacă q satisface inegalitățile

$$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} \leqq q \leqq -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

ecuația (2) are trei rădăcini reale, iar dacă q satisface inegalitatea

$$q > -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

sau inegalitatea

$$q < \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

ecuația (2) are o rădăcină reală și 2 imaginare.

Discuția ambelor cazuri se poate rezuma sub o formă mai ușor de reținut. In adevăr, să considerăm ecuația de gradul 2

$$x^2 + \frac{4p^3}{27} = 0$$

care are rădăcinile $\pm\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$ și prin urmare discuția dela 2° se rezumă astfel:

Dacă p și q satisfac condiția

$$27q^2 + 4p^3 \leqq 0 \tag{3}$$

ecuația (2) are 3 rădăcini reale. Dacă p și q satisfac inegalitatea contrară

$$27q^2 + 4p^3 > 0 \tag{4}$$

ecuația (2) are o singură rădăcină reală și deci 2 imaginare.

---

1) B. NIEWENGLOWSKI: Cours de géométrie analytique 2 éd. t. II. p. 84. H. WEBER: Traité d'algèbre supérieure (traduit par J. GRIESS) pag. 285—295.

Pentru înțelegerea mai lesne a discuției se va figura curba (1) pentru cazurile 1° și 2°. Aceeași recomandare pentru discuția ecuației de gradul 4.

Dar în această din urmă condiție intră și cazul 1° căci dacă $p > 0$ ecuația are o singură rădăcină reală și condiția (4) este satisfăcută.

Concluzie: Ecuația (2) are 3 rădăcini reale dacă condiția (3) este satisfăcută; în caz contrar are numai o singură rădăcină reală.

Observarea 1. Dacă se caută condiția ca ecuația (2) să admită o rădăcină multiplă, cu alte cuvinte pentru ca ecuația (2) și cu ecuația

$$3x^2 + p = 0$$

să aibă o rădăcină comună, se găsește

$$27q^2 + 4p^3 = 0.$$

Din această cauză expresia $-27q^2 - 4p^3$ se numește *discriminantul* ecuației (2).

Observarea 2. Discuția ecuației generale de gradul 3

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

se reduce la cazul tratat; în adevăr, se transformă această ecuație în o ecuație de forma (2) punând după cum se știe

$$x = y - \frac{a}{3}$$

și se găsește

$$p = P'\left(-\frac{a}{3}\right), \quad q = P\left(-\frac{a}{3}\right).$$

Reprezentarea geometrică a discuției. Fie într'un plan două axe de coordonate dreptunghiulare *op* și *oq*. Față de aceste axe *p*, *q* vor însemna coordonatele curente. Ecuația

$$27q^2 + 4p^3 = 0$$

reprezintă în acest plan o curbă de gradul 3 (o cubică), care se poate ușor construi. Această cubică poate fi reprezentată parametric prin ecuațiile

$$(5) \qquad \begin{cases} p = -3x^2 \\ q = \quad 2x^3 \end{cases}$$

unde x este un parametru.

Căutând tangentele la cubică care trec printr'un punct dat al planului de coordonate (p, q), se găseşte curba (2). Prin urmare a căuta rădăcinile reale ale ecuaţiei (2) geometric înseamnă, a găsi punctele de contact ale tangentelor duse dintr'un punct de coordonate (p, q) la cubica (5). Cubica împarte planul în două regiuni în care avem satisfăcute respectiv condiţiile (3) şi (4). Dintr'un punct al planului putem duce deci trei sau numai o tangentă reală la cubica (5) după cum el este situat în prima ori a doua regiune.

Aplicaţie: Să se discute ecuaţia

$$x^3 + ax^2 + bx - a^3 = 0 \tag{6}$$

a, b fiind reali. Să transformăm ecuaţia punând

$$x = au.$$

Se obţine astfel ecuaţia

$$u^3 + u^2 + \frac{b}{a^2}u - 1 = 0.$$

Singurul parametru este deci

$$c = \frac{b}{a^2}.$$

Se pune

$$u = v - \frac{1}{3},$$

şi se obţine ecuţia

$$v^3 + \frac{3c-1}{3}v - \frac{1}{27}(25 + 9c) = 0. \tag{7}$$

Discuţia realităţii rădăcinilor ecuaţiei (7) se reduce la aceea a ecuaţiei care are forma ecuaţiei (2). Trebue deci să cercetăm semnul polinomului în c de gradul 3

$$4(3c - 1)^3 + (25 + 9c)^2.$$

Putem pune

$$3c - 1 = d$$

şi obţinem polinomul în d

$$4d^3 + (28 + 3d)^2$$

a cărui derivată are rădăcinile imaginare, prin urmare el are o singură rădăcină reală, şi deci şi polinomul în c. Fie c_1 rădăcina reală a polinomului în c.

Prin urmare ecuaţia (6) are 3 sau numai o rădăcină reală după cum avem

$$c = \frac{b}{a^2} \leqq c_1$$

sau

$$c = \frac{b}{a^2} > c_1 .$$

II. *Să studiem variaţia polinomului*

(8) $$y = P(x) = 3x^4 - 4ax^3 + 6bx^2$$

x variind între $-\infty$ şi $+\infty$, coeficienţii a, b fiind reali. Se poate presupune $a \geqq 0$ căci în caz contrar prin o simetrie a curbei (7) prin raport cu axa Oy, revenim la cazul $a \geqq 0$.

Vom distinge trei cazuri după realitatea şi semnul rădăcinilor ecuaţiei derivate

$$y' = 12x(x^2 - xa + b).$$

1°. $a^2 - 4b \leqq 0$. In acest caz avem următorul tablou al variaţiei lui y

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2°. $b < 0$. Fie α şi β rădăcinile trinomului

(9) $$x^2 - ax + b.$$

Tabloul variaţiei este

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$P(\alpha)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$P(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $a^2 - 4b > 0$. $b < 0$. In acest caz tabloul variaţiei este

x	$-\infty$		0		α		β		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$P(\alpha)$	$\searrow$	$P(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

Pentru calcularea expresiilor $P(\alpha)$ şi $P(\beta)$ este mai comod să ne servim de identitatea

$$P(x)=(x^2-ax+b)(3x^2-ax+3b-a^2)+a(4b-a^2)x+b(a^2-3b).$$

Prin urmare deducem

$$P(\alpha)=-a\alpha\delta+b\varepsilon\ ,\quad P(\beta)=-a\beta\delta+b\varepsilon$$

unde s'a notat

$$\delta=a^2-4b \qquad \varepsilon=a^2-3b$$

δ este deci realizantul ecuaţiei (9), iar ε al ecuaţiei

$$3x^2-2ax+b=0,$$

obţinută egalând derivata a doua a lui $P(x)$ cu zero. Această ecuaţie ne dă deci punctele de inflexiune ale curbei (8). In discuţia ecuaţiei de gr. 4 joacă un rol însemnat ca şi la ecuaţia de gr. 3 ecuaţia de gradul 2 care are ca rădăcini pe $P(\alpha)$ şi $P(\beta)$. Pentru aceasta avem

$$P(\alpha)+P(\beta)=-a^4+6a^2b-6b^2$$
$$P(\alpha)\,.\,P(\beta)=b^3(9b-2a^2).$$

Ecuaţia de gradul 2 care are ca rădăcini pe $P(\alpha)$ şi $P(\beta)$ este prin urmare

$$(10)\qquad E(u)=u^2+(a^4-6a^2b+6b^2)u+b^3(9b-2a^2)=0.$$

Ecuaţia (10) are rădăcinile reale sau imaginare în acelaşi timp cu ecuaţia (9) a cărei transformată este.

Deci în cazul 1° $P(\alpha)$ şi $P(\beta)$ sunt imaginari conjugaţi, iar în cazul 2° sunt negativi. In cazul 3° $P(\alpha)$ este pozitiv, iar $P(\beta)$ poate fi pozitiv sau negativ după cum:

$$b>2\delta$$

sau

$$b<2\delta.$$

Discuţia ecuaţiei de gradul 4. Din studiul variaţiei polinomului (8) vom deduce discuţia ecuaţiei

$$(11)\qquad 3x^4-4ax^3+6bx^2-c=0$$

unde c este un coeficient real diferit de zero; căci dacă $c=0$ discuţia se reduce la aceea a unei ecuaţii de gradul 2. Rezolvarea ecuaţiei (11) revine la căutarea punctelor de intersecţie ale curbei (8) cu dreapta

$$(12)\qquad y=c.$$

In discuție vor juca deci un rol important cazurile 1°, 2° și 3° considerate în studiul variației polinomului (8).

Condițiile pentruca ecuația (11) să aibă toate rădăcinile reale. Pentru aceasta curba (8) trebuie să aibă forma din cazul 2° sau 3°. Și anume dreapta (12) va tăia curba (8) în 4 puncte reale dacă vom avea *în cazul 2°* îndeplinite condițiile

$$P(\alpha) \leqq c < 0. \tag{13}$$

Prin urmare c trebuie să fie negativ și așezat în afara rădăcinilor ecuației (10) și anume de partea rădăcinii mai mari, care este $P(\alpha)$. Observăm că $-3b^2$ este așezat între rădăcinile ecuației (10) căci avem

$$E(-3b^2) = b^2(-3a^4 + 16a^2b) < 0$$

căci suntem în cazul 2° și deci $b < 0$. Din cele spuse rezultă că dacă condițiile (13) sunt satisfăcute, sunt deasemenea satisfăcute și următoarele

$$c \cdot E(c) \leqq 0 \ , \ c + 3b^2 > 0 \ , \ bc > 0. \tag{14}$$

In cazul 3°. ecuația (11) va avea toate rădăcinile reale dacă

$$c > 0 \ , \ P(\beta) \leqq c \leqq P(\alpha). \tag{15}$$

Dar aceste condiții din urmă pot fi înlocuite prin condițiile (14). Invers dacă condițiile (14) sunt îndeplinite ecuația (11) are toate rădăcinile reale. Căci sau $c > 0$ și din condițiile (14) rezultă (13), sau $c > 0$ și din (14) rezultă (15).

Condițiile (14) sunt deci necesare și suficiente ca ecuația (11) să aibă toate rădăcinile reale.

Condiția pentruca ecuația (11) să aibă două rădăcini reale și două imaginare.

Pentru aceasta este necesară și suficientă condiția

$$c \cdot E(c) > 0. \tag{16}$$

In adevăr în cazul 1° ecuația (10) are rădăcinile imaginare și deci $E(c) > 0$ și pentruca ecuația (11) să aibă numai două rădăcini imaginare trebuie ca $c > 0$ și deci condiția (16) este satisfăcută. In cazul 2° ca ecuația (11) să aibă numai două rădăcini reale trebuie sau $c > 0$ și deci

$$E(c) > 0$$

sau

$$P(\beta) < c < P(\alpha)$$

și deci

$$E(c) < 0.$$

In ambele cazuri condiția (16) este îndeplinită.

In cazul 3° ecuația (11) are numai două rădăcini reale sau dacă

$$c > 0,\ \mathrm{E}(c) > 0$$

sau dacă

$$c < 0,\ \mathrm{E}(c) < 0$$

și de asemenea condiția (16) este satisfăcută.

Invers dacă (16) este îndeplinită ecuația (11) are două rădăcini reale și două imaginare, căci sau $c > 0$ sau $c < 0$ și urmează că dreapta (12) taie curba (8) în două puncte reale.

Condiția ca ecuația (11) să aibă toate rădăcinile imaginare. Din discuția condițiilor (14) și (16) rezultă că trebuie să avem

$$c\,\mathrm{E}(c) < 0 \tag{17}$$

fără ca să fie satisfăcute simultan și celelalte condiții din (14).

Observarea 1. Expresiunea

$$c\,\mathrm{E}(c) = c^3 + (a^4 - 6a^2 b + 6b^2)\,c^2 + (b^3 - 2a^2)\,c$$

se poate scrie sub forma

$$c\,\mathrm{E}(c) = (a^2 c - 3bc - b^3)^2 - (b^2 - c)^3$$

după cum se poate verifica lesne.

Dacă se caută condiția ca ecuația (11) să aibă o rădăcină dublă se găsește

$$c\,\mathrm{E}(c) = 0.$$

Concluzie: Ecuația (11) are 4 rădăcini reale dacă condițiile (14) sunt satisfăcute. Ea are numai două rădăcini reale dacă condiția (16) este îndeplinită. In toate celelalte cazuri ecuația (11) are numai rădăcini imaginare.

Observarea 2. Discuția ecuației generale de gradul 4

$$\mathrm{P}(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

se reduce după cum se știe la aceea a ecuației (11). Se transformă în adevăr această ecuație punând

$$x = u - \frac{a_1}{4a_0}$$

în ecuația

$$a_0 u^4 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$$

unde avem

$$\alpha = \frac{\mathrm{P}''\left(-\frac{a_1}{4a_0}\right)}{2},\quad \beta = \mathrm{P}'\left(-\frac{a_1}{4a_0}\right),\quad \gamma = \mathrm{P}\left(-\frac{a_1}{4a_0}\right).$$

Această din urmă ecuație se transformă în ecuația

$$\gamma v^4 + \beta v^3 + \alpha v^2 + a_0 = 0$$

care este forma ecuației (11). Toate transformările ce am întrebuințat nu schimbă realitatea rădăcinilor.

Aplicație: Să se discute ecuația

$$3x^4 - 4ax^3 + 6bx^2 - 1 = 0. \tag{18}$$

Pentru ca ecuația (18) să aibă toate rădăcinile reale trebuie ca inegalitățile (14) să fie satisfăcute. Dar $c = 1$ deci pentru aceasta trebuie să avem

$$b > 0 \qquad E(c) \leqq 0.$$

Insă avem

$$E(c) = (a^2 - 3b - b^3)^2 - (b^2 - 1)^3.$$

Deci singura condiție pentruca (18) să aibă rădăcinile reale este

$$E(c) < 0,$$

căci ca $E(c)$ să fie negativ trebuie ca

$$b \geqq 1.$$

Condiția $E(c) \leqq 0$ se poate scrie

$$b(3 + b^2) - (b^2 - 1)^{3/2} \leqq a^2 \leqq b(3 + b^2) + (b^2 - 1)^{3/2}.$$

Este de observat inegalitatea

$$b(3 + b^2) > (b^2 - 1)^{3/2}$$

care revine la inegalitatea

$$6b^4 + 12b^2 - 3b + 1 > 0$$

sau punând $b = \frac{1}{\beta}$ avem neegalitatea

$$\beta^4 - 3\beta^3 + 12\beta^2 + b > 0.$$

Primul membru are forma ecuației (11) afară de factorul 3. Și suntem în cazul 1° pentru curba (8) și fiind $c < 0$ ecuația în β are 4 rădăcini imaginare deci ultima inegalitate este satisfăcută pentru orice β.

TH. ANGHELUȚĂ.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ... ASOCIAȚIUNII ... SIBIIU

PROPOZIȚII DE GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

1. In triunghiul ABC de ortocentru H, fie A_1 piciorul înălțimii și A′ un punct arbitrar pe BC = D. Perpendiculara din H pe AA′ taie pe BC în A″. Fascicolele de raze perpendiculare H (B, C, A, A″) și A (C, B, ∞, A′) având același raport anarmonic, putem scrie:

$$(r) \qquad \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B}{A''C}.$$

2. Această relație este valabilă și ca demonstrație a propoziției: *fie* M_1 ,... *trei puncte ale căror proiecții* A_1 ,... *pe laturele* BC,.. *sunt trei puncte colineare ori picioarele a trei ceviene concurente și* H_1 ,... *ortocentrele triunghiurilor* M_1BC, . . . ; *fie încă* A′, ... *trei puncte colineare ori picioarele a trei ceviene concurente și* A″,... *picioarele pe* BC,.., *ale perpendicularelor în* H_p, *pe* M_1A',...; *punctele* A″,... *sunt de asemenea colineare ori picioarele a trei ceviene concurente, după natura grupelor* A_1,... A′,... (M. GRÜNBAUM : *Contribuții la Geometria Triunghiului:* 7° și 7° bis).

3. Evident că relația dintre A′ și A″ este reciprocă, H fiind un ortocentru comun triunghiurilor ABC, AA′A″. Distanțele centrelor cercurilor circumscrise la dreapta D fiind jumătate distanța AH, centrele sunt paralele cu D, deci AA_1 este o coardă comună a cercurilor ABC, AA′A″. Se regăsește astfel: *o dreaptă* D, *taie două cercuri și axul lor radical, în* B, C, A′, A″, A_1 *care stau în relația* (*r*). (M. GRÜNBAUM: op. cit. Teorema STEINER generalizată). Când cercurile sunt tangente interior în A, A_1 fiind piciorul pe BC al tangentei în A iar AA′, AA″ două ceviene isogonale se obține teorema STEINER:

$$(A'B : A'C) \cdot (A''B : A''C) = A_1B : A_1C = AB^2 : AC^2$$

sau încă, sub alt enunț: A′ *fiind un punct fix pe baza* BC *a triunghiului* ABC, *un cerc variabil trecând prin* A *și* A′ *determină punctele* A″ *la intersecția cu* BC, *și* A_1 *intersecția cu* BC *a coardei lui comune cu cercul circumscris; raportul anarmonic al punctelor* BCA_1A'' *rămâne constant și egal cu raportul în care* A′ *împarte* pe BC. [Teorema STEINER este demonstrată aici numai pentru cercurile secante; aceasta numai ca să servească de soluție imediată,

propoziţiei precedente, care formează punctul fundamental al acestui studiu. Pentru teorema STEINER a se vedea şi C. IVĂNESCU & N. BOTEA, nota 45, G. M. XL].

4. Ca aplicaţie a relaţiei, se poate enunţa:

a) A', B', C' *şi* A", B", C" *fiind picioarele cevienelor a două puncte* P' şi P" *de coordonate baricentrice* α', β', γ', *şi* α'', β'', γ'', *se obţine prin această construcţie punctul* P_1 *intersecţia* AA_1, BB_1, CC_1, *de coordonate* $\alpha_1 = \alpha'\alpha'', \ldots$

De ex: 1°. Dacă A" este conjugatul reciprocului lui A'($\alpha''=-1:\alpha'$),.. A_1 este mijlocul lui BC: P' *având ca triunghiu pedal pe* A'B'C', *fie* P" *reciprocul lui* P *şi* D" = A"B"C" *polara trilineară a lui* P", *cercurile* AA'A",... *taie cercul circumscris după mediane;* şi reciproc: *fie dreapta* D' = A'B'C' *şi* D" *reciproca ei iar* P" *de ceviene* AA", BB", CC" *polul ei trilinear; cercurile* AA'A",... *taie cercul circumscris după mediane.*

2°. Considerând pe A', A" confundate în picioarele bisectoarelor pe BC ($\alpha' = \alpha'' = \pm a$), $\alpha_1 = a^2$ deci: *cercurile trecând prin* A *şi tangente laturei* BC *în picioarele bisectoarelor, sunt tangente, unul interior, altul exterior, cercului* ABC.

3°. Dacă A', A" sunt respectiv picioarele bisectoarelor, A_1 este piciorul simedianei, se regăseşte propoziţia: *cercurile* APOLLONIUS *taie cercul circumscris după simediane.*

b) Fie încă în triunghiul ABC, B'C' şi EF două paralele la BC, mărginite la latură; cercul BB'E va tăia cercul (ABC) după o dreaptă care taie pe AC în M, astfel ca, după (*r*), MA: MC = EA: EC :: B'A : B'C; analog pentru N; deci din cauza paralelelor MN este paralel cu BC şi BM, CN concură pe mediană. Astfel *centrul radical al cercurilor* ABC, BB'E, CC'F *este aşezat pe mediana* AA' [G. M. XLI — 454].

c) In triunghiul ABC de ortocentru H, fie A', B', C' picioarele înălţimilor, T intersecţia tangentei din A la cercul circumscris cu BC, Δ paralela din A la BC, şi A" intersecţia pe BC a perpendicularei din H pe AT; raportul A (T, B, Δ, C) = TB : TC este egal cu al fascicolului de raze perpendiculare

$$H(A'', C, A', B) = (A''C : A''B :: A'C : A'B)$$

atunci pentru reciprocul L al lui T, LB : LC = A"B : A"C :: A'B : A'C. Cercul de diametru AL taie cercul circumscris după o coardă care întâlneşte pe BC în A" conform cu (*r*), deci: *dacă* L *este punctul*

unde dreapta LONGCHAMPS *a triunghiului* ABC, *taie latura* BC, *axa radicală a cercului* (O) *circumscris triunghiului şi a cercului descris pe* AL *ca diametru, întâlneşte pe* BC *în un punct al paralelei duse prin ortocentrul* H *la raza* OA *a cercului circumscris* (Mathesis: 1936—221).

5. Revenind la relaţia (*r*), cercul AA_1A' taie cercul circumscris după $AA_2 - A_2$ pe BC; se deduce în mod analog:

$$\frac{A_2B}{A_2C} = \left(\frac{A'B}{A'C}\right)^2 \cdot \frac{A''B}{A''C} \text{ şi în general } \frac{A_nB}{A_nC} = \left(\frac{A'B}{A'C}\right)^n \cdot \frac{A''B}{A''C}.$$

Când A",... sunt mijloacele laturelor, se poate construi astfel din P (α, β, γ), potenţialul P_n ($\alpha^n, \beta^n, \gamma^n$).

* * *

6. E interesant de menţionat teorema particulară obţinută considerând mijlocul BC ca punct A': *un cerc* (C_a) *trecând printr'un vârf şi mijlocul laturei opuse, retaie latura şi cercul circumscris după două ceviene ale aceluiaş unghiu, conjugate în raport cu laturele* AB *şi* AC.

a) Asociind această observaţie de relaţia (*r*) în care $A' \equiv A''$, se obţine: *fiind dat un punct* P *în planul triunghiului* ABC, *cercurile trecând prin vârfuri şi tangent laturelor opuse în picioarele cevienelor, taie cercul circumscris în* P_a, P_b, P_c. A', B', C' *fiind mijloacele laturelor, cercurile* AP_a A',... *taie pe* BC,... *în picioarele cevienelor unui punct* Q, *al doilea potenţial al lui* P. *(formând cu laturele, arii proporţionale cu patratele ariilor determinate analog de* P).

b) Când cercul (C_a) are centrul pe AO: *cercurile trecând prin mijloacele laturelor şi tangente în vârfurile opuse, cercului circumscris, retaie laturele în picioarele simedianelor.*

c) Axele radicale ale cercului circumscris cu cercurile descrise pe mediane ca diametre, retaie laturele opuse pe axul ortic.

d) Fie încă cercul (C_a) trecând prin punctul diametral opus lui A, el retaie pe BC în A", astfel că AA" conjugata armonică a diametrului AO, este încă isogonala dreptei ce uneşte vârful A cu piciorul α al axului ortic pe BC, căci perechile de ceviene ($A\alpha$, AH) şi (AO, AA") fiind conjugate şi (AO, AH) isogonale, rezultă acelaş lucru pentru cevienele $A\alpha$, AA" [se verifică relaţia

STEINER pentru punctele α şi A″ din rapoartele care figurează în aceeaş relaţie scrisă pentru piciorul înălţimii şi al diametrului AO pe BC]; deci: *cercurile trecând prin vârfurile unui triunghiu, mijloacele laturelor opuse şi tăind diametral ccrcul circumscris retaie laturele corespunzătoare în inversul axului ortic.*

Printr'o transformare cosogonală, aplicată triunghiului AB'C'—A'B'C' fiind triunghiul ortic, se regăseşte propoziţia: *cercurile trecând prin vârfuri, mijloacele laturelor triunghiului ortic şi picioarele acestor drepte pe laturele corespunzătoare cu ale triunghiului dat, se taie în ortocentrul triunghiului.* [I. BANCIU, G. M. XXXIX—149].

e) Cercul (C_a) având centrul pe BC, trece prin simetricul lui A în raport cu BC şi retaie această latură în piciorul perpendicularei în A pe mediană, deci: *cercurile trecând prin vârfuri, mijloacele laturelor respective şi simetricele vârfurilor în raport cu aceleaşi lature, taie cercul circumscris după conjugatele perpendicularelor în vârfuri pe mediane.*

f) Se consideră cercul (C_a) ortogonal cercului circumscris (O): centrul lui, O_a, se află la intersecţia tangentei în vârful A şi a mediatoarei medianei AA'; acest cerc trece prin polul laturei BC în raport cu cercul circumscris, fie P_a şi simetricul lui P_a în raport cu O_a şi situat pe BC. Deci: *Cercurile trecând prin vârfuri, mijloacele laturelor şi polurile laturelor respective, taie cercul circumscris după conjugatele în raport cu unghiurile corespunzătoare, ale perpendicularelar ridicate în vârfuri, pe simediane.*

g) Din aceste două ultime propoziţii, rezultă încă: *cercurile* (C_a) *având centrele, unul pe tangenta în vârf, altul pe latură, taie cercul circumscris după două ceviene isogonale* (Mathesis 1936—296).

h) Anexând la enunţul 6 şi observaţia din articolul: „o propoziţie despre punctul MIQUEL" G. M. XLI—611, se obţine: *un cerc trecând prin vârful* A *şi mijlocul* A' *al laturei opuse, retaie latura* BC *în* A″ *şi cercul circumscris după o coardă care taie pe* BC *în* A_1. *Paralela din* A_1 la AA″ *taie pe* AB, AC *în* β, γ; *cercul* $A\beta\gamma$ *taie cercul circumscris după simediana vârfului* A.

Ca aplicaţie: *fiind dat un triunghiu* ABC, *fie* T *punctul unde latura* BC *taie tangenta în* A *la cercul circumscris* (O), S *un punct oarecare pe* OT, E *şi* F *punctele unde cercul* (S, A) *retaie laturile* AB, AC; A″ *punctul de intersecţie* (BC, EF), A' *mijlocul*

BC; *perpendiculara coborîtă din centrul cercului* AA'A'' *pe* EF *trece prin* O, (Mathesis 1936—233), căci cercul (AA'A'') taie cercul (O) după conjugata cevienei AA'' deci paralelă cu EF căci cercurile (S, A), (O) au ca ax radical simediana din A, oricare ar fi S pe OT.

7. Prezentul studiu a avut scopul să reţină atenţia asupra propoziţiilor simple 1, 3, 6, dar susceptibile de interpretări multiple. Alte extinderi, în Mathesis (1935—309 şi u.).

N. N. MIHĂILEANU.

O PROBLEMA ASUPRA CONICELOR

Să considerăm două conice (C) şi (C'). Luând axa de simetrie a uneia dintre ele ca axă Ox, ecuaţiile lor vor fi:

(C) $f(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cx + d = 0$

(C') $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$

Să căutăm locul geometric al punctelor M, pentru care polarele în raport cu (C) şi (C') se taie sub un unghiu constant.

Fie x_0, y_0 coordonantele punctului M. Coeficienţii unghiulari ai polarelor lui M faţă de (C) şi (C') sunt:

$$m = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}} \quad ; \quad m' = -\frac{F'_{x_0}}{F'_{y_0}}.$$

Ca aceste două direcţii să facă un unghiu constant φ va trebui să avem:

$$\frac{m' - m}{1 + mm'} = \operatorname{tg}\varphi = k \quad \text{sau:} \quad \frac{f'_{x_0}F'_{y_0} - f'_{y_0}F'_{x_0}}{f'_{x_0}F'_{x_0} + f'_{y_0}F'_{y_0}} = k.$$

Scriind fără indici obţinem ecuaţia locului:

(1) $$f'_x F'_y - f'_y F'_x = k\,(f'_x F'_x + f'_y F'_y).$$

Deoarece derivatele parţiale sunt lineare în raport cu x şi y, (1) reprezintă o conică (Γ). Dacă (C) şi (C'), sunt conice cu centru atunci (Γ) trece prin centrele lor, căci este verificată de soluţiile sistemelor:

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad \text{şi} \quad F'_x = 0, \quad F'_y = 0.$$

* * *

Problema pe care vreau să o studiez este următoarea: *în ce cazuri conica* (Γ) *se reduce la un cerc?*

Pentru aceasta trebue ca ecuaţia (1) să se reducă la aceea a unui cerc. Inlocuind derivatele parţiale prin expresiile lor obţinem ecuaţia conicei (Γ) sub forma:

$$(2)\quad a(a_{12}-ka_{11})x^2+[a(a_{22}-ka_{12})-b(a_{11}+ka_{12})]xy$$
$$-b(a_{12}+ka_{22})y^2+[a(a_{23}-ka_{13})+c(a_{12}-ka_{11})]x$$
$$+[-b(a_{13}+ka_{23})+c(a_{22}-ka_{12})]y+c(a_{23}-ka_{13})=0.$$

Condiţiile ca această conică să se reducă la un cerc sunt:

$$(3)\quad \begin{cases} a(a_{12}-ka_{11})=-b(a_{12}+ka_{22}) \\ a(a_{22}-ka_{12})-b(a_{11}+ka_{12})=0. \end{cases}$$

In general sistemul acesta este incompatibil. Ca să existe soluţii pentru k va trebui să existe o legătură între coeficienţii conicelor (C) şi (C′) şi aceasta o găsim eliminând pe k:

$$\frac{a_{12}(a+b)}{aa_{22}-ba_{11}}=\frac{aa_{11}-ba_{22}}{a_{12}(a+b)} \quad\therefore\quad (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(a+b)^2=ab(a_{11}+a_{22})^2.$$

Dacă notăm invarianţii celor două conice, aşa cum se obişnueşte:

$$ab=\delta\ ;\ a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\delta'\ ;\ a+b=\eta\ ;\ a_{11}+a_{22}=\eta'$$

atunci relaţia de mai sus se poate scrie:

$$(4)\quad \boxed{\delta\eta'^2=\delta'\eta^2}.$$

Se vede imediat că această relaţie nu poate fi satifăcută decât dacă δ şi δ' sunt de acelaşi semn, adică dacă cele două conice sunt de acelaşi gen.

In adevăr relaţia (4) reprezintă *condiţia ca cele două conice să fie asemenea* (SALMON, *Sections coniques* pag. 380), adică asimptotele lor — reale sau imaginare — să facă acelaşi unghiu.

Presupunând îndeplinită condiţia (4) se pot pune două probleme:

a) Fiind date conicele (C) şi (C′) să se determine unghiul sub care trebue să se taie polarele lui M faţă de aceste conice, pentru ca (Γ) să se reducă la un cerc.

b) Să se cerceteze dacă există ansambluri de două conice pentru care conica (Γ) se reduce la un cerc, *oricare ar fi unghiul constant sub care se taie polarele lui* M.

A. *Conice cu centru.*

1°. Putem scoate pe k din una oarecare din relaţiile (3), dar putem elimina pe a şi b între cele două relaţii şi obţinem pe k numai în funcţie de coeficienţii conicei (C'). Procedăm astfel găsim :

$$\frac{a_{12} - ka_{11}}{a_{22} - ka_{12}} = -\frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{12}}$$

$$\therefore \quad a_{12}(a_{11} + a_{22})\,k^2 + (a_{11}^2 - a_{22}^2)\,k - a_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0$$

din care deducem :

(5) $\qquad a_{11} + a_{22} = \eta' = 0$ (independentă de k)

(6) $\qquad a_{12}\,k^2 + (a_{11} - a_{22})\,k - a_{12} = 0.$

Ecuaţia (6) este tocmai ecuaţia care ne dă unghiurile pe care le fac axele conicei (C') cu axa Ox, deci cu axa conicei (C).

De aci rezultă următoarea teoremă :

Fiind date două conice asemenea, locul geometric ale punctului M, ale cărui polare faţă de cele două conice se taie sub acelaşi unghiu ca şi axele lor, este un cerc ce trece prin centrele conicelor.

2°. Să vedem şi cazurile când (Γ) se reduce la un cerc indiferent de unghiul sub care se taie polarele.

a) Dacă conica (C') este cerc, relaţia (4) cere ca şi conica (C) să fie cerc. Axele lor fiind nedeterminate k este şi el nedeterminat, după cum se poate constata şi direct făcând

$$a_{11} = a_{22} \quad \text{şi} \quad a_{12} = 0.$$

Deci : *locul geometric al punctelor pentru care polarele în raport cu două cercuri se taie sub un unghiu constant, este un cerc ce trece prin centrele cercurilor date* (rezultat cunoscut).

b) Relaţia (5) $\eta' = 0$ împreună cu (4) ne dă $\eta = 0$.

In acest caz relaţiile (3) sunt satisfăcute oricare ar fi valoarea lui k. Deci :

Locul geometric al punctelor pentru care polarele în raport cu două iperbole echilatere se taie sub un unghiu constant, este

un cerc ce trece prin centrele celor două hiperbole (nu ştiu dacă acest rezultat e cunoscut).

B. *Parabole.*

1°. Relaţia (4) e satisfăcută totdeauna căci $\delta = \delta' = 0$. Deducem:

$$a = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Din (3) rezultă:

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}},$$

adică acelaşi unghiu ca şi al axelor parabolelor.

Introducând în (2) această valoare a lui k şi $a = 0$, toţi termenii de gradul II se anulează şi rămâne ecuaţia unei drepte. Cercul la care ar fi trebuit să se reducă (Γ) degenerează într'o dreaptă.

Aşa dar: *locul geometric, al punctelor pentru care polarele în raport cu două parabole se taie sub acelaşi unghiu ca şi axele lor, este o dreaptă.*

2°. Pentru ca locul să se reducă la o dreaptă oricare ar fi valoarea lui k, va trebui ca acesta să fie nedeterminat, adică să avem $a_{11} = a_{12} = 0$, ceea ce atrage după sine $a_{22} = 0$. In acest caz conica (C') se reduce la o dreaptă şi problema nu se mai poate pune.

* * *

In rezumat conica (Γ) se reduce la un cerc, dacă cele două conice date sunt:

a) Cercuri sau iperbole echilatere.

b) Conice asemenea, iar polarele punctului M faţă de ele se taie sub acelaşi unghiu ca şi axele lor.

Dacă cele două conice sunt parabole, iar polarele punctului M se taie sub acelaşi unghiu ca şi axele lor, conica (Γ) degenerează într'o dreaptă.

GH. D. SIMIONESCU.

NOTE MATEMATICE

44. *Dublul semn* ±. Această grupare a semnelor + şi — nu are totdeauna aceiaşi semnificare.

Uneori prin acest semn se concentrează două formule sau expresiuni care nu se deosibesc decât în unele locuri prin semnul + şi —. Astfel, cele două rădăcini ale ecuaţiei:

$$x^2 - 2px + q = 0$$

se scriu la un loc:

$$x = p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

Cele patru rădăcini ale ecuaţii:

$$x^4 - 2px^2 + q = 0$$

se scriu la un loc:

$$x = \pm \sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q}}.$$

Alte ori ± arată că uneori trebue luat semnul + şi uneori semnul —. Astfel în formula:

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

se ia + când $\sin x > 0$ şi — când $\sin x < 0$. Aşa $x = 45^0$ cere semnul + iar $x = 225^0$ cere semnul —.

Nu s'ar putea găsi un mijloc de a separa aceste două semnificări ale lui ± ? Mi se pare că în al doilea caz s'ar putea scri acest semn în parenteză: (±), ca să se arate că nu sunt ambele semne legate de o dată de cea ce urmează după ele. Astfel formula de mai sus s'ar scrie:

$$\sin x = (\pm)\sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

I. IONESCU.

45. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). In condiţiunile problemei enunţate la pag. 247 Vol. XLII N_p nu începe cu 3. Am găsit următoarele 156 soluţiuni pentru $p = 3$ şi N_p începând cu 4.

N_p	N	N_p	N
401 579 862	1 204 739 586	425 601 978	1 276 805 934
401 652 789	1 204 958 367	425 619 780	1 276 859 340
401 652 879	1 204 958 637	427 890 165	1 283 670 495
401 796 582	1 205 389 746	427 891 650	1 283 674 950
401 798 256	1 205 394 768	428 790 165	1 286 370 495
402 157 986	1 206 473 958	428 791 650	1 286 374 950
402 159 786	1 206 479 358	457 601 982	1 372 805 946
402 179 658	1 206 538 974	457 602 198	1 372 806 594
402 196 578	1 206 589 734	457 619 802	1 372 859 406
402 561 798	1 207 685 394	457 619 820	1 372 859 460
402 561 978	1 207 685 934	457 620 198	1 372 860 594
402 789 165	1 208 367 495	458 019 762	1 374 059 286
402 879 165	1 208 637 495	458 021 976	1 374 065 928
415 798 602	1 247 395 806	458 197 602	1 374 592 806
415 798 620	1 247 395 860	458 197 620	1 374 592 860
415 978 602	1 247 935 806	458 201 976	1 374 605 928
415 978 620	1 247 935 860	458 219 760	1 374 659 280
416 502 789	1 249 506 367	459 760 182	1 379 280 546
416 502 879	1 249 508 637	459 760 218	1 379 280 654
416 527 890	1 249 583 670	459 761 802	1 379 285 406
416 528 790	1 249 586 370	459 761 820	1 379 285 460
417 965 802	1 253 897 406	459 762 018	1 379 286 054
417 965 820	1 253 897 460	459 762 180	1 379 286 540
417 980 256	1 253 940 768	459 801 762	1 379 405 286
419 657 802	1 258 973 406	459 802 176	1 379 406 528
419 657 820	1 258 973 460	459 817 602	1 379 452 806
419 780 256	1 259 340 768	459 817 620	1 379 452 860
420 157 986	1 260 473 958	459 820 176	1 379 460 528
420 159 786	1 260 479 358	460 175 982	1 380 527 946
420 179 658	1 260 538 974	450 197 582	1 380 592 746
420 196 578	1 260 589 734	460 217 598	1 380 652 794
421 579 860	1 264 739 580	460 219 758	1 380 659 274
421 796 580	1 265 389 740	461 759 802	1 385 279 406
421 965 780	1 265 897 340	461 759 820	1 385 279 460
425 601 798	1 276 805 394	461 975 802	1 835 927 406

1) Urmare la Nota dela pag. 413, Vol. XLIII.

N_p	N	N_p	N
461 975 820	1 385 927 460	489 752 601	1 469 257 803
462 017 598	1 386 052 794	489 752 610	1 469 257 830
462 019 758	1 386 059 274	489 760 125	1 469 280 375
462 197 580	1 386 593 740	489 760 251	1 469 280 753
475 986 012	1 427 958 036	489 761 025	1 469 283 075
475 986 021	1 427 958 063	489 761 250	1 469 283 750
475 986 102	1 427 958 306	489 762 501	1 469 287 503
475 986 120	1 427 958 360	489 762 510	1 469 287 530
475 986 201	1 427 958 603	490 128 765	1 470 386 295
475 896 210	1 427 958 630	490 287 651	1 470 862 953
476 501 289	1 429 503 867	491 028 765	1 473 086 295
476 502 891	1 429 508 673	491 287 650	1 473 862 950
476 510 289	1 429 530 867	492 876 501	1 478 629 503
476 512 890	1 429 538 670	492 876 510	1 478 629 530
476 528 901	1 429 586 703	497 586 012	1 492 758 036
476 528 910	1 429 586 730	497 586 021	1 492 758 063
485 976 012	1 457 928 036	497 586 102	1 492 758 306
485 976 021	1 457 928 063	497 586 120	1 492 758 360
485 976 102	1 457 928 306	497 586 201	1 492 758 603
485 976 120	1 457 928 360	497 586 210	1 492 758 630
485 976 201	1 457 928 603	498 576 012	1 495 728 036
485 976 210	1 457 928 630	498 576 021	1 495 728 063
487 650 129	1 462 950 387	498 576 102	1 495 728 306
487 650 291	1 462 950 873	498 576 120	1 495 728 360
487 651 029	1 462 953 087	498 576 201	1 495 728 603
487 651 290	1 462 953 870	498 576 210	1 495 728 630
487 652 901	1 462 958 703	498 750 126	1 496 250 378
487 652 910	1 462 958 730	498 750 261	1 496 250 783
489 012 765	1 467 038 295	498 751 026	1 496 253 078
489 027 651	1 467 062 953	498 751 260	1 496 253 780
489 102 765	1 467 308 295	498 752 601	1 496 257 803
489 127 650	1 467 382 950	498 752 610	1 496 257 830
489 276 501	1 467 829 503	498 760 125	1 496 280 375
489 276 510	1 467 829 530	498 760 251	1 496 280 753
489 750 126	1 469 250 378	498 761 025	1 496 283 075
489 750 261	1 469 250 783	498 761 250	1 496 283 750
489 751 026	1 469 253 078	498 762 501	1 496 287 503
489 751 260	1 469 253 780	498 762 510	1 496 287 530

(Va urma).

G-L GH. BUICLIU.

46. *O formă a restului diviziunii de polinoame* *).

Să considerăm polinoamele

$$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$
$$\varphi_p(x) = (x - x_p)(x - x_{p-1})\ldots(x - x_1) \qquad (n \geqslant p)$$

şi fie

f_{n-1}, $f_{n-2}, \ldots f_{n-k}$ câturile lui $f_n(x)$ prin $\frac{\varphi_p}{\varphi_{p-1}}$, $\frac{\varphi_p}{\varphi_{p-2}}, \ldots \frac{\varphi_p}{\varphi_1}$, φ_p

iar R_{n-i} restul câtului $\frac{f_{n-i}}{x - x_{p-i}}$.

1°. In acest caz avem următoarele relaţiuni:

$$\frac{f_n(x)}{x - x_p} = f_{n-1}(x) + \frac{R_{n-1}}{x - x_p} \quad \text{şi} \quad \frac{f_n(x)}{(x - x_p)(x - x_{p-1})} = \frac{f_{n-1}(x)}{x - x_{p-1}} + \frac{R_{n-1}}{(x - x_p)(x - x_{p-1})}.$$

Insă se observă că de asemenea

$$\frac{f_{n-1}}{x - x_{p-1}} = f_{n-2} + \frac{R_{n-2}}{x - x_{p-1}}$$

şi deci

$$\frac{f_n}{(x - x_p)(x - x_{p-1})} = f_{n-2} + \frac{R_{n-1}}{(x - x_p)(x - x_{p-1})} + \frac{R_{n-2}}{x - x_{p-2}}.$$

In *mod general*, putem scrie

$$\frac{f_n}{\varphi_p} = f_{n-p} + \frac{R_{n-1}}{\varphi_p} + \frac{R_{n-2}}{\varphi_{p-1}} + \ldots + \frac{R_{n-p}}{\varphi_1}$$

şi scăpând de numitori obţinem

$$f_n = \varphi_p f_{n-p} + R_{n-1} + (x - x_p) R_{n-2} + \ldots + (x - x_p)(x - x_{p-1})\ldots(x - x_2) R_{n-p}.$$

Din această relaţie se vede imediat că *restul* împărţirii $\frac{f_n}{\varphi_p}$ este

$$R = R_{n-1} + (x - x_p) R_{n-2} + (x - x_p)(x - x_{p-1}) R_{n-3} + \ldots + (x - x_p)\ldots(x - x_2) R_{n-p}. \qquad (1)$$

*) Prezenta Notă a fost trimisă G. M. în 1925.

Cum avem în general

$$R_{n-i} = f_{n-i+1}(x_{p-i+1})$$

înseamnă că forma definitivă a restului R este

$$\boxed{\begin{aligned} R = {} & f_n(x_p) + (x - x_p) f_{n-1}(x_{p-1}) + \dots \\ & + (x - x_p)(x - x_{p-1}) \dots (x - x_2) f_{n-p+1}(x_1) \end{aligned}} \quad (2)$$

Dacă facem în (2) $x_1 = x_2 = \dots = x_p = \lambda$ obţinem

$$R = f_n(\lambda) + (x - \lambda) f_{n-1}(\lambda) + \dots + (x - \lambda)^{p-1} f_{n-p+1}(\lambda) \quad (3)$$

expresiunea restului diviziunei lui $f_n(x)$ prin $(x - \lambda)^p$.

2°. Să calculăm funcţiunile $f_{n-k}(x)$.

Observăm că

$$f_n(x) = a_0(x^n - x_p^n) + a_1(x^{n-1} - x_p^{p-1}) + \dots + a_{n-1}(x - x_p) + a_0 x^p + a_1 x_p^{p-1} + \dots + a_{n-1} x_p$$

pe care dacă îl împărţim cu $x - x_p$ obţinem

$$f_{n-1}(x) = a_0 x^{n-1} + (a_0 x_p + a_1) x^{n-1} + \dots + a_0 x_p^{n-1} + a_1 x_p^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Continuând împărţirea avem

$$f_{n-2}(x) = a_0 x^{n-2} + [a_0(x_p + x_{p-1}) + a_1] x^{n-3} + [a_0(x_p^2 + x_p x_{p-1} + x_{p-1}^2) + a_1(x_p + x_{p-1}) + a_2] x^{n-4} + \dots$$

şi dacă notăm

$$\psi_1(x_p) = \sum_1^p x_p$$

$$\psi_2(x_p) = \sum_1^p x_p^2 + \sum_1^p x_p x_{p-1}$$

. . . . . .

$$\psi_p(x_p) = \sum_1^p x_p^p + \sum_1^p x_p^{p-1} x_{p-1} + \dots + \sum_1^p x_p x_{p-1} \dots x_1$$

expresiunea funcţiunii $f_{n-k}(x)$ se scrie:

$$f_{n-k}(x) = a_0 x^{n-k} + [a_0 \psi_1(x_k) + a_1] x^{n-k-1} + [a_0 \psi_2(x_k) + a_1 \psi_1(x_k) + a_2] x^{n-k-2} + \dots + [a_0 \psi_{n-k}(x_k) + a_1 \psi_{n-k-1}(x_k) + \dots + a_{n-k}]. \quad (4)$$

In cazul particular $x_i = \lambda$

$$\psi_1(\lambda) = \lambda C_k^1$$

$$\psi_2(\lambda) = \lambda^2 (C_k^1 + C_k^2)$$

$$\psi_3(\lambda) = \lambda^3 (C_k^1 + C_k^2 + C_k^3)$$

. . . . . .

$$\psi_k(\lambda) = \lambda^k (C_k^1 + C_k^2 + \ldots + C_k^k)$$

şi înlocuind pe $x = \lambda$, se obţine

$$f_{n-k}(\lambda) = a_0\lambda^{n-k}[C_k^0 + (n-k-1)C_k^1 + (n-k-2)C_k^2 + \ldots]$$

$$+ a_1\lambda^{n-k-1}[C_k^0 + (n-k-2)C_k^1 + \ldots] + \ldots + a_{n-k}. \qquad (5)$$

3°. Să găsim şi direct funcţiunile $f_{n-k}(\lambda)$.

Ţinând seamă de valoarea (3) a restului R, polinomu $f_n(x)$ este

$$f_n(x) = (x-\lambda)^k f_{n-k}(\lambda) + f_n(\lambda) + (x-\lambda) f_{n-1}(\lambda) + \ldots$$

$$+ (x-\lambda)^{k-1} f_{n-k+1}(\lambda)$$

şi făcând identificarea cu cealaltă formă a lui $f_n(x)$ se obţine

$$a_{n-k} = f_{n-k}(\lambda) - \lambda C_{k+1}^1 f_{n-k-1}(\lambda) + \lambda^2 C_{k+2}^2 f_{n-k-2}(\lambda) - \ldots$$

Dacă în această relaţie facem $k = 0, 1, \ldots n$ obţinem un sistem din care se scoate imediat, valoarea lui $f_{n-k}(\lambda)$

$$f_{n-k}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{n-k} & -\lambda C_{k+1}^1 & \lambda^2 C_{k+2}^2 \ldots (-\lambda)^{n-k} C_n^k \\ a_{n-k-1} & 1 & -\lambda C_{k+2}^1 \ldots (-\lambda)^{n-k-1} C_n^{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0 & 0 & 0 \quad 1 \end{vmatrix}$$

Valoare ce am mai găsit-o şi cu altă ocazie *(Curierul Matematic, Vol. III pag. 65)*,

CĂPITAN MIHAIL I. FOCŞENEANU.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXV, fascicola II. Martie 1938. Asupra integralelor duble ale lui GAUSS, DARBOUX, SCHWARTZ şi POISSON de J. C. VIGNAUX. Asupra desfăşurărilor în serie de polinoame ortogonale de mai multe variabile de FERNANDO L. GASPAR.

Boletin Matematico, publicat de B. I. BAIDAFF. Buenos-Aires. Anul XI. Nr. 3. Aprilie 1938. Un mod de găsirea mediilor în cazuri particulare a unei expresii matematice de JOSE BARRAL SOUTO.

Idem. Anul XI. Nr. 4. Notă asupra cocleoidei de N. N. MIHĂILEANU. Rezolvare în numere întregi a sistemului diofantian de A. GLODEN. Chestiune de metodă de B. I. BAIDAFF.

Buletinul „I. R. E.". Anul VI. Nr. 1. Martie 1938.

Bulletin of the American Mathematical Society. Menasha. Vol. 44. Nr. 3. Martie 1938.

Idem. Vol. 44. Nr. 4. Aprilie 1938. Ecuaţii diferenţiale lineare de W. J. TRJITZINSKY. Remarcă asupra reprezentării grupelor de TADASI NAKAYAMA. Forma cuadratică în calculul variaţiilor de A. A. ALBERT. Transformări birationale de speţa 4-a şi speţa 5-a de A. R. WILLIAMS. Funcţiuni multivalente de ordin p. de M. S. ROBERTSON.

Journal de mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 62. Nr. 15. 1 Mai 1938. Paris.

Idem. Anul 62. Nr. 16. 15 Mai 1938. Paris.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVIII. Nr. 3. 15 Mai 1938. Soluţiunile întregi ale ecuaţiei $x^2 - ay^2 = b$. de GH. CONSTANTINESCU.

Saneamiento Urbano en la República Argentina. Universidad nacional de La Plata. Nr. 114. Decemvrie 1937. Aprovizionarea cu apă a oraşelor de EVARISTO ARTAZA.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives Anul 8. Nr. 6. Iunie 1938.

The Mathematical Gazette. Vol. XXII. Nr. 249. Mai 1938. London. Asupra patrulaterului FEUERBACH de N. M. GIBBINS. Note asupra triunghiului de N. M. GIBBINS.

TH. ANGHELUTZA, *Une démonstration nouvelle du théorème: Une fonction, dont la dérivée est nulle dans un intervalle, a la même valeur dans cet intervale.* (Extras din Bulletin de Mathématiques et de Physique de l'école Polytechnique Bucarest).

AUREL COSTĂCHEL. *Problème du tracé elliptique des routes.* (Extras din Bulletin de Mathématiques et de Phisique de l'école Polytechnique Bucarest).

V. VÂLCOVICI. Asupra unei configuraţii de statică vectorială. (Extras din Volumul Jubilar „GRIGORE ANTIPA"). Bucureşti 1938.

CERERI

277. Harnicul nostru colaborator în Domeniul Istoricului matematicilor în România, D-l V. MARIAN, ne propune ca *Gazeta Matematică* să publice o traducere română a Elementelor lui EUCLIDE, pe care s'ar oferi s'o facă D-sa.

E în adevăr regretabil ca această operă celebră care a avut, după *Biblie*, cele mai multe ediţii în toată lumea să nu aibă exemplare şi în limba noastră! Incercări s'au făcut ca de exemplu una în Revista care a apărut la Iaşi: *Recreaţii matematice.*

Ce se mai ştie de asemenea încercări?

I. IONESCU.

DIVERSE

Universitatea din Cluj. *Secţiunea de matematici.* Programul „*Săptămânei matematice*" dela 19 la 26 Mai:

P. MONTEL. Leçons sur l'interpolation. 19, 20, 23 şi 24 Mai ora 11—12.

M. BIERNACHI. Sur la théorie des fonctions analytiques: 25 şi 26 Mai, ora 11—12 şi Sur la théorie des fonctions analytiques, la 25 Mai ora 16—17.

J. L. DESTOUCHES. Les fondements de la physique théorétique: la théorie structuale. 23 Mai, ora 17—18.

M-LLE M. CHARPENTIER. Sur les points de *Peano*. 24 Mai, ora 17—18.

D. POMPEIU. Subiect rezervat. 19 Mai, ora 17—18.

N. TEODORESCU. La géométrie des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque. 20 Mai, ora 16—17.

S. STOILOV. Recherches récentes sur les transformations intérieures. 24 Mai, ora 16—17.

M. GHERMĂNESCU. Combinaţiuni excepţionale de funcţiuni întregi. 20 Mai, ora 17—18.

O. ONICESCU. Le comportement asymptotiques des chaînes. 25 Mai, ora 17—18.

Cercul Matematic a ţinut şedinţe în orele 18—19 în zilele:

I. Mai 19: G. BRATU. Sur un théorème de la géométrie du triangle.

D. V. IONESCU. Sur une équation fonctionelle.

C. IACOB. Sur le problème harmonique de DIRICHLET.

II. Mai 23: PAUL GILLIS. Un problème d'existence dans le calcul des variations.

N. ABRAMESCU. Sur l'étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points.

R. BĂDESCU. Asupra unor instalaţii de cianurare a minereului de aur.

III. Mai 25: TH. ANGHELUŢĂ. Observare asupra limitării modulelor zerurilor unui polinom date de D-nii PAUL MONTEL şi VAN VLECK.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAŢIUNEA SIBIU

P. SERGESCU. Bătălia pentru triumful calcului infinitesimal.

G. CĂLUGĂREANU. Invariants de prolongement des fonctions entiers.

Sâmbătă 21 Mai şi Duminecă 22 Mai excursie la Turda, Câmpeni, Abrud, Brad, Tebea.

Sporirea Bibliotecii.

E. BARDEY. Methodisch geordnete *Aufgabensammlung*, mehr als 8000 Aufgaben, enthaltend über alle Teile der Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. Lipsca 1901.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

FRIEDRICH REIDT. Aufgaben-Sammlung zur Arithmetik und Algebra. Berlin 1900.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4378. *Să se stabilească identităţile*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(2k+1)a}{\cos^2 ka \cos^2(k+1)a} = \frac{\operatorname{tg}^2(m+1)a - \operatorname{tg}^2 a}{\sin a}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(2k+1)a}{\sin^2 ka \sin^2(k+1)a} = \frac{\operatorname{cotg}^2 a - \operatorname{cotg}^2(m+1)a}{\sin a}.$$

CEZAR IVĂNESCU.

Soluţie dată de D-l VINTILĂ GRIGORESCU, NEGREA A. MIRCEA-LEONTE, D. MAVRODIN.

Cunoscând relaţiile:

$$\frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q} = \operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q$$

$$\frac{\sin(p \pm q)}{\sin p \sin q} = \operatorname{cotg} p \pm \operatorname{cotg} q$$

putem scrie:

$$\frac{\sin(2k+1)a}{\cos^2 ka \cos^2(k+1)a} = \frac{\sin(k+k+1)a}{\cos ka \cos(k+1)a} \cdot \frac{\sin(k+1-k)a}{\cos ka \cos(k+1)a} \cdot \frac{1}{\sin a}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2(k+1)a - \operatorname{tg}^2 ka}{\sin a}. \qquad (1)$$

In mod identic avem

$$\frac{\sin(2k+1)a}{\sin^2 ka \sin^2(k+1)a} = \frac{\operatorname{cotg}^2(k+1)a - \operatorname{cotg}^2 ka}{\sin a} . \quad (2)$$

Ţinând seama de relaţia (1), avem :

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(2k+1)a}{\cos^2 ka \cos^2(k+1)a} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{tg}^2(k+1)a - \operatorname{tg}^2 ka}{\sin a}$$

$$= \frac{1}{\sin a}\{(\operatorname{tg}^2 2a - \operatorname{tg}^2 a) + (\operatorname{tg}^2 3a - \operatorname{tg}^2 2a)$$

$$+ \ldots + [\operatorname{tg}^2(m+1)a - \operatorname{tg}^2 ma]\} = \frac{\operatorname{tg}^2(m+1)a - \operatorname{tg}^2 a}{\sin a}$$

c. c. t. d.

Ţinând seama de relaţia (2), se stabileşte identitatea a doua din enunţ, în acelaşi mod.

Notă. 1. Toată greutatea rezolvirei problemei consta în cunoaşterea sau stabilirea relaţiilor (1) şi (2) din soluţia precedentă.

a) Au stabilit aceste relaţii (1) şi (2) pe alte căi şi au rezolvat foarte bine problema Domnii : V. F. CEAUŞESCU, M. F. AMĂRĂŞTEANU, I. I. BUZINCU, VILHELM CSEKE, TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI, N. D. ŞTEFĂNESCU ;

b) S'au servit de relaţiile (1) şi (2) indicându-le fără a le demonstra sau arăta unde se găsesc demonstrate, Domnii : TUDOR STOICESCU, GR. MARTEŞ, P. V. COJOCARU, C. I. COTESCU, precum şi următorii elevi ai liceului militar laşi : L. BIVOLARU, I. GR BOGDAN. V. N. BUCUR, CĂLIN I. DIMITRIU, I. D. ENACHE, P. I. MAMUT, N. I. PUNGĂ.

2. D-nii D. LEBĂDĂ şi N. GAVRILESCU au indicat că prima identitate a fost stabilită în *Revista Matematică din Timişoara* din 15.III.1935 soluţionând şi a doua identitate pe aceeaşi cale ; iar D-nii N. GAVRILESCU şi N. MILU, indicând acelaşi lucru pentru prima identitate, s'au servit de relaţia (2) pentru stabilirea celei de a doua.

GENERAL G. I. LITEANU.

PROBLEMA 4689. *Să se demonstreze că dacă primii trei termeni ai şirului lui* FIBONACCI *sunt :*

$$u_1 = u_2 = 1 \quad , \quad u_3 = 2$$

atunci

$$u_{60t} = 10m, \quad u_{60t+1} = 10m + u_1, \quad u_{60t+2} = 10m + u_2,$$

unde m *şi* t *sunt numere întregi.*

G-L GH. BUICLIU.

Demonstrarea acestei proprietăţi este cuprinsă în soluţia ce am dat problemei 3832 la pag. 146 din acest volum al *Gazetei Matematice.*

D-l A. O. SACTER a trimis o foarte bună soluţiune, bazată pe proprietăţile şirului lui FIBONACCI, publicate în *Gazeta Matematică* Vol. XXI pag. 125 şi Vol. XXXVIII pag. 170.

Foarte bune soluţiuni, date pe alte căi s'au primit de la D-şoara ALEXANDRA A. VASILESCU (Lic de fete, Alba Iulia) şi de la d-nii T. C. ŞTEFAN (Lic. „Traian", Turnu Severin) şi M. A. VASILESCU-STABU (Lic. „Mihai Viteazul", Alba Iulia).

A se vedea şi nota de la pag. 148, la finele soluţiei problemei 3832.

PROBLEMA 4762. *Fie în plan trei cercuri* (O_i) *cu centrele* O_i, $i = 1, 2, 3$. *Fie* S_1 *şi* S'_1 *centrele de similitudine directă şi inversă a cercurilor* (O_2) *şi* (O_3); S_2 *şi* S'_2; S_3 *şi* S'_3 *punctele analoage. Fie* O *centrul cercului* $O_1O_2O_3$. *Să se arate că:*

1°. *Perpendicularele coborîte din* S'_i *pe* S_iO, $i = 1, 2, 3$, *sunt concurente.*

2°. *Perpendicularele coborîte din* S_1 *pe* S'_1O, *din* S_2 *pe* S'_2O, *din* S'_3 *pe* S_3O *sunt concurente.*

3°. *Tangentele în* O_i *la cercul* $(O_1O_2O_3)$ *se întâlnesc cu perpendicularele coborîte din* S_i *pe* S'_iO *în trei puncte colineare.*

4°. *Tangentele în* O_1, O_2, O_3 *la cercul* $(O_1O_2O_3)$ *se întâlnesc respectiv cu perpendicularele coborîte din* S_1 *pe* S'_1O, *din* S'_2 *pe* S_2O, *din* S'_3 *pe* SO_3 *în trei puncte colineare.*

AD. GHEORGHIU.

Se ştie (D'ALEMBERT) că grupele de puncte: S_1, S_2, S_3; S_1, S'_2, S'_3; S_2, S'_1, S_3'; S_3, S'_1, S'_2 sunt colineare.

Grupele de puncte: S_1, O_3, S'_1, O_2; S_2, O_3, S'_2, O_1; S_3, O_2, S'_3, O_1 formează respectiv diviziuni armonice.

Triunghiurile $O_1O_2O_3$, $S'_1S'_2S'_3$ şi $S'S''S'''$ (S' fiind intersecţia dreptelor S_2O_2 cu S_3O_3, etc.) sunt două câte două omologice având ca centru de omologie punctul ω şi ca axă de omologie, dreapta $S_1S_2S_3$.

1°. Pentrucă S'_1 este conjugatul armonic al punctului S_1 în raport cu O_2O_3 şi pentrucă acestea sunt pe cercul (O), rezultă că perpendiculara din S'_1 pe S_1O este polara punctului S_1 faţă de cercul (O).

Analog, perpendicularele din S'_2 și S'_3 respectiv pe S_2O și S_3O sunt respectiv polarele punctelor S_2 și S_3 față de cercul (O).

Cum S_1, S_2, S_3 sunt colineare, rezultă că polarele lor față de cercul (O) sunt *concurente,* trecând prin polul ω_1 al dreptei $S_1S_2S_3$ față de cercul (O).

2°. Pentrucă S_1 este conjugatul armonic al punctului S'_1 în raport cu O_2, O_3 și pentrucă acestea sunt pe cercul (O), rezultă că perpendiculara din S_1 pe S'_1O este polara punctului S'_1, față de cercul (O).

Analog, perpendicularele din S_2 și S'_3 respectiv pe S'_2O și S_3O sunt respectiv polarele punctelor S'_2 și S_3 față de cercul (O).

Cum S'_1, S'_2, S_3 sunt colineare, rezultă că polarele lor față de cercul (O) sunt *concurente,* trecând prin polul ω_2 al dreptei $S'_1S'_2S_3$ față de cercul (O).

Se definesc analog încă două puncte ω_3 și ω_4 polurile dreptelor $S_1S'_2S'_3$ și $S'_1S_2S'_3$.

3°. Tangenta în O_1 la cercul (O) este polara punctului O_1, iar perpendiculara din S_1 pe S'_1O este polara punctului S'_1, față de cercul (O); rezultă că intersecția α a acestor polare este polul dreptei $O_1S'_1$ față de cercul (O).

La fel punctele analoage β și γ sunt respectiv polurile dreptelor $O_2S'_2$ și $O_3S'_3$.

Cum dreptele $O_1S'_1$, $O_2S'_2$, $O_3S'_3$ sunt concurente în ω, rezultă că punctele α, β, γ sunt *colineare* pe polara punctului ω față de cercul (O).

4°. Tangenta în O_1 la cercul (O) și perpendiculara din S_1 pe S'_1O se întretaie în α care, am arătat la 3°, este polul dreptei $O_1S'_1$. Tangenta în O_2 la cercul (O) este polara punctului O_2, iar perpendiculara din S'_2 pe S_2O este polara punctului S_2, față de cercul (O); rezultă că intersecția β' a acestor drepte este polul dreptei O_2S_2 față de cercul (O). Analog se definește punctul γ' pol al dreptei O_3S_3 față de cercul (O).

Cum dreptele $O_1S'_1$, O_2S_2, O_3S_3 sunt concurente în punctul S' (ușor de demonstrat ținând seama de rapoartele în care punctele S'_1, S_2, S_3 împart laturile triunghiului $O_1O_2O_3$); rezultă că punctele α, β', γ' sunt *colineare* pe polara punctului S'.

Se definesc analog încă două drepte α', β, γ' și α', β', γ polarele punctelor S'' și S'''.

Observaţiuni. a) Dreapta $O\omega_1$ este perpendiculară pe dreapta $S_1S_2S_3$, căci aceasta este polara punctului ω_1 faţă de cercul (O).

b) Dreptele $\alpha\beta'\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma'$, $\alpha'\beta'\gamma$ sunt respectiv polarele punctelor S', S'', S''' şi deci sunt respectiv perpendiculare pe dreptele OS', OS'', OS'''.

c) Triunghiurile $S'S''S'''$ şi $\alpha'\beta'\gamma'$ au laturile respectiv polarele vârfurilor celuilalt, deci sunt polar reciproce faţă de cercul (O).

d) Triunghiul tangenţial al triunghiului $O_1O_2O_3$ şi triunghiul $\alpha'\beta'\gamma'$ sunt omologice, căci am arătat la 4° că tangenta în O_1 la cercul (O) şi $\beta'\gamma'$ se întretaie în α, analog tangentele în O_2 şi O_3 la cercul (O) taie respectiv $\gamma'\alpha'$ şi $\alpha'\beta'$ în β şi γ; iar α, β, γ sunt colineare conform lui 3°.

M. AL. VASILESCU-ŞTABU
Cl. V-a Lic. „Mihai-Viteazu" Alba-Iulia.

Soluţii analoage dela D-nii: PAUL DOBRESCU (Greci-Ilfov) şi CONST. N. GAVRILESCU (Şc. Preg. Ofiţeri Bucureşti).

PROBLEMA 4764. *Să se rezolve sistemul:*

$$C_m^n x + C_m^{n+1} y + C_m^{n+2} z = m$$
$$C_{m+1}^n x + C_{m+1}^{n+1} y + C_{m+1}^{n+2} z = m+1$$
$$C_{m+2}^n x + C_{m+2}^{n+1} y + C_{m+2}^{n+2} z = m+2.$$

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de D-nii: L-T MIHAI C. I. VLAD (Cluj), D-TRU RIPIANU, TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI (bacalaureat), M. D. POPA (lic. militar Iaşi) şi RADU I. CIURESCU (cl. VII Col. Naţional „Sf. Sava).

Aplicăm regula lui CRAMER, notând cu D determinantul coeficienţilor şi cu D_x, D_y, D_z determinanţii corespunzători necunoscutelor x, y, z. Să calculăm pe rând aceşti determinanţi.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{m!}{n!(m-n)!} & \frac{m!}{(n+1)!(m-n-1)!} & \frac{m!}{(n+2)!(m-n-2)!} \\ \frac{(m+1)!}{n!(m-n+1)!} & \frac{(m+1)!}{(n+1)!(m-n)!} & \frac{(m+1)!}{(n+2)!(m-n-1)!} \\ \frac{(m+2)!}{n!(m-n+2)!} & \frac{(m+2)!}{(n+1)!(m-n+1)!} & \frac{(m+2)!}{(n+2)!(m-n)!} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m!(m+1)!(m+2)!}{n!(n+1)!(n+2)!(m-n)!(m-n+1)!(m-n+2)!}\Delta$$

unde Δ este determinantul rămas după scoaterea factorilor comuni:

$$\frac{m!}{(m-n)!} \; ; \; \frac{(m+1)!}{(m-n+1)!} \; ; \; \frac{(m+2)!}{(m-n+2)!}$$

respectiv pe liniile I-a, a II-a şi a III-a, iar $\frac{1}{n!} \; ; \; \frac{1}{(n+1)!} \; ; \; \frac{1}{(n+2)!}$ respectiv pe coloanele I-a, a II-a şi a III-a.

Atunci:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m-n & (m-n-1)(m-n) \\ 1 & (m-n+1) & (m-n)(m-n+1) \\ 1 & (m-n+2) & (m-n+1)(m-n+2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & m-n & (m-n-1)(m-n) \\ 0 & 1 & 2(m-n) \\ 0 & 1 & 2(m-n+1) \end{vmatrix} = 2.$$

Pentru calcul s'a scăzut linia II-a din a III-a şi prima din a II-a.

Rezultă:

$$(1) \quad D = \frac{m!\,(m+1)!\,(m+2)!\,2}{n!\,(n+1)!\,(n+2)!\,(m-n)!\,(m-n+1)!\,(m-n+2)!}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m & \frac{m!}{(n+1)!\,(m-n-1)!} & \frac{m!}{(n+2)!\,(m-n-2)!} \\ m+1 & \frac{(m+1)!}{(n+1)!\,(m-n)!} & \frac{(m+1)!}{(n+2)!\,(m-n-1)!} \\ m+2 & \frac{(m+2)!}{(n+1)!\,(m-n+1)!} & \frac{(m+2)!}{(n+2)!\,(m-n)!} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)}{(n+1)!\,(n+2)!} \begin{vmatrix} 1 & \frac{(m-1)!}{(m-n-1)!} & \frac{(m-1)!}{(m-n-2)!} \\ 1 & \frac{m!}{(m-n)!} & \frac{m!}{(m-n-1)!} \\ 1 & \frac{(m+1)!}{(m-n+1)!} & \frac{(m+1)!}{(m-n)!} \end{vmatrix}.$$

Dacă scoatem factori în determinantul rămas pe $\frac{(m-1)!}{(m-n+1)!}$ pe coloana II-a şi $\frac{(m-1)!}{(m-n)!}$ pe coloana III-a şi notăm cu Δ_x

determinantul ce rezultă după scoaterea acestor factori găsim:

$$D_x = \frac{(m-1)!\,(m+2)!}{(n+1)!\,(n+2)!\,(m-n)!\,(m-n+1)!}\,\Delta_x$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & (m-n)(m-n+1) & (m-n-1)(m-n) \\ 1 & m(m-n+1) & m(m-n) \\ 1 & m(m+1) & m(m+1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & (m-n)(m-n+1) & (m-n-1)(m-n) \\ 0 & n(m-n+1) & (n+1)(m-n) \\ 0 & mn & m(n+1) \end{vmatrix}$$

$$= mn(n+1) \begin{vmatrix} m-n+1 & m-n \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = mn(n+1).$$

Pentru calculul lui Δ_x s'a scăzut linia II-a din a III-a și prima din a II-a etc. Rezultă:

$$(2) \qquad D_x = \frac{m!\,(m+2)!\,n}{n!\,(n+2)!\,(m-n)!\,(m-n+1)!}.$$

Urmând același procedeu de calcul se găsește:

$$(3) \quad D_y = \begin{vmatrix} \frac{m!}{n!\,(m-n)!} & m & \frac{m!}{(n+2)!\,(m-n-2)!} \\ \frac{(m+1)!}{n!\,(m-n+1)!} & m+1 & \frac{(m+1)!}{(n+2)!\,(m-n-1)!} \\ \frac{(m+2)!}{n!\,(m-n+2)!} & m+2 & \frac{(m+2)!}{(n+2)!\,(m-n)!} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{m!\,(m+2)!\,2(n^2-1)}{n!\,(n+2)!\,(m-n)!\,(m-n+2)!}$$

$$(4) \quad D_z = \begin{vmatrix} \frac{m!}{n!\,(m-n)!} & \frac{m!}{(n+1)!\,(m-n-1)!} & m \\ \frac{(m+1)!}{n!\,(m-n+1)!} & \frac{(m+1)!}{(n+1)!\,(m-n)!} & m+1 \\ \frac{(m+2)!}{n!\,(m-n+2)!} & \frac{(m+2)!}{(m+1)!\,(m-n+1)!} & m+2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m!\,(m+2)!\,(n-1)\,n\,(n+2)}{n!\,(n+1)!\,(m-n+1)!\,(m-n+2)!}.$$

Ţinând seama de (1), (2), (3) şi (4) se obţine:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{n}{2} \cdot \frac{(n+1)!\,(m-n+2)!}{(m+1)!} = \frac{n(n+1)(m-n+1)(m-n+2)}{2(m+1)\,C_m^n}$$

$$= \frac{n(n+1)(m-n+2)}{2\,C_{m+1}^n} = \frac{n(n+1)(m+2)}{2\,C_{m+2}^n}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = -(n^2-1)\frac{(n+1)!\,(m-n+1)!}{(m+1)!} = -\frac{(n^2-1)(m-n)(m-n+1)}{(m+1)\,C_m^{n+1}}$$

$$= -\frac{(n^2-1)(m-n+1)}{C_{m+1}^{n+1}} = -\frac{(n^2-1)(m+2)}{C_{m+2}^{n+1}}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{(n-1)\,n(n+2)}{2} \cdot \frac{(n+1)!\,(m-n)!}{(m+1)!}$$

$$= \frac{(n-1)\,n(m-n-1)(m-n)}{2(m+1)\,C_m^{n+2}} = \frac{(n-1)n(m-n)}{2\,C_{m+1}^{n+2}} = \frac{(n-1)n(m+2)}{2\,C_{m+2}^{n+2}}.$$

Valorile ui x, y, z s'au pus sub patru forme diferite pentru ca să se uşureze verificarea soluţiilor. Se observă că la numitor sunt tocmai coeficienţii necunoscutelor respective din fiecare ecuaţie.

Observaţie. Unii corespondenţi au observat că sistemul propus este generalizarea exerciţiului VII. 210 din „S. G. M.".

PROBLEMA 4800. *Să se arate că:*

$$\sum_{i=3}^{m} C_i^2 C_i^3 = 10\,C_{m+1}^6 + 12C_{m+1}^5 + 3\,C_{m+1}^4$$

$$\sum_{i=4}^{m} C_i^3 C_i^4 = 35C_{m+1}^8 + 60C_{m+1}^7 + 30\,C_{m+1}^6 + 4\,C_{m+1}^5.$$

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţia I dată de D-nii: CONST. N. GAVRILESCU (Şc. Infant. Sibiu), STELIAN CETĂŢEANU (cl. 7-a lic. Şincai) D-TRU RIPIANU (Student, Cluj) şi ADOLF O. ŞAICHIN (cl. 8-a lic. M. Basarab).

Prima sumă se mai poate scrie sub forma:

$$(1) \qquad \sum_{i=3}^{m} C_i^2 C_i^3 = \sum_{i=3}^{m} \frac{i^2(i-1)^2(i-2)}{12}.$$

Să determinăm coeficienţii A, B, C, D, E astfel încât să avem:

$$(2)\quad i^2(i-1)^2(i-2) \equiv Ai(i-1)(i-2)(i-3)(i-4) + Bi(i-1)(i-2)(i-3) + Ci(i-1)(i-2) + Di(i-1) + Ei.$$

Făcând $i = 1$ obţinem $E = 0$, apoi $i = 2$, $D = 0$.

Impărţim ceea ce rămâne cu produsul $i(i-1)(i-2)$ şi căpătăm:

$$i(i-1) \equiv A(i-3)(i-4) + B(i-3) + C$$

în care facem $i = 3$ şi găsim $C = 6$, apoi $i = 4$ şi găsim $B = 6$ şi $i = 0$ ne dă $A = 1$.

Identitatea (2) devine:

$$(3)\quad i^2(i-1)^2(i-2) \equiv i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4) + 6i(i-1)(i-2)(i-3) + 6i(i-1)(i-2)$$

iar suma (1) poate fi scrisă:

$$\sum_{i=3}^{m} C_i^2 C_i^3 = 10 \sum_{i=3}^{m} C_i^5 + 12 \sum_{i=3}^{m} C_i^4 + 3 \sum_{i=3}^{m} C_i^3 .$$

Ţinând seamă de relaţia:

$$\sum_{i=p}^{m} C_i^p = C_{m+1}^{p+1}$$

se obţine relaţia din enunţ.

A doua sumă se mai scrie:

$$(4)\quad \sum_{i=4}^{m} C_i^3 C_i = \sum_{i=4}^{m} \frac{i^2(i-1)^2(i-2)^2(i-3)}{144} .$$

Prin acelaşi procedeu ca la prima sumă se ajunge la identitatea:

$$(5)\quad i^2(i-1)^2(i-2)^2(i-3) \equiv i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)(i-6) + 12i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5) + 36i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4) + 24i(i-1)(i-2)(i-3).$$

Aceasta ne îngăduie să scriem suma sub forma:

$$\sum_{i=4}^{m} C_i^3 C_i^4 = 35 \sum_{i=4}^{m} C_i^7 + 60 \sum_{i=4}^{m} C_i^6 + 30 \sum_{i=4}^{m} C_i^5 + 4 \sum_{i=4}^{m} C_i^4$$

care ne dă imediat relaţia din enunţ.

Soluția II-a dată de D-l VICTOR L. FLORESCU (cl. 7-a lic. militar N. Filipescu).

Se scrie prima sumă sub forma:

$$\sum_{i=3}^{m} C_i^2 C_i^3 = \sum_{i=3}^{m} \frac{i^5 - 4i^4 + 5i^3 - 2i^2}{12}$$

și se ține seamă de relațiile:

$$\sum_{1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\ ;\ \sum_{1}^{m} i^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}\ ;$$

$$\sum_{1}^{m} i^4 = \frac{m(m+1)(6m^3+9m^2+m-1)}{30}$$

$$\sum_{1}^{m} i^5 = \frac{m^2(m+1)^2(2m^2+2m-1)}{12}\ .$$

Se găsește:

$$(6)\qquad \sum_{i=3}^{m} C_i^2 C_i^3 = \frac{(m+1)\,m\,(m-1)\,(m-2)\,(5m^2+m-3)}{360}\ .$$

Se verifică apoi că partea a doua a identității din enunț este egală cu partea a doua a identității (6).

Pentru a doua sumă se procedează la fel, dar mai este nevoe și de relațiile:

$$\sum_{1}^{m} i^6 = \frac{m(m+1)(6m^5+15m^4+6m^3-6m^2-m+1)}{42}\ ;$$

$$\sum_{1}^{m} i^7 = \frac{m^2(m+1)^2(3m^4+6m^3-m^2-4m+2)}{24}\ .$$

Se găsește:

$$\sum_{i=4}^{m} C_i^3 C_i^4 = 35\,C_{m+1}^8 + 60\,C_{m+1}^7 + 30\,C_{m+1}^6 + 4\,C_{m+1}^5$$

$$= \frac{1}{8!}(m+1)\,m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(35m^3-45m^2-50m+24).$$

Soluția III dată de D-l S-LT GR. MARTEȘ.

Pornim dela observația că $f(x)$ fiind o funcțiune oarecare avem:

$$\sum_{3}^{m} [f(i+1) - f(i)] = f(m+1) - f(3).$$

Luăm:

$$f(i) = \frac{1}{30}\,i\,(i-1)\,(i-2)(i-3)\,(5i^2-9i+1)$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

care ne dă:

$$f(i+1)-f(i)=i^2(i-1)^2(i-2).$$

Atunci vom avea:

$$\sum_3^m C_i^2 C_i^3=\sum_3^m \frac{i^2(i-1)^2(i-2)}{12}=f(m+1)$$

$$=\frac{1}{360}(m+1)\,m(m-1)(m-2)(5m^2+m-3),$$

deoarece $f(3)=0$. Restul ca la soluţia II-a.

Pentru a doua sumă se alege funcţia:

$$f(i)=\frac{1}{280}i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(35i^3-150i^2+145i-6).$$

care dă:

$$f(i+1)-f(i)=i^2(i-1)^2(i-2)^2(i-3).$$

Rezultatul e acelaşi ca la soluţia II-a.

Observaţii. D-l A. ŞAICHIN a mers mai departe cu calculul arătând că:

$$\sum_{i=5}^m C_i^4 C_i^5=126\,C_{m+1}^{10}+280\,C_{m+1}^9+210\,C_{m+1}^8+60\,C_{m+1}^7+5\,C_{m+1}^6.$$

PROBLEMA 4833. *Prin* I, *centrul cercului înscris într'un triunghiu dreptunghiu se duc paralelele* EE' *şi* FF' *respectiv cu* AB *şi* AC, *limitate la aceste laturi. Să se arate că avem:*

$$\text{aria } ABC = EE' \cdot FF'.$$

ALEX. V. NICULESCU.

1°. *Soluţie.* Fie MN picioarele perpendicularelor duse din E' şi F' pe AB şi AC, iar L intersecţia lor. Se formează dreptunghiul ANLM de arie $EE' \times FF'$; să arătăm deci, că

$$\text{aria } ABC = \text{aria } ANLM,$$

sau, extrăgând partea comună, aria ANF'E'MA, rămâne să demonstrăm că

$$\text{aria } IE'F' = \text{aria } NCF' + \text{aria } MBE'.$$

Coborîm perpendiculara IP pe BC. Se observă imediat că

$$\Delta MBE' = \Delta E'IP \quad ; \quad \Delta IPF' = \Delta NCF'.$$

Aşa dar...

Au dat soluţii analoage sau puţin diferite, D-nii: BOTEZATU FILIP (elev-ing.), CIUPAG S. HORIA, MILU I. N. (Şc. Navală C-ţa), MAVRODIN D. (stud. Buc.), STREDER I. (stud. Iaşi), POPA D. M., VASILESCU-STABU ALEX. şi LT. M. C. I. VLAD (stud. Cluj), DUMITRU MATEICI (stud. Iaşi), TILICĂ C. ŞTEFAN, IONESCU B. N. GH.

2°. *Soluţie.* Avem:

$$EE' \times FF' \equiv (EI+IE') \cdot (IF+IF') \equiv EI \cdot FI+EI \cdot IF'+IE' \cdot IF+IE' \cdot IF'.$$

Dar

$$EI \cdot IF' = \text{aria drept. } F'IEN$$

$$IE' \cdot IF = \text{aria drept. } E'IMF$$

$$EI \cdot IF = \text{aria patr. } IEAF$$

$$IE' \cdot IF' = 2 \text{ aria } \Delta IE'F'.$$

Am arătat însă în prima soluţie că

$$\text{aria } IE'F' = \text{aria } CNF' + \text{aria } ME'B;$$

înlocuind, rezultă

$$EE' \times FF' = \text{aria } ABC.$$

Au procedat astfel, prin descompuneri de arii, d-ra ROMAŞCAN GEORGETA şi D-nii: ANDRONACHE VIRGIL, BOIAN EMIL, BOGDAN G. IOAN (S. P. O.), CETĂŢEANU STELIAN, MODÂLCĂ EMIL, PASCARU IOAN, PETRESCU ACHILLE, POPA D. M., POPESCU-ZORICA ALEX., SOLOMON ISAC.

3°. *Soluţie.* Din asemănări de triunghiuri se scoate

$$\frac{AB}{EE'} = \frac{AC}{AC-r} \quad ; \quad \frac{AC}{FF'} = \frac{AB}{AB-r}$$

r fiind raza cercului înscris.

Rezultă:

$$EE' \cdot FF' = (AC-r) \cdot (AB-r).$$

Trebue deci ca:

$$(b-r)(c-r) = \frac{1}{2} bc$$

ceea ce se verifică imediat, căci avem:

$$r = \frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}.$$

Au dat soluții în felul acesta, utilizând relații trigonometrice și geometrice cunoscute — unele mai simple, altele mai complicate, — D-nii: APOSTOL RADU, CRĂCIUN I. I., CONSTANTIN V. PANT., CIOC D., CORNĂȚEANU AUREL, DIACONESCU D. ION, FLORESCU VICTOR, GAVRILESCU N. CONST., GVIAZDOMORSCHI R., IONESCU ȘT., MILU NICULAE, LT. P. NEGOIȚĂ, PETRESCU BENONE, PETRESCU MIHAI, RĂDULESCU OCT., SEGAL JOE, ȘAICHIM O. A., ȘTEFĂNESCU N., STĂNCULESCU I., TURCU S.

Observări. — S'au primit și două soluții analitice dela D-nii: POPESCU-ZORICA ALEX. și CONSTANTINESCU G. G. D-l CONSTANTINESCU G. G. își propune să caute locul punctelor (I), prin care ducând paralelele EE' și FF' la laturile triunghiului, produsul lor să fie egal cu aria Δ-ului. D-sa găsește că locul geometric este o *hiperbolă echilateră, care admite* Δ-*ul* ABC *ca triunghiu conjugat.* Regăsește astfel origina acestei probleme.

D-l POPESCU-ZORICA ALEX. dă și alte relații în legătură cu configurația problemei, din care reținem

$$\frac{DD'.EE'.FF'}{r^3} = \frac{a(b+c)(c+a)(a+b)}{4S^2}$$

sau pentru cazul Δ-ului ABC *oarecare,*

$$\frac{DD'.EE'.FF'}{r^3} = \frac{abc(b+c)(c+a)(a+b)}{8S^3}$$

DD' fiind paralela prin I la BC, iar a, b, c, r și S notații obișnuite.

ALEX. V. N.

PROBLEMA 4841. *Intr'o conică* (Γ) *se înscrie un triunghiu oarecare* ABC. *Două drepte duse arbitrar prin punctul* A *întâlnesc conica* (Γ) *a doua oară în punctele* A_1, A_2. *Tangentele în* A_1, A_2 *la* (Γ) *taie latura* BC *în* T_1, T_2, *iar dreapta* A_1A_2 *taie latura* BC *în* M. *Să se demonstreze relația:*

$$\frac{MB^2}{MC^2} = \frac{T_1B}{T_1C} \cdot \frac{T_2B}{T_2C}.$$

CEZAR COȘNIȚĂ.

Soluția I-a. Enunțul poate fi simplificat astfel:

Se dă, într'o conică (Γ), *două coarde* — A_1A_2 *și* BC — *care se taie în punctul* M. *Tangentele în* A_1 *și* A_2 *la conica* (Γ) *taie coarda* BC *în* T_1, T_2. *Să se demonstreze relația:*

$$\frac{MB^2}{MC^2} = \frac{T_1B}{T_1C} \cdot \frac{T_2B}{T_2C}.$$

Soluție. Figura formată de coarda A_1A_2 și tangentele A_1T_1, A_2T_2, poate fi considerată ca limita unui patrulater înscris, în care două vârfuri se confundă în A_1 și două în A_2. A_1T_1 și A_2T_2 sunt două laturi opuse, iar în A_1A_2 se confundă alte două laturi opuse. După teorema DESARGUES, *conica* (Γ) *și laturile opuse ale acestui patrulater înscris determină pe o secantă oarecare, perechi de puncte în involuție.* In cazul acestei probleme, pe secanta BC, M este un punct dublu al involuției, iar (B, C); (T_1, T_2) sunt puncte omoloage. Insă între trei segemente aa', bb', cc' în involuție, există relația:

$$\frac{ab \cdot ab'}{ac \cdot ac'} = \frac{a'b \cdot a'b'}{a'c \cdot a'c'} \qquad (1)$$

și alte două, care se deduc din aceasta prin permutări circulare. In cazul considerat, segmentele în involuție sunt T_1T_2, MM, BC și (1) devine:

$$\frac{T_1M^2}{T_2M^2} = \frac{T_1B \cdot T_1C}{T_2B \cdot T_2C}. \qquad (2)$$

Prin permutări circulare sau luând cele trei segmente în ordinea BC, MM, T_1T_2, avem:

$$\frac{BM^2}{CM^2} = \frac{BT_1 \cdot BT_2}{CT_1 \cdot CT_2} \qquad (3)$$

(3) *este relația cerută de enunț.* Dacă înmulțim relațiile (2) și (3) parte cu parte, obținem încă relația remarcabilă

$$\frac{BT_1}{CT_2} = -\frac{MT_1}{MT_2} \cdot \frac{MB}{MC}, \qquad (4)$$

iar prin împărțire, avem încă relația:

$$\frac{CT_1}{BT_2} = -\frac{MT_1}{MT_2} \cdot \frac{MC}{MB} \qquad (5)$$

semnul — (minus), fiind cel care convine în toate cazurile de figură.

PETRE BOLDESCU.

Soluția II-a. Fie $P = 0$, $Q = 0$ ecuațiile prescurtate ale tangentelor în A_1, A_2 și $D = 0$ a dreptei A_1A_2. Punctele B și C au respectiv coordonatele B (x_1, y_1) și C (x_2, y_2). Vom nota în cele ce urmează P_1, Q_1, D_1 respectiv P_2, Q_2, D_2 rezultatul înlocuirii lui x și y în expresia lui P, Q și D prin x_1, y_1, respectiv x_2, y_2. Conica (Γ) fiind bitangentă dreptelor $P = 0$ și $Q = 0$ în punctele unde ele taie pe $D = 0$, ecuația ei va avea forma $PQ = kD^2$. Scriind că punctele B și C se găsesc pe conică, vom avea:

$$P_1Q_1 = kD_1^2 \quad \text{și} \quad P_2Q_2 = kD_2^2$$

împărțind parte cu parte aceste egalități obținem:

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = \frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{Q_1}{Q_2}$$

dar

$$\frac{D_1}{D_2} = -\frac{MB}{MC}, \quad \frac{P_1}{P_2} = -\frac{T_1B}{T_1C} \text{ și } \frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{T_2B}{T_2C}$$

deci

$$\frac{MB^2}{MC^2} = \frac{T_1B}{T_1C} \cdot \frac{T_2B}{T_2C}.$$

Q. E. D.

O. SACTER.

Notă. 1°. D-l AUREL I. CORNĂȚEANU demonstrează întâi propoziția pentru cerc, în felul următor: în triunghiul BA_1C în care tangenta în A_1 taie pe BC în T_1, avem

$$\frac{T_1B}{T_1C} = \left(\frac{A_1B}{A_1C}\right)^2 \text{ și analog } \frac{T_2B}{T_2C} = \left(\frac{A_2B}{A_2C}\right)^2;$$

dar

$$\frac{MB}{MC} = \frac{BA_1 \cdot BA_2}{CA_1 \cdot CA_2}$$

sau

$$\left(\frac{MB}{MC}\right)^2 = \frac{T_1B}{T_1C} \times \frac{T_2B}{T_2C};$$

apoi recunoaște că proiectând convenabil, se obține conica din enunț.

2°. Soluția I-a, se putea deduce și în baza teoremei DESARGUES-STURM, ceva mai generale: *conicele unui fascicol punctual, determină pe o secantă oarecare, diviziuni în involuție;* se consideră fascicolul de conice bitangente dreptelor A_1T_1, A_2T_2 în A_1A_2 anume, trei astfel de conice; una, proprie, (Γ) și două improprii formate de chiar tangentele A_1T_1, A_2T_2 sau de coarda dublă A_1A_2.

3°. Problema se poate rezolva şi în modul următor: se ştie că raportul anarmonic a patru puncte B, C, A_1, A_2 pe o conică este acelaş din orice puncte ar fi privit, de ex., chiar A_1, A_2; $A_1(B, C, A_1, A_2) = A_2(B, C, A_1, A_2)$; tăind cu latura BC, avem egalitatea rapoartelor anarmonice $(BCT_1M) = (BCMT_2)$ care e sub altă formă, relaţia din enunţ.

4°. Particularizând problema, se obţine: *tangentele la capetele unei coarde* A_1A_2 *duse prin mijlocul* M *al unui segment* BC, *taie acest segment în două puncte isotomice;* de ex.: *tangentele în punctele unde medianele retaie cercul circumscris, întâlnesc laturile opuse în trei puncte colineare pe dreapta* LONGCHAMPS, reciproca dreptei LEMOINE.

N. M.

PROBLEMA 4869. *Să se demonstreze că dacă într'un sistem de numeraţie, numărul de patru cifre* N = aabb *este patratul numărului de două cifre* cc *şi dacă produsul* a × b *este patrat perfect, atunci* N *este egal cu suma patratelor a două numere întregi.*

V. THÉBAULT.

Problema este demonstrată în articolul *„Asupra unor patrate curioase"*, publicat de D-l V. THÉBAULT la pag. 293 din acest an al *Gazetei Matematice.*

Inainte de apariţia articolului D-lui V. THÉBAULT, s'au primit soluţiuni foarte bune dela D-ra VENERA TĂNĂSESCU (studentă, Bucureşti) şi de la D-nii: I. GOLDBERG (Liceul „Matei Basarab", Bucureşti), CAMIL MOTAŞ (Liceul Internat, Iaşi), TILICĂ C. ŞTEFAN (Lic. „Traian", Turnu Severin) şi M. AL. VASILESCU STABU (Lic. „Mihai Viteazul", Alba Iulia).

După apariţia articolului D-lui V. THÉBAULT au trimis soluţii după indicaţii din acel articol D-nii: I. D. DIACONESCU, E. S. MODÂLCĂ, H. L. REISCHER, M. S. ROSENBLATT, I. I. SOLOMON şi DORIN N. TEODORESCU.

PROBLEMA 4878. *Două drepte perpendiculare, duse respectiv prin cele două focare ale unei elipse, întâlnesc tangenta la elipsă în o extremitate a axei mari în punctele* T_1 *şi* T_2. *Să se arate că celelalte două tangente din* T_1 *şi* T_2 *la elipsă sunt paralele.*

I. NICOLAU-DOBRIDOR.

Soluţie dată de D-l GH. BAZACOV. Fie A, A', F, F' capetele axei mari şi focarele; tangentele din T_1, T_2 taie tangenta din A' în T'_1, T'_2; FT_1, FT'_1 sunt perpendiculare, ca bisectoare ale unghiurilor suplimentare formate de axa AA' şi de dreapta care uneşte focarul F cu punctul de tangentă (teorema PONCELET);

triunghiurile $F'AT_2$ şi $FA'T'_1$ cu laturile paralele şi $F'A = FA'$ sunt egale şi $AT_2 = A'T'_1$; analog $AT_1 = A'T'_2$ deci $T'_1T'_2$ e egală şi paralelă cu T_1T_2, figura $T_1T'_1T'_2T_2$ e un paralelogram deci $T_1T'_1$ şi $T_2T'_2$ *sunt paralele.*

Soluţie dată de D-nii: GH. CARDARA-DIMITRIE (student-Bucureşti); AUREL CORNĂŢEANU (lic. mil. Iaşi), VICTOR FLORESCU (cl. VII-a lic. mil. M-rea Dealu), IACOB GOLDBERG (lic. „Matei Basarab" Bucureşti), MIRCEA D. POPA (lic. mil. Iaşi), ADOLF O. ŞAICHIN (lic. „Matei Basarab" Bucureşti), DORIN N. THEODORESCU (cl. VI-a lic. mil. M-rea Dealu), I. I. ŢIŢEICA (student) şi M. AL. VASILESCU-STABU (cl. VI-a lic. Alba-Iulia).

Fie A, M_1, M_2 respectiv extremitatea axei mari şi punctele de tangenţă ale tangentelor din T_1, T_2 la elipsă. După o teoremă PONCELET, avem egalităţile unghiulare

$$M_1T_1F = AT_1F' \quad \text{şi} \quad M_2T_2F' = AT_2F$$

oricare ar fi ordinea în care notăm focarele F, F'. Deci

$$M_1T_1A + M_2T_2A = FT_1A + FT_2A + F'T_1A + F'T_2A = \pi$$

căci în triunghiul $T_1F'T_2$ cu ortocentrul F,

$$F'T_1A + F'T_2A = T_1FT_2.$$

Rezultă că dreptele T_1M_1, T_2M_2 sunt paralele.

Soluţia III-a şi generalizare. Fie Δ, Δ_1, Δ_2 respectiv tangenta în A la elipsă şi cele două drepte perpendiculare duse prin F, F'. Dacă dreptele Δ_1, Δ_2 variază, *punctele* T_1, T_2 *descriu pe* Δ *o involuţie.* In adevăr, punctul T_1 fiind dat, obţinem punctul unic T_2, intersectând pe (Δ) cu perpendiculara din F' pe FT_1. Dacă T_1 aparţine diviziunii a doua, perpendiculara din F pe $F'T_1$ determină pe Δ, acelaş punct T_2, deoarece patrulaterul $FF'T_1T_2$ este ortocentric. Deducem că punctele T_1, T_2 sunt reciproce. Deci omografia (T_1, T_2) este o involuţie.

După corelativa teoremei FRÉGIER (E. DUPORCQ: *Premiers principes de Géometrie moderne, éd. 1912, pag. 65*), *tangentele din* T_1, T_2 *la elipsă se taie pe o dreaptă fixă* D. Să determinăm două puncte particulare ale acestei drepte. O dreaptă izotropă a lui F taie pe Δ într'un punct imaginar T_1. Tangenta din T_1 la elipsă este chiar această dreaptă izotropă, după definiţia PLÜCKER a focarelor. Punctul T_2 corespunzător lui T_1 este tot un punct imaginar — intersecţia unei drepte izotrope a lui F' cu Δ, — iar

tangenta din T_2 la elipsă este de asemenea aceeaşi dreaptă izotropă a lui F'. Dreptele izotrope ale focarelor F, F', pe care le-am considerat, se taie într'un punct circular al planului. Astfel un punct particular al dreptei fixe semnalate este unul din punctele circulare ale planului. Analog se arată că alt punct particular al ei este al doilea punct circular.

Prin urmare dreapta (D) este dreapta dela infinit a planului, adică *tangentele din* T_1, T_2 *la elipsă sunt paralele.*

q. e. d.

Observări: 1°. Proprietatea problemei 4878 *este valabilă şi pentru hiperbolă.*

2°. La cerc proprietatea este evident valabilă pentru orice tangentă (Δ), ceea ce se poate demonstra imediat, direct.

3°. O *generalizare* a problemei 4878 s'ar putea aduce considerând *tangenta* Δ *oarecare.* In acest caz *punctul de intersecţie al tangentelor din* T_1, T_2 *descrie o conică.* Două puncte particulare ale locului fiind punctele circulare, rezultă că *conica este un cerc.*

I. I. ŢIŢEICA

Notă. 1°. *Soluţie analitică* dată de D-rele: MIOARA I. CRĂCIUNESCU (studentă, Bucureşti), ANA C. GEREANU (studentă) şi D-nii: RADU APOSTOL (lic. mil. N. Filipescu, M-rea Dealu), GH. BAZACOV, GH. CARDARA-DIMITRIE, OVIDIU COSTINESCU (cl. VII-a, lic. mil. Iaşi), DORIN OBREJA (lic. mil. Iaşi), ALEXANDRU N. POPESCU-ZORICA (elev particular, Bucureşti), TR. PREDOESCU-ŢĂNŢĂRENI, D. RIPIANU şi NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU (lic. mil. M-rea Dealu).

2°. Consideraţiile D-lui I. ŢIŢEICA permit să se extindă încă chestiunea, în acelaş mod pentru dreptele duse prin F, F' şi făcând un unghiu constant; mai precis *două drepte duse prin focarele* F, F' *ale unei conice, care se întâlnesc într'un punct variabil pe un cerc fix ce trece prin focare, taie o tangentă* Δ *arbitrară în* T_1, T_2. *Intersecţia tangentelor conicei din* T_1, T_2 *descrie un cerc.*

Dacă tangenta Δ trece prin polul dreptei F F' faţă de cerc, punctele T_1, T_2 descriu diviziuni în involuţie, deci ca mai sus, *tangentele din* T_1, T_2 *la conică sunt paralele.*

O altă soluţie va apărea ca notă.

In ultimul timp s'au mai primit soluţii analitice dela D-ra GEORGETA ROMAŞCAN, dela D-nii: JOE SEGAL, NICOLAE N. TOMA şi T. C. ŞTEFAN.

N. M.

EXERCIȚII

34 Pe tangenta la o curbă închisă se ia în același sens, un *segment constant.*

1°. Se cere suprafața cuprinsă între cele 2 curbe.

2°. Idem, pentru cazul când se ia segmentul pe normala la curbă.

CĂP. M. I. FOCȘENEANU.

R. Fie M și M' 2 puncte infinit vecine pe curba dată și N și N', punctele corespunzătoare, iar $d\alpha$ unghiul tangentelor în M și M'.

1°. Avem următoarele relații:

$$\text{Aria (N)} - \text{Aria (M)} = \int_0^{2\pi} \frac{a}{2} \cdot a\, d\alpha = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\alpha = \boxed{\pi a^2}.$$

Se vede că nu depinde de natura curbei (M) și e egală cu *aria cercului de rază a.*

2°. In cazul segmentului pe normală, avem:

$$\text{Aria (N)} - \text{Aria (M)} = \int_0^{2l} \frac{a}{2} \cdot ds = \frac{a}{2} \int_0^{2l} ds = \boxed{al}.$$

PROBLEME PROPUSE

4963. Se cere volumul unui butoiu la care doagele simetrice sunt rectilinii către capete și racordate către mijloc prin un arc de cerc sau prin un arc de parabolă.

I. IONESCU.

4964. Intrebuințând câte o singură dată cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, să se scrie cinci numere de câte două cifre, care să fie în progresie aritmetică.

V. THÉBAULT.

4965. Dacă scriem un *zero* între cele două cifre ale rădăcinii unui patrat perfect, se poate obține indicatorul patratului?

MAIOR I. LINTEȘ.

4966. In triunghiul ABC fie O centrul cercului circumscris, O_9 centrul cercului celor nouă puncte, A', B', C' triunghiul ortic, $A_1B_1C_1$ triunghiul complementar și $A_2B_2C_2$ triunghiul ortic al

triunghiului complementar. Fie A_3 intersecția perpendicularei coborîte din A pe dreapta OA_2 cu perpendiculara coborîtă din A' pe dreapta O_9A_2. La fel obținem B_3, C_3.

Să se arate că punctele A_3, B_3, C_3 sunt în linie dreaptă.

TH. G. COCEA.

4967. Fie ABC un triunghiu oarecare. Prin punctul A, în interiorul unghiului A, se desenează semidreptele Δ_1, Δ'_1, care împart unghiul A în 3 părți egale, astfel:

$$(AC, \Delta_1) = \Delta_1, \Delta'_1) = (\Delta'_1, AB).$$

La fel obținem:

$$(AB, \Delta_2) = (\Delta_2, \Delta'_2) = (\Delta'_2, BC); \quad (BC, \Delta_3) = (\Delta_3, \Delta'_3) = (\Delta'_3, AC).$$

Fie A', B', C' respectiv intersecțiile dreptelor

$$(\Delta'_2, \Delta_3) \ ; \ (\Delta'_3, \Delta_1), (\Delta_1', \Delta_2) \ ; \ h_{12}, h_{23}, h_{31}$$

respectiv înălțimile triunghiurilor

$$A'B'C, B'C'A, C'A'B \ ; \ h_1, h_2, h_3$$

respectiv înălțimile triunghiurilor A'BC, B'CA, C'AB.

Notând apoi:

$$\overline{B'C'} = a', \ \overline{C'A'} = b', \ \overline{A'B'} = c' \ ; \ \overline{BC} = a, \ \overline{CA} = b, \ \overline{AB} = c,$$

să se demonstreze relația:

$$\frac{a'}{a} \cdot \frac{b'}{b} \cdot \frac{c'}{c} = \frac{h_1}{h_{23}} \cdot \frac{h_2}{h_{31}} \cdot \frac{h_3}{h_{12}}.$$

GH. DUMITRESCU.

4968. Să se arate că între înălțimile h_a, h_b, h_c ale unui triunghiu oarecare, raza r a cercului înscris și razele r_a, r_b, r_c ale cercurilor exînscrise acelui triunghiu există relația:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{r_a} & \frac{2}{h_a} & \frac{2}{h_a} \\ \frac{2}{h_b} & -\frac{1}{r_b} & \frac{2}{h_b} \\ \frac{2}{h_c} & \frac{2}{h_c} & -\frac{1}{r_c} \end{vmatrix} = \frac{1}{r^3}.$$

CPT. COMANDOR GR. ZAPAN.

4969. Fie S centrul de asemănare direct a două cercuri ortogonale din care unul O_1 de rază $2R$ și altul O_2 de rază R.

Se consideră un punct M mobil pe arcul lui O_2 interior lui O_1 și fie N intersecția lui SM cu arcul lui O_1, interior lui O_2. Perpendiculara în M pe SM taie pe O_1 în B și C.

Să se demonstreze că ortocentrul triunghiului BNC este fix şi că între unghiurile acestui triunghiu există relaţiunea

$$\sin^2 B + \sin^2 C + \sin^2 N = 1.$$

G-L GH. BUICLIU.

4970. Să se studieze convergenţa seriei cu termenul general

$$u_n = \frac{n!}{(2+k_1)(3+k_2)\ldots(p+1+k_p)(p+2+k_1)\ldots(n+k_i)}$$

unde numitorul are $(n-1)$ factori, iar $k_1, k_2, \ldots, k_p$ sunt constante pozitive date.

M. GHERMĂNESCU.

4971. Trei puncte fixe A, B, C situate pe trei diametre ale unei sfere, perpendiculare două câte două, atrag un punct M situat pe sferă cu fortele:

$$k.\vec{MA} \quad , \quad k.\vec{MB} \quad , \quad k.\vec{MC}.$$

Să se determine poziţia de echilibru a punctului M şi reacţiunea sferei.

GH. D. SIMIONESCU.

4972. Se dau în plan patrupunctele P_1 şi P_2 şi o conică (C). Să se arate că există nouă perechi de puncte A, B pe conica (C) astfel că exagoanele ABP_1 şi ABP_2 sunt înscrise în câte o conică.

AD. GHEORGHIU.

4973. Dacă $f(x)$ este un polinom de grad $\leqslant 2n$, să se arate atunci că avem identitatea

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{C_{2n-p}^{n}}{p!} (b-a)^p \left[f_{(x+a)}^{(p)} + (-1)^{p+1} f_{(x+b)}^{(p)} \right] = 0.$$

N. CIORĂNESCU.

4974. Fie C o curbă strâmbă şi C_p, C_q două curbe descrise de punctele P, Q, luate respectiv pe tangenta şi binormala în M la curba C, astfel încât $\overline{MP} = A$, $MQ = B$ (A şi B constante), V unghiul tangentelor în P, Q la C_p, C_q.

a) Să se calculeze tgV în funcţie de elementele curbei C.

b) Să se deducă o definiţie a curbelor BERTRAND.

C. IONESCU-BUJOR.

ERATĂ. 1°. La pag. 482, în rândurile 8 şi 10 se înlocueşte $n < 4$ prin $n > 4$.

2°. La pag. 466 rândul 12 ultima parte a egalităţii este 2305^4.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bârzu Gh. V. (4940, 43); *Bazacov Gh.* Prof. (4809, 919, 33, 48, P); *Bodnărescu M. Horia* (4883, 907, 45); *Boian Emil* (4945, 60, 61); *Cârdeiu G.* (4943, 57); *Cernăţeanu Aurel* (4961); *Gereanu Ana* (4908, 10, 11); *Kerciu G.* (4908); *Marteş Gr.* (4740, 92, 876, 902); *Miroslav Tudorel* (4945); *Moessner A.* (N); *Negoiţă V. Panait* Locot. (4960); *Negrea A. Mircea* (4885, 917, 43); *Pantelimon V. Const.* (4943, 45, 56); *Pascaru C.* (4945, 56); *Petrescu V. Achille* (4926, 45, 57, 58, P); *Popa D. Mircea* (4943, 47, 52, 58, 60, P); *Popescu-Zorica N. Al.* (4655, 876, 95); *Rădulescu Gh. Oct.* (4872, 943, P); *Reischer L. Herman* (4945, 52, 60); *Rociu Margareta* (4908); *Rohr I. Al.* (4945); *Romaşcan Georgeta* (4790, 852); *Rosenblatt Millu* (4925); *Şaichim I. Adolf* (4883); *Segal Joe* (4622, 48); *Solomon I. Isac* (3768, 4945); *Stoenescu Mirel* (4556, 792, 803, 63); *Thébault V.* (N); *Theodorescu N. D.* (4792); *Ţiţeica I. Ilie* (4498, E, N); *Turcu R. Sandu* (4897, 943); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (4917, 18, 21, 28, 40, 45, 48).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

Colecţiunea *„Gazetei Matematice"* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică* Ediţia VI . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* 1926. (Epuizată).

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50
Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa :

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. **C. D. IONESCU-ŢIU**

C. 51.249

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIII

NUMĂRUL 11. — IULIE 1938

BIBLIOTECA CENTRALĂ SIBIIU

SUMARUL

1. O vizită a profesorului Paul Montel şi o săptămână matematică la Cluj . *G. Călugăreanu.*
2. Aritmetica lui Gheorghe Asachi (urmare) *P. V. Cazanacli.*
3. O soluţie geometrică, problemei 4709 . *G-ral Gh. I. Popescu.*
4. Formula mediei pentru polinoame . . *Gh. Mihoc.*
5. Note Matematice: 47 — 52.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 278.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 3557, 3755, 3839, 4166, 4385, 4577, 4626, 4682, 4865, 4906, 4916, 4919.
10. Exerciţii: 35 — 39.
11. Probleme propuse: 4953, 4975 — 4986.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1938

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*“, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stan**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1937 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4859, 71, 79, 88, 90, 94, 901, 04, 05, 09, 12, 13, 14, 15, 20, 22, 27, 29, 37, 38, 42, 44, 49, 51, 54, 55, 59, 62, 63, 65, 66, 67, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

In Biblioteca «Gazetei Matematice» a apărut:

CULEGERE DE PROBLEME DE ALGEBRĂ

INTOCMITĂ DE

D-l Inginer Profesor A. G. IOACHIMESCU
Licențiat în Matematici

PARTEA I. EDIȚIA IV-a

REVĂZUTĂ ȘI MĂRITĂ

188 pagini

Prețul: 120 lei

DE VÂNZARE LA LIBRĂRII, SE POATE COMANDA ȘI LA «GAZETA MATEMATICĂ», BUC. CALEA GRIVIȚEI Nr. 158, TRIMIȚÂNDU-SE COSTUL DE 120 LEI PLUS 15 LEI PENTRU TRANSPORT SAU CONTRA RAMBURS

In curând va apare:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

PARTEA II-a (Trigonometria triunghiului)

DE

V. CRISTESCU

EDIȚIA II-a REVĂZUTĂ ȘI ADĂOGITĂ

DE

GH. TH. GHEORGHIU

O VIZITĂ A PROFESORULUI PAUL MONTEL ŞI O SĂPTĂMÂNĂ MATEMATICĂ LA CLUJ.

Cluj, mijlocul lunii Mai 1938. In colţul matematic dela Facultatea de Ştiinţe se simte o mişcare mai vie. Profesorul PAUL MONTEL dela Universitatea din Paris vine pentru a cincea oară la Cluj unde lecţiile îi sunt deja anunţate. Profesori şi studenţi îl aşteaptă cu aceeaşi nerăbdare, căci îi cunosc toţi erudiţia, claritatea şi eleganţa în expunere, verva şi spiritul fin în relaţiile sociale. Se profită de sosirea în ţară a D-lui MONTEL, precum şi a mai multor alţi matematicieni străini, pentru a se da anul acesta o amploare specială obişnuitei săptămâni matematice care se înfiripă anual la Universitatea din Cluj, cu ocazia sosirii în localitate a matematicienilor români sau străini cari vin să aducă lumină nouă în acest aşezământ de cultură.

Şi astfel săptămâna matematică ia aspectul unui mic congres, la care ia parte pe lângă D-l MONTEL şi D-l prof. M. BIERNACKI dela Universitatea din Poznan, D-ra L. CHARPENTIER, doctor în matematici dela Poitiers, D-l J. L. DESTOUCHES, asistent al profesorului L. de BROGLIE dela Paris, precum şi D-l P. GILLIS, un distins matematician belgian. Primul sosit în Cluj este profesorul D. POMPEIU, directorul de onoare al Seminarului matematic din Cluj, care ia parte la primirea în gară a D-lui MONTEL, pronunţând şi cuvântul de bun sosit. Mai sosesc în Cluj D-nii prof. STOILOV, ONICESCU, conf. CIORĂNESCU, GHERMĂNESCU, PANTAZI, THEODORESCU, spre a contribui la buna reuşită a săptămânii matematice.

D-l P. MONTEL face de data aceasta patru lecţii introductive la teoria interpolaţiei. In primele două lecţii stabileşte rezultatele clasice asupra interpolaţiei prin polinoame în sensul lui LAGRANGE şi ABEL, precum şi formula lui HERMITE, care stă la baza întregei teorii. Trece apoi la studiul seriilor de interpolaţie şi la interpolaţia funcţiilor întregi, terminând cu exemple sugestive care pun în evidenţă necesitatea de a se cunoaşte valorile funcţiei pe o mulţime destul de densă de valori ale variabilei, pentru ca interpolaţia să poată determina funcţia necunoscută.

D-l M. BIERNACKI face trei lecţii asupra reprezentării conforme, stabilind o proprietate remarcabilă a domeniului acoperit de valorile unei funcţii analitice, holomorfă în cercul de rază 1, nulă în origine unde derivata ei are valoarea 1. In acest domeniu se poate totdeauna aşeza un fascicol de n segmente trecând prin origină, făcând între ele unghiuri date, astfel ca suma lungimilor acestor segmente să depăşească n. Proprietatea, datorită lui GOLOUSIN şi BREMANT, e susceptibilă de două demonstraţii, una bazată pe o metodă extremală, iar alta pe calculul rezidiurilor.

S'au mai ţinut apoi conferinţe din cele mai interesante, cum au fost: M-lle L. CHARPENTIER: Sur les points de Peano. Sunt punctele din plan prin care trec o infinitate de curbe integrale ale ecuaţiei $y' = f(x, y)$, unde $f(x, y)$ e continuă. Imprejurări noui se prezintă în cazul sistemelor analoage în spaţiul cu trei dimensiuni, pe care D-ra CHARPENTIER le expune cu o claritate desăvârşită. D-l J. L. DESTOUCHES: Les fondements de la physique théorique, la théorie structurale. Profunde consideraţii asupra structurii teoriilor fizicei moderne. D-l D. POMPEIU expune trei interesante observaţii asupra unor chestiuni de teoria funcţiilor analitice, domeniu în care bogata D-sale experienţă scoate la iveală aspecte noui chiar în chestiuni clasice. Astfel, o metodă de demonstraţie a teoremei lui D'ALEMBERT cu ajutorul integralei lui CAUCHY, şi o simplificare a calculului unor integrale definite prin metoda rezidiurilor. D-l STOILOV face o sugestivă expunere în legătură cu unele aplicaţii ale teoriei transformărilor interioare, teorie edificată de D-sa după ani de cercetare, şi pe care a cristalizat-o recent într'o expunere definitivă publicată la Paris. D-l ONICESCU dă cetire unui raport asupra lucrărilor matematicienilor LERAY şi SCHOUDER în legătură cu ecuaţiile funcţionale, raport întocmit cu ocazia decernării premiului MALAXA, şi care a interesat viu asistenţa. D-l PANTAZI face o frumoasă expunere a metodei reperului mobil în Geometria spaţiului euclidian cu trei dimensiuni, scoţând în evidenţă formulele de bază şi rezultatele esenţiale, şi dă apoi generalizarea la spaţiul proiectiv. D-l GHERMĂNESCU trece în revistă interesantele D-sale rezultate asupra combinaţiilor excepţionale ale funcţiilor întregi, susceptibile de o reprezentare geometrică cu ajutorul suprafeţei excepţionale, iar D-l THEODORESCU face o subtilă analiză a metodelor invariantive în geometria ecuaţiilor cu derivate parţiale.

Cum se vede, un material bogat. Insă nu e tot; mai trebuesc menţionate cele trei şedinţe ale Societăţii de ştiinţe din Cluj, secţia matematică, prezidate de D-l MONTEL, şi animate de originalele D-sale observaţii. In aceste şedinţe s'au afirmat şi matematicienii clujeni aducând la rândul lor în faţa oaspeţilor, unii sosiţi foarte de departe, obiectul preocupărilor lor favorite. Menţionăm astfel, pe lângă comunicarea D-lui P. GILLIS asupra unor chestiuni delicate de calculul variaţiilor, comunicările D-lor: TH. ANGHELUŢĂ asupra limitării modulelor zerurilor unei ecuaţii algebrice, în care aduce o completare teoremelor lui MONTEL şi VAN VLECK, N. ABRAMESCU asupra normalei unghiulare la o curbă plană, definită de D-sa, P. SERGESCU animatorul acestui mic congres, face să trăiască epoca de glorie a creaţiei calculului infinitezimal, G. BRATU, o teoremă din geometria triunghiului; demonstraţie elementară de o remarcabilă simplicitate a teoremei D-lui POMPEIU asupra distanţelor unui punct la cele trei vârfuri ale unui triunghiu, D. V. IONESCU, asupra unor ecuaţii funcţionale; rezultate precise asupra ecuaţiei lui GOURSAT pe care o reduce la o ecuaţie integrodiferenţială şi asupra ecuaţiei D-lui POMPEIU pe care o reduce la aceea a lui CAUCHY. N. CIORĂNESCU dela Politechnica din Bucureşti face două comunicări, una asupra unei desvoltări a funcţiilor analitice de două variabile reale, iar alta asupra unei generalizări a formulei mediei, care-l conduce la o remarcabilă desvoltare a funcţiilor quasi-analitice în serii de polinoame LEGENDRE. R. BĂDESCU dela Acad. de Agric. Cluj, expune consideraţiile D-sale ingenioase asupra randamentului instalaţiilor de cianurare în exploatarea aurului, C. IACOB tratează probleme noui din teoria funcţiilor armonice, utile în hydro—şi aerodinamică. Autorul acestor rânduri expune în ansamblu cercetările sale asupra invarianţilor de prelungire ai funcţiilor întregi.

Cum se vede, bogăţia programului nu a lăsat oaspeţilor mult timp liber. Au avut totuşi posibilitatea să facă o frumoasă excursie de două zile în regiunea auriferă a munţilor Apuseni, la Abrud, cu exploatările sale primitive şi la Brad, unde Societatea Mica a oferit celor sosiţi o recepţie demnă de toată lauda. Exploatarea aurului a interesat viu pe vizitatori, bulgării de aur nativ impresionând în mod special cu atât mai mult cu cât astfel de depozite sunt foarte rare în toată lumea. Intoarcerea prin Deva şi Alba-Iulia.

La Cluj, ca întotdeauna, oaspeţii au fost disputaţi în ce priveşte mesele şi recepţiile, de către profesorii Universităţii localnice, uneori de specialităţi destul de îndepărtate de cea matematică, dar de o unanimă şi cordială ospitalitate, pe care oaspeţii au relevat-o în repetate rânduri.

Astfel s'a încheiat săptămâna dela Cluj, a cărei urmare a fost însă la Bucureşti. La Bucureşti profesorul MONTEL era aşteptat pentru a i se înmâna oficial sabia de academician oferită D-sale de un grup de foşti elevi din toată lumea. Se ştie că D-l MONTEL a fost ales, nu de multă vreme, membru al Academiei franceze de Ştiinţe. Ori, costumul de ceremonie al acestor membri comportă şi o sabie, şi se obişnuieşte, mai ales la secţia literară, ca această sabie să fie oferită fiecărui „éternel" de către foştii săi elevi. In cazul D-lui MONTEL iniţiativa a pornit dela Seminarul matematic din Cluj, dela D-l SERGESCU care a format şi comitetul de iniţiativă. Ceremonia înmânării săbiei a avut loc la Bucureşti, în prezenţa elevilor maiestrului veniţi în acest scop, printre cari: 26 români, 20 francezi, 9 belgieni, 4 jugoslavi, 2 polonezi, 2 italieni, 1 grec, 1 bulgar şi chiar un haitian. Cuvintele mişcătoare rostite cu această ocazie au fost reproduse de ziarele zilei. Mai multe zile după aceea o bună parte din oaspeţii străini au rămas în ţară, luând parte şi la o frumoasă excursie la Turtucaia, organizată minunat de Academia de Agricultură din Bucureşti.

Sunt în aceste două săptămâni manifestări de solidaritate internaţională, de iniţiativă şi muncă naţională, care trebue să bucure pe toţi cei doritori de o ridicare a nivelului cultural din ţara noastră, şi de o consolidare a păcii. De aceea dorim ca viitorul să le transforme în solide tradiţii.

G. CĂLUGĂREANU
Conferenţiar la Univ. Cluj.

ARITMETICA LUI GHEORGHE ASACHI

(Urmare dela pag. 514)

Paragraful următor (155) „*De regula falsilor poziţii*" prezintă un interes deosebit, prin faptul că această regulă, aşa de des întrebuinţată în timpurile vechi, a dispărut cu desăvârşire din cărţile moderne de Aritmetică şi Algebră. Iată definiţia: „*Aceste*

regule sunt acele prin care se cuvine a împărți un număr în părții proporționale cu oarece numere ce se hotărăsc în atârnarea stării a vre unei cereri. Pentru de a face această împărțire, adeseori nu este lipsă de alta de cât de o singură supoziție (prepunere) a porțiilor proporționale către acele a unui număr pe carile se cuvine împărți, dar adeseori este nevoie a se face și două supoziții; noi vom urma acelui întâi cazu, al doile fiind pre greu". Aceste explicații nu sunt tocmai clare, dar se înțeleg mai bine, urmărind exemplul alăturat: „*A împărți 658 lei, între trii persoane în chip ca a doua să aibe de trii ori pe atâta ca acea întâi, și a tria atâta ce și amândouă celelante la un loc. Presupun că porția acii dintâi persoane este 1 leu. Porția acii a doua va fi 3 lei, fiind că ea are de trii ori pe atâta ce persoana întâi. Iar porția persoanei al triile va fi 1 leu + 3 lei, sau 4 lei pentrucă ea are atâta ce și cele două la un loc. Deci totimea acestor trii porții este 8. 1 + 3 + 4 fac 8. Dar supoziția ce am făcut este falsă (neadevărată) pentrucă îmi dă numai 8 lei pentru totimea porțiilor supozate; când totimea acelor adevărate porții este 658 lei. Insă vederat este că părțile supozate sunt proporționate cu acele adevărate porții. Deci noi vom cunoaște pe acele adevărate porții prin aceste trii proporții: 8, Totimea porțiilor supozate, este la 1, partea porțiilor supozate, cum 658, totimea adevăratelor porții, este la x, porția cea adevărată.* $8:1::658:x$".

Se găsește că „*porția acelui dintâi este 82,25*". Autorul face însă două proporții: $8:3::658:x$, și $8:4:::658:x$, aflând că „*porția acelui al doile este 246,75 lei*" și „*porția acelui al triile este 329 lei*". De sigur, nu e nevoie de aceste probleme parțiale întru cât cunoscând partea primului, găsim imediat părțile celorlalți. ASACHI însă preferă să le găsească ca la cazul I-iu; pe urmă, le adună, și ca probă, găsește suma dată.

Iată un alt exemplu: „*A împărți numărul 720 în trii părți, în cât acea întâi să fie la a doua cum 3 este la 4 și a doua să fie la a tria cum 5 este la 6. Să supozăm că porția întâi este exprimată prin 1; făcând acestă proporție:* $3:4::1:x$ *un al patrile termen* $x = \frac{1 \times 4}{3}$, $x = \frac{4}{3}$. *Reprezentuind a doua porție. Fâcând această altă proporție:* $5:6:: \frac{4}{3} : x$, *al patrule termin,*

ce trebuie să fie porția a tria: $x = \frac{\frac{4}{3} \times 6}{5}$, $x = \frac{24}{3} : 5$, $x = \frac{24}{15}$ *sau* $\frac{8}{5}$, *a triia porție. Totimea acestor trii porții este* $1 + \frac{4}{3} + \frac{8}{5}$ *adecă (reducând pe amândouă fracții la tot acel numitori)* $\frac{15}{15} + \frac{20}{15} + \frac{24}{15}$; *făcând adiția fracțiilor, aflăm* $\frac{59}{15}$, *care este o falsă supoziție. Dar acele adevărate porții vor eși făcând aceste trii proporții:*

I-a. *Regula de trii:* $\frac{59}{15} : 1 :: 720 : x$. $x = \frac{720 \times 1}{59}$, $x = 720 : \frac{59}{15}$, $x = 720 \times \frac{15}{59}$, $x = \frac{10800}{59}$, $x = 183\frac{3}{59}$, *întâia adevărată poziție*". Se mai fac două probleme la fel și se găsesc celelalte „porții:" a 2-a $= 244\frac{4}{59}$, și a 3-a $= 292\frac{52}{59}$. „*Pruba*" se face prin adunarea părților găsite. Iată și ultimul exemplu: „*A afla un număr a căruia giumătate, pătrimea și cincimea fac la un loc 60. Să reprezentăm pe numărul căutat prin 1; a sa giumătate va fi* $\frac{1}{2}$, *a sa pătrime* $\frac{1}{4}$, *și a sa cincime* $\frac{1}{5}$. *Reduc aceste trii fracții* $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, *la tot acel numitoriu; și să face* $\frac{20}{40}, \frac{10}{40}, \frac{8}{40}$, *sau* $\frac{10}{20}, \frac{5}{20}, \frac{4}{20}$. *După aceste fac adiția care îmi dă* $\frac{19}{20}$, *totimea porțiilor supozate. Supoziția este falsă; însă ea va da pe adevăratul număr, făcând această simplă regulă de trii: Dacă fracția* $\frac{19}{20}$ *cuprinde pe* $\frac{1}{2}$, *pe* $\frac{1}{4}$, *și pe* $\frac{1}{5}$ *de 1, de care număr 60 va cuprinde pe* $\frac{1}{2}$, *pe* $\frac{1}{4}$ *și pe* $\frac{1}{5}$. $— \frac{29}{1} : 1 :: 60 : x$". *Se găsește:* $x = 63\frac{3}{19}$; *pe urmă, se calculează și părțile, care scriu* $\frac{600}{19}$, $\frac{300}{19}$, $\frac{240}{19}$. *Adunându-le găsim* $\frac{1140}{19}$, *adică tocmai 60.* Incheind

ASACHI zice: „*La capătul acestei cărți vor urma câteva deosebite probleme de dezlegat*“. Ori în cele două exemplare ale Aritmeticii pe care le-am cercetat, astfel de probleme nu se găsesc; probabil că autorul a renunțat la ele.

Revenim din nou la Aritmetica propriu zisă, cu capitolul: „*De cvadrate și extragerea rădăcinilor lor* (§§ 156—172, 14 pagini). Iată primele definiții: § 156: „*Prin cvadratul unui număr se înțălege produsul acestui număr înmulțit prin însuș sine: 4 este cvadratul de 2, pentrucă este productul de 2×2; 9 este cvadratul de 3, pentru că 3 × 3 ecvalează cu 9*“, *etc.*

§ 157: „*Numărul, carile înmulțit prin însuș sine, au produs un cvadrat, se numește rădăcina acestui cvadrat. 2 este rădăcina cvadratului 4, 3 este rădăcina cvadratului 9. Tabla (§ 27) cuprinde toate cvadratele a numerilor exprimate prin o singură cifră, care sânt:*

Rădăcini 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvadrate 1 4 9 16 25 36 49 64 81.

158: „*Fieșcare număr întreg sau și fracționar, prin însuși sine înmulțit informează un deplin cvadrat; dar oricare nu este cvadrat, adecă fieșcare număr nu este productul exact a unui alt număr înmulțit prin însuși sine. Precum s'au văzut nu este nici cum greu a înforma cvadratul unui număr, însă nu este totdeauna de asemene ușor a cunoaște rădăcina cvadrată a oricăruia număr propus*“. In § 159 autorul găsește patratul lui 12, înmulțind (10 + 2) prin (10 + 2): după o discuție amănunțită el zice: „*încheiu că cvadratul de 12 cuprinde:* 1⁰) *Cvadratul zecimilor,* 2⁰) 2 *ori productul zecimilor prin unimi,* 3⁰) *Și cvadratul unimilor*“. Dar de oarece fiecare număr este format din zeci și unități, în § 160 se explică că, în general, „*al său cvadrat va fi compus din cvadratul zecimilor, plus de două ori produsul zecimilor prin unimi, plus cvadratul unimilor*“.

§ 161: „*Mainainte de a trece mai departe să însămnăm:* 1) *că cvadratul acelui mai mare a tutulor numerilor din o singură țifră are țifre numai două: 81 este cvadratul de 9; deci orice cvadrat compus din două țifre, are numai una la rădăcină.* 2) *Că orice cvadrat compus din mai mult de două țifre, are cel puțin două la rădăcină, fiindcă o sută, cel mai mic din numere compus din mai mult decât din două țifre, are de rădăcină 10*

compus din două ţifre. 3) *Că cvadratul de zecimi are a se afla numai în sutimi sau în miimi, în milioni... multiplu de o sută, pentrucă cvadratul a unei singure zecimi este o sută sau o sutime*".

După aceasta ASACHI trece la exemple, începând cu § 162: „*A extrage rădăcina cvadrată din 529. Zic, fiind că numărul propus are mai mult de două ţifre, urmează a fi rădăcina sa un număr de mai mult de o ţifră; deci ea va avea zecimi şi unimi, şi cvadratul zecimilor negăsindu-se decât în sutimi, prin o comă dispart dela 529 zecimile şi unimile simple, sau două ţifre, şi caut cvadratul zecimilor a rădăcinii în 5, sau 5 sutimi care rămân, şi zic: care este cel mai mare cvadrat cuprins în 5? 4, a căruia rădăcină cvadrată este 2; scriu aceste 2 după 529, şi dincolo de liniuţă; apoi spre adeveri dacă 2 este rădăcina cvadrată de 5, fac cvadratul de 2, şi ese 4, care scriu sub 5; fac substragerea, şi rămâne 1, sau o sutime. Cobor clasul 29 alăture cu această rămăşiţă 1, şi cuvintez în acest chip: rămăşiţa 129 trebui să cuprindă două ori pe productul zecimilor prin unimi, şi cvadratul unimilor. Dar productul zecimilor prin unimi nu poate fi de cât în zecimile rămăşiţii 129. Deci despart prin o comă acele 9 simple unimi, şi zic: fiind că 12, sau 12 zecimi a rămăşiţii 129, este productul de două ori zecimile rădăcinei prin unimi, împărţind 12 prin îndoitul zecimilor rădăcinei (§ 38) vor eşi unimile la câtoriu; deci îndoiesc ţifra 2-a a zecimilor rădăcinei acum aflate, acest îndoit este 4; împărţesc 12 prin 4, şi am 3 la câtoriu, pe carele scriu la rădăcină, spre dreapta de 2, şi spre a mă încredinţa de am lucrat bine, scriu 4, îndoitul zecimilor a rădăcinei sub zecimile rămăşiţii 129; după aceaste scriu 3, ţifra unimilor rădăcinei, sub 9, simple unimi de 129, şi înmulţesc 4 şi 3 sau 43 prin 3, substrag productul de 129; deci zic 3 ori 3 fac 9, scad dela 9 rămâne 0; 3 ori 4 fac 12, scad dela 12 rămâne 0; în cât încheiu că 23 este rădăcina cvadrată de 529, pentrucă dintăiu am scăzut cvadratul zecimilor care era 400, apoi productul de două ori zecimi, sau 40 prin unimile 3, care product este 120; în urmă cvadratul unimilor 3 carile este 9: deci 529 ecvalează în adevăr cu 400 + 120 + 9*".

```
5,29 | 23
12  2,9
     43
      3
     ---
     00
```

§ 163: „*Care este rădăcina cvadrată de 1849?*" Se lucrează ca şi mai sus, deci, nu voiu mai repeta expunerea făcută.

§ 164: „*Care este rădăcina cvadrată de 15376? Dispart două ţifre spre dreapta, şi îmi rămân încă trii; a căror rădăcină trebui să aibe mai mult de cât o ţifră. Socotesc pe 153 aşa precum ar fi despărţite dela 76, şi urmez ca cum aş avea să extragu rădăcina din 153*“. Continuând autorul găseşte 12, şi zice: „*socotind două ţifre 1,2 a rădăcinei ca cum ar face un număr, îl îndoiesc, şi esă 24 prin carile împărţesc pe 97: câtoriul este 4, pe carile îl scriu la rădăcină, după 12; scriu 4 sub 6, şi 24, îndoitul de 12, sub 97; înmulţesc 244 prin 4, şi după ce am substras productul de 976, nu rămâne nimic. Deci 124 este rădăcina cvadrată*“. Concluzia acestui paragraf: „*Deci mainainte de a păşi la extragerea rădăcinii cvadrate a ori căruia număr, se cuvine împărţi acest număr, începând dela dreapta, în clasuri câte două ţifre*“. § 165: „*Dacă după operaţia extragerii rădăcinii ar ţi vre o rămăşiţă, atunce ar trebui pune două 0 lângă acestă rămăşiţă, şi a urma operaţia, după ce se va pune o comă lângă rădăcină, spre a însemna că ţifrele care vor să vie sânt zecimale. Puind două 0 lângă rămăşiţă, atunce ea se face de o sută de ori mai mare; dar şi ţifra care ea va da la rădăcină va exprima zecini. Adiţia acestor 00 nu înrâurează asupra rădăcinei, căci (§ 63) se pot pune atâte 0 câte vom voi la capătul unui număr, numai ca aceste 0 să fie despărţite dela acest număr prin o comă. Pre lângă aceste, să socotim cum că la rădăcină se află zecimale, atunce spre a reproduce numărul din care ea s'au extras, s'ar cuveni a o înmulţi prin însuş ea, adică a înmulţi zecinile prin zecini, care ar da sutini*“. Luând un exemplu numeric: $2{,}30 \times 2{,}30 = 5{,}2900$, se conchide: „*numărul zecimalilor a cvadratului este pururе îndoitul a zecimalilor rădăcinei*“.

1, 53, 76	124
1,	
0 5,3	
2,2	
2	
97, 6	
24 4	
4	
0000	

§ 166: „*Deci, îndată ce un cvadrat va cuprinde zecimale, dacă aceste sunt împerechete la număr, atunce se va operui aşa precum nu ar fi zecimale ştergând coma, iar spre dreapta rădăcinei se vor despărţi atâte ţifre câte vor trebui pentru de a agiunge la giumătatea zecimalelor cvadratului; la întâmplare când zecimalele cvadratului nu ar fi în număr perechet, se va adăogi o nulă care nici cum nu va schimba valoare nici cvadratului nici a rădăcinei sale*“.

După stabilirea acestei reguli, în § 167, se extrage rădăcina patrată din 5; se găseşte 2,23, şi restul 271 (de fapt este 0,0271). In §§ 168 şi 169 se dă regula obişnuită pentru extragerea rădăcinii patrate dintr'o fracţie. § 170: *„Intâmplându-se ca numitoriul să nu fie un cvadrat deplin, atunce ar trebui înmulţi pe amândouă termine a fracţii prin numitoriul; aceasta nu ar schimba a sa valoare, iar numitoriul fracţii cei nouă ar fi un deplin cvadrat“*. Astfel fracţia $\frac{4}{5}$ se înlocuieşte prin $\frac{20}{25}$; *„a căria rădăcină cvadrată ar fi* $\frac{447}{5}$ *cu apropiere de o sutină“* (de fapt, $\frac{4,47}{5}$). § 171: *„Dar, având a extrage o rădăcină cvadrată din o fracţie, mai scurt şi mai îndemânatic este dintâi a preface această fracţie în fracţie zecimală, şi apoi a căuta a ei rădăcină cvadrată. Incât, în loc de a căuta rădăcina cvadrată de* $\frac{4}{5}$, *se caută rădăcina de 0,8“* (se găseşte 0,282, ceea ce este o greşală, provenită de acolo că autorul consideră ca grupul întâi 8 în loc de 80).

(Va urma). P. V. CAZANACLI.

O SOLUŢIE GEOMETRICĂ, PROBLEMEI 4709

La pagina 215, Vol. XLIII al *Gazetei Matematice,* se dă o soluţie analitică problemei 4709, propusă de către D-l GH. D. SIMIONESCU.

Vom da o soluţie geometrică acestei probleme în care cere să se arate:

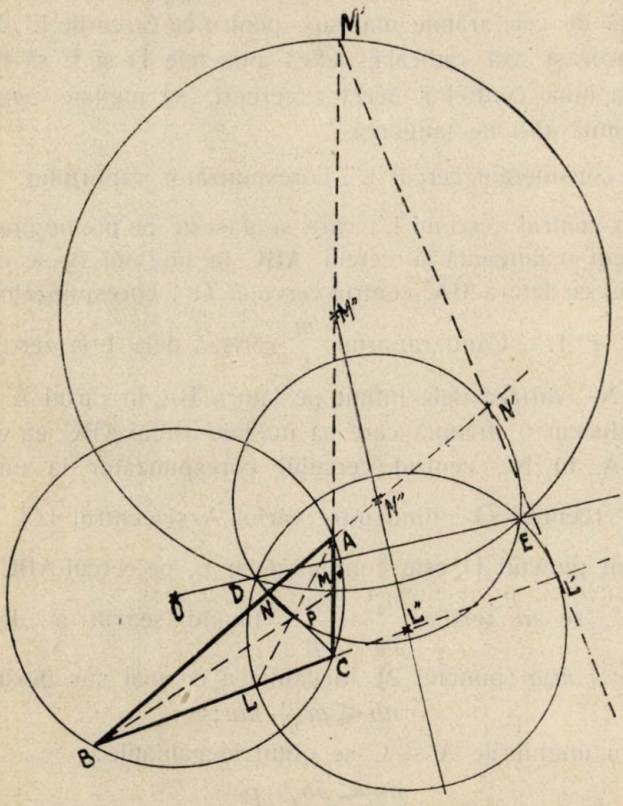
1. *Că cercurile de centre* L″, M″ *şi* N″ *ce trec prin punctele care împart armonic laturile* BC, CA *şi* AB, *respectiv în rapoartele* $\frac{n}{p}$, $\frac{p}{m}$ *şi* $\frac{m}{n}$, *cu centru pe aceste laturi, luate câte două, au acelaşi ax radical.*

Fiecare din cercurile L″, M″ şi N″ sunt ortogonale cercului ABC de centru O şi deci, coardele comune ale cercurilor considerate, luate câte două, vor trece prin centrul cercului O.

Ori se ştie [1]) că dacă D şi E sunt punctéle de intersecţie ale cercurilor L″ şi M″, cercul N″ va trece prin aceleaşi puncte, fiindcă punctele D şi E, se bucură de proprietatea că depărtările lor la vârfurile triunghiului ABC, sunt proporţionale cu numerele date m, n şi p.

2. *Posibilităţile problemei.*

Punctele D şi E pot fi distincte, confundate sau imaginare, după cum linia centrelor cercurilor L″, M″ şi N″, faţă de cercul ABC, nu taie, este tangentă sau taie acest cerc.



Dacă m_0, n_0 şi p_0 sunt numerele pentru care, punctele D şi E sunt confundate pe cercul ABC, după cum punctul D (E) se găseşte în unghiurile vârfurilor A, B şi C ale triunghiului ABC,

1) Geometria *Rouché et Comberousse*, partea 1-a, Geometria triunghiului, punctul 23, paragraful 2.

în patrulaterele inscriptibile formate ABCD, se obţin, respectiv, următoarele relaţii între laturile a, b, c şi numerele m_0, n_0, p_0:

$$am_0 = bn_0 + cp_0$$
$$bn_0 = cp_0 + am_0$$
$$cp_0 = am_0 + bn_0 .$$

Razele vectorii DA, DB şi DC fiind λm_0, λn_0 şi λp_0, λ fiind un număr.

3. *Ce relaţii trebue să existe între* a, b *şi* c, m, n *şi* p, *pentru ca cercurile* L″, M″ *şi* N″ *să taie axa radicală comună.*

Faţă de cele arătate mai sus, pentru ca cercurile L″, M″ şi N″ să taie aceeaşi axă radicală, adică punctele D şi E să fie *reale*, trebue ca linia centrelor acestor cercuri, să nu taie cercul ABC sau la limită să-i fie tangentă.

Să considerăm cercul L″, corespunzător raportului, $\frac{n}{p} \geqslant 1$. Dacă din centrul cercului L″, care se găseşte pe prelungirea laturii BC, ducem o tangentă la cercul ABC în unghiul B, se obţine la intersecţia cu latura BA, centrul cercului O_c', corespunzător raportului $\frac{m_0}{n_0} \leqslant 1$. — Când raportul $\frac{m}{n}$ variază dela 1 la zero, centrul cercului N″, variază dela infinit pe latura BA, în vârful A. — Dacă din L″, ducem o dreaptă care să nu taie cercul ABC, ea va întâlni latura BA, în N″, centrul cercului corespunzător la un raport $\frac{m}{n} \geqslant \frac{m_0}{n_0}$ (centrul O_c', fiind între vârful A şi centrul L″).

Cum punctul D este confundat cu E, pe cercul ABC, pentru cercul L″, se are relaţia $\frac{n_0}{p_0} = \frac{n}{p}$, ţinând seamă şi de relaţia $n_0 b = p_0 c + m_0 a$ (punctul 2), inegalitatea de mai sus devine:

$$nb \leqslant pc + ma ;$$

iar pentru unghiurile A şi C se obţin inegalităţile:

$$ma \leqslant nb + pc$$
$$pc \leqslant ma + nb$$

relaţii care leagă laturile a, b, c şi numerele m, n şi p, pentru a avea punctele D şi E reale, adică cercurile L″, M″ şi N″ să taie axa radicală comună.

GENERAL GH. I. POPESCU.

FORMULA MEDIEI PENTRU POLINOAME

Cu privire la formula mediei

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

D-l PROFESOR POMPEIU a arătat că atunci când $f(x)$ este un polinom, intervalul de variaţie al lui ξ este mai restrâns decât (a, b) [1]). In ultimii ani s'au publicat în legătură cu această proprietate generală a polinoamelor numeroase lucrări, care au avut ca rezultat stabilirea intervalului minim de contracţie al lui ξ, denumit interval de contracţie, pentru diferite clase de polinoame [2]). Cel dintâi care a obţinut un rezultat general a fost însă D-l TCHAKALOFF, care a determinat intervalul de contracţie pentru clasa generală a polinoamelor de grad impar [3]).

In cele ce urmează ne propunem să rezolvăm această chestiune pentru polinoamele generale de grad par.

I.

1. Vom considera la început cazul cel mai simplu:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Ecuaţia (1), care ne dă pe ξ, devine în acest caz:

$$(2) \qquad \int_a^b (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)g(x)\,dx = (\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma)\int_a^b g(x)\,dx.$$

---

1) Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, t. 15-1928, pag. 395
Bulletin de la Société des Sciences de Cluj, t. 4, pag. 245
Mathematica, t. 2, pag. 70.

2) Cităm lucrările D-lor:

E. ABASON, Bulletin de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II", I année, pag. 4—10, 81—86, 149—152, II année, pag. 5—15, 170—177.

M. BIERNACKI, Bulletin de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II", II année, pag. 164—170.

LUCA TEODORIU, Teză de doctorat, 1930.

3) L. TCHAKALOFF, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 192, 1931.
Acta Mathematica 63, 1—2, 1934.

Problema care se pune este să se găsească în interiorul lui (a, b) intervalul cel mai restrâns în care să fie cuprins, întotdeauna un ξ dat de relaţia (2), oricare ar fi α, β, γ.

Vom folosi pentru aceasta următoarea metodă, care are avantajul că se aplică şi în cazul general.

Dacă însemnăm:

$$M_r = \int_a^b x^r g(x)\, dx$$

ne propunem să găsim 4 valori p_1, p_2, x_1, x_2 verificând condiţiile

$$(3) \qquad \begin{cases} p_1 + p_2 = M_0 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = M_1 \\ p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 = M_2 \\ p_1 x_1^3 + p_2 x_2^3 = M_3 + \lambda \end{cases}$$

unde λ este un parametru variabil.

Notând prin

$$x^2 + px + q = 0$$

ecuaţia de gradul al doilea, care are rădăcini pe x_1, x_2 obţinem prin înmulţirea ecuaţiilor (3) respectiv cu 1, p, q şi prin adunare

$$M_2 + pM_1 + qM_0 = 0$$

$$M_3 + \lambda + pM_2 + qM_1 = 0.$$

Prin eliminarea lui p şi q, rezultă că ecuaţia

$$(4) \qquad F(x) \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ M_0 & M_1 & M_2 \\ M_1 & M_2 & M_3 + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

admite ca rădăcini pe x_1, x_2.

Această ecuaţie are totdeauna rădăcinile reale.

Intr'adevăr, avem:

$$F\left(\frac{M_1}{M_0}\right) = -\frac{(M_0 M_2 - M_1^2)^2}{M_0^2} < 0.$$

In plus se vede că $F(-\infty)$ şi $F(+\infty)$ au acelaşi semn cu cantitatea $M_0 M_2 - M_1^2$.

Insă:

$$M_0M_2 - M_1^2 = \int_a^b g(x)\,dx \int_a^b x^2 g(x)\,dx - \left[\int_a^b x\,g(x)\,dx\right]^2 > 0$$

conform inegalităţii lui SCHWARTZ care se aplică în cazul de faţă din cauză că $g(x) > 0$.

Pentru trinomul $F(x)$, avem prin urmare următoarea succesiune de semne:

$$\begin{array}{ccc} F(-\infty) & F\left(\frac{M_1}{M_0}\right) & F(+\infty). \\ + & - & + \end{array}$$

Valorile x_1, x_2 sunt întotdeauna reale şi cuprinse, ori care ar fi ξ, în intervalele respective

$$\left(-\infty, \frac{M_1}{M_0}\right) \quad , \quad \left(\frac{M_1}{M_0}, +\infty\right).$$

Avem prin urmare:

$$-\infty < x_1 < \frac{M_1}{M_0} \quad , \quad \frac{M_1}{M_0} < x_2 < +\infty.$$

Aceste inegalităţi ne arată că valorile lui p_1 şi p_2, deduse din (3)

$$p_1 = \frac{M_0x_2 - M_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad p_2 = \frac{M_1 - M_0x_1}{x_2 - x_1}$$

sunt mai mari decât zero.

Observăm însă că din (3) obţinem, oricare ar fi α, β, γ:

$$(5) \quad \int_a^b (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) g(x)\,dx = p_1(\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma) + p^2(\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma).$$

Din prima relaţie din (3) şi ecuaţiile (2) şi (5) deducem imediat:

$$(6) \quad \frac{p_1(\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma) + p_2(\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma)}{p_1 + p_2} = \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma.$$

sau

$$(6) \qquad f(\xi) = \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)}{p_1 + p_2}$$

unde

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$f(\xi)$ este prin urmare o medie a valorilor $f(x_1)$, şi $f(x_2)$ şi ca atare $f(\xi)$ se găseşte cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$. Drept consecinţă, deoarece $f(\xi)$ este o funcţie continuă, rezultă inegalitatea:

$$x_1(\lambda) \leqslant \xi \leqslant x_2(\lambda). \tag{7}$$

Deci, oricare ar fi λ, *între rădăcinile ecuaţiei* (4) *se găseşte întotdeauna un* ξ *verificând formula mediei pentru orice polinom arbitrar de gradul al doilea.*

2. Se poate uşor arăta că intervalul $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$ nu se mai poate restrânge.

Intr'adevăr să considerăm polinomul:

$$f(x) = (x - x_1 - \varepsilon)(x - x_2)$$

unde $$\varepsilon > 0.$$

Formula (6), aplicată acestui polinom ne dă:

$$f(\xi) = -p_1 \varepsilon (x_1 - x_2) > 0.$$

Ştim în baza inegalităţii (7) că ξ se găseşte cuprins între $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$. Valorile lui x, pentru care trinomul $f(x)$ este pozitiv sunt însă exterioare rădăcinilor lui, care sunt $x_1 + \varepsilon_1 x_2$. Prin urmare avem:

$$x_1 < \xi < x_1 + \varepsilon.$$

ξ diferă cu mai puţin de ε de x_1, oricât de mic ar fi ε.

In acelaşi mod se arată că polinomul

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2 + \varepsilon)$$

admite în intervalul (x_1, x_2) un ξ cuprins între $(x_2 - \varepsilon, x_2)$ oricât de mic ar fi ε.

Intervalul (x_1, x_2) nu mai poate fi deci restrâns. *El e un interval de contracţie.*

3. Am regăsit astfel pe cale elementară rezultatul fundamental ce s'a stabilit în lucrările citate în legătură cu polinoamele pare şi anume că pentru aceste polinoame există o infinitate de intervale de contracţie. A ne mulţumi însă numai cu acest rezultat înseamnă a nu rezolva problema în întregime. Pentru polinoamele impare a fost găsit un interval unic, ireductibil şi mai mic decât (a, b) fiind cuprins în interiorul lui [1]). Intervalele de contracţie, găsite pentru polinoamele pare, nu îndeplinesc aceste condiţiuni,

1) A se vedea lucrările citate ale D-lui TCHAKALOFF.

întrucât, după cum se poate constata, unele dintre ele pot avea o lungime infinită [1]). Din infinitatea de intervale de contracție $x_1(\lambda)\,x_2(\lambda)$ trebue deci pentru rezolvarea completă a chestiunii să găsim pe acela de lungime minimă, ceea ce se poate face ușor pentru polinomul de gradul al doilea.

Intr'adevăr din (4) obținem:

$$(x_1-x_2)^2=\frac{(M_0M_3-M_1M_2+\lambda M_0)^2-4(M_0M_2-M_1^2)(M_1M_3-M_2^2+\lambda M_1)}{(M_0M_2-M_1^2)^2}.$$

Această funcție de λ, ia valoarea minimă pentru:

$$\lambda=-\frac{M_0^2M_3-3M_0M_1M_2+2M_1^3}{M_0^2}.$$

Pentru valoarea lui λ de mai sus, ecuația (4) devine:

$$M_0^2x^2-2M_0M_1x+2M_1^2-M_0M_2=0$$

având rădăcinile:

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1=\dfrac{M_1}{M_0}+\dfrac{\sqrt{M_0M_2-M_1^2}}{M_0} \\ x_2=\dfrac{M_1}{M_0}-\dfrac{\sqrt{M_0M_2-M_1^2}}{M_0}. \end{cases}$$

Obținem astfel următoarea proprietate:

Intervalul minim de contracție pentru polinomul de gradul al doilea este dat de formulele (8) *lungimea lui este egală cu*

$$2\frac{\sqrt{M_0M_2-M_1^2}}{M_0}.$$

Intervalul de contracție dat de relațiile (8) îndeplinește condițiile pe care le satisfac intervalele de contracție ale polinoamelor de grad impar.

El este intervalul de mărime minimă, ireductibil în interiorul căruia se găsește întotdeauna un ξ *verificând formula medie pentru polinoamele de gradul al doilea.*

(Va urma). GH. MIHOC.

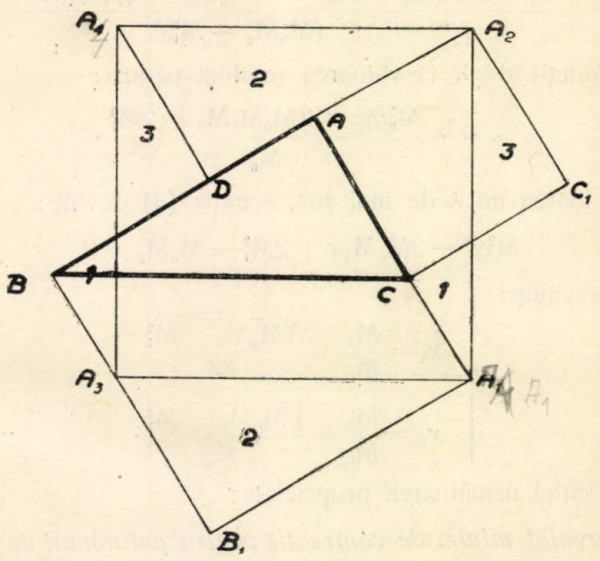
---

1) De exemplu:

$$x_1=\frac{M_1}{M_0},\quad x_2=+\infty.$$

NOTE MATEMATICE

47. *O demonstrație a teoremei lui* PITAGORA. Figura următoare rezumă o nouă demonstrație a teoremei lui PITAGORA pentru un triunghiu ABC dreptunghic în A.



Triunghiurile, care poartă același număr pe figură, sunt unul translațiunea celuilalt și avem:

$$\overline{BC}^2 = A_1A_2A_3A_4 = BAA_1B_1 + CAA_2C_1 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2.$$

V. THÉBAULT.

48. *Două probleme diofantiene.* I. Fie de rezolvat în numere întregi, sistemul

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 = 0$$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_5^3 + X_6^3 + X_7^3 = 0$$

$$X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 + X_4^5 + X_5^5 + X_6^5 + X_7^5 = 0.$$

α) Fie a şi b două numere întregi oarecare. Pun:

$$A = a^5 + a^4b - 3a^3b^2 - 11a^2b^3 - 11ab^4 - 3b^5$$
$$B = 2a^4b + 2a^3b^2 - 8a^2b^3 - 8ab^4 - 2b^5$$
$$C = -a^4b - a^3b^2 - 2a^2b^3 - 3ab^4 - b^5$$
$$D = -a^5 - a^4b - 8a^2b^3 - 10ab^4 - 3b^5$$
$$E = -a^5 - 2a^4b + a^3b^2 - 2a^2b^3 - 5ab^4 - 2b^5$$
$$F = -a^4b - 4a^3b^2 - 7a^2b - 4ab^4 - b^5$$
$$G = a^5 + 2a^4b - 2a^3b^2 - 11a^2b^3 - 8ab^4 - 2b^5$$
$$H = -a^5 - 2a^4b - 3a^2b^3 - 6ab^4 - 2b^5$$
$$J = a^4b + 2a^3b^2 - 7a^2b^3 - 10ab^4 - 3b^5$$
$$K = a^5 + 2a^4b - 3a^3b^2 - 12a^2b^3 - 9ab^4 - 2b^5$$
$$L = a^5 + a^4b - 2a^3b^2 - 6a^2b^3 - 4ab^4 - b^5$$
$$M = a^4b - a^3b^2 - 12a^2b^3 - 11ab^4 - 3b^5$$
$$N = 2a^4b - 4a^3b^2 - 6a^2b^3 - 6ab^4 - 2b^5$$
$$P = -a^5 - a^4b + a^3b^2 - 3a^2b^3 - 3ab^4 - b^5.$$

β) Cu notaţiunile dela α) avem identităţile

$$A^i + B^i + C^i + E^i + F^i + G^i = H^i + J^i + K^i + L^i + M^i + N^i + P^i$$

pentru $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Observ că

$$A + P = B + N = C + M = D + L = E + K = F + J = G + H.$$

Notând cu 2S valoarea comună a acestor sume avem:

$$(S-A)^n + (S-B)^n + (S-C)^n + (S-D)^n + (S-E)^n + (S-F)^n + (S-G)^n$$
$$= (S-H)^n + (S-J)^n + (S-K)^n + (S-L)^n + (S-M)^n + (S-N)^n + (S-P)^n$$

pentru $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Pun

$$S - A = X_1 = -(S - P) \quad ; \quad S - B = X_2 = -(S - N); \ldots$$

şi obţin

$$X_1^n + X_2^n + X_3^n + (-X_4)^n + (-X_5)^n + (-X_6)^n + (-X_7)^n$$
$$= X_7^n + X_6^n + X_5^n + X_4^n + (-X_3)^n + (-X_2)^n + (-X_1)^n$$

care pentru $n = 1, 3, 5$ dă tocmai sistemul dela început[1]).

---

1) A se vedea şi: « *Zahlentheoretische Untersuchungen* » din *The Tohoku Mathematical Journal*. Vol. 39, Part. I.

γ) *Exemplu.* Dacă se ia $a = 3$, $b = 1$ se obține identitatea

$$1^n + 109^n + 119^n + 363^n + 492^n + 640^n + 656^n = 24^n + 40^n + 188^n + 317^n + 561^n + 571^n + 679^n$$

pentru $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Dacă la fiecare parte a termenilor acestei identități se adaugă sau se scade 423, și apoi se așează părțile în ordinea mărimei se obține o identitate ca la β).

Adunarea și scăderea aceasta este permisă, căci dacă

$$A^n + B^n + C^n + D^n + E^n + F^n + G^n = H^n + J^n + K^n + L^n + M^n + P^n$$

pentru $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, atunci după o teoremă cunoscută în teoria numerelor, este adevărată și identitatea

$$(A \pm x)^n + (B \pm x)^n + (C \pm x)^n + (D \pm x)^n + (E \pm x)^n + (F \pm x)^n + (G \pm x)^n = (H \pm x)^n + (J \pm x)^n + (K \pm x)^n + (L \pm x)^n + (M \pm x)^n + (P \pm x)^n$$

pentru $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ori care ar fi x.

Din exemplul precedent se scoate

$$2S = 1 + 679 = 109 + 571 = 119 + 561 = 363 + 317 = 492 + 188 = 640 + 40 = 656 + 24 = 680$$

și se obțin identitățile

$$339^n + 231^n + 221^n = 23^n + 152^n + 300^n + 316^n$$

pentru $n = 1, 3, 5$.

II. Consider sistemul

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2$$

$$A.B.C = D.E.F.$$

Obțin o soluție comună sistemului dacă pun

$$A = g[a(a^2 - b^2)x^2 - 2g(a^2 - b^2)xy + a(g^2 - d^2)y^2]$$
$$B = ad[(a^2 - b^2)x^2 - (g^2 - d^2)y^2]$$
$$C = b[g(a^2 - b^2)x^2 - 2a(g^2 - d^2)xy + g(g^2 - d^2)y^2]$$
$$D = d[a(a^2 - b^2)x^2 - 2g(a^2 - b^2)xy + g(g^2 - d^2)y^2]$$
$$E = bg[(a^2 - b^2)x^2 - (g^2 - d^2)y^2]$$
$$F = a[g(a^2 - b^2)x^2 - 2a(g^2 - d^2)xy + g(g^2 - d^2)y^2].$$

Exemplu numeric. Pentru

$$g = 1 \; ; \; a = 3 \; ; \; b = 2 \; ; \; x = 4 \; ; \; y = 1 \; : \; d = 5$$

avem

$$16^2 + 195^2 + 158^2 = 80^2 + 26^2 + 237^2$$
$$16.195.158 = 80.26.237.$$

A. MOESSNER
(Nürnberg).

49. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). Pentru $p = 3$ şi N_p începând cu 5 am găsit următoarele 150 de soluţiuni:

N_p	N	N_p	N
501 248 976	1 503 746 928	542 617 980	1 627 853 940
501 276 489	1 503 829 467	560 241 978	1 680 725 934
501 287 649	1 503 862 947	561 798 024	1 685 394 072
501 642 789	1 504 928 367	561 798 240	1 685 394 720
501 642 879	1 504 928 637	561 978 024	1 685 934 072
502 789 164	1 508 367 492	561 978 240	1 685 934 720
502 879 164	1 508 637 492	562 401 798	1 687 205 394
510 248 976	1 530 746 928	562 401 978	1 687 205 934
510 276 489	1 530 829 467	562 417 980	1 687 253 940
510 287 649	1 530 862 947	562 419 780	1 687 259 340
512 489 760	1 537 469 280	564 017 829	1 692 053 487
512 876 490	1 538 629 470	564 017 928	1 692 053 784
516 402 789	1 549 208 367	564 018 279	1 692 054 837
516 402 879	1 549 208 637	564 019 278	1 692 057 834
516 427 890	1 549 283 670	564 027 819	1 692 083 457
516 428 790	1 549 286 370	564 029 178	1 692 087 534
524 897 601	1 574 692 803	564 178 029	1 692 534 087
524 897 610	1 574 692 830	564 178 290	1 692 534 870
524 987 601	1 574 962 803	564 180 279	1 692 540 837
524 987 610	1 574 962 830	564 182 790	1 692 548 370
527 648 901	1 582 946 703	564 190 278	1 692 570 834
527 648 910	1 582 946 730	564 192 780	1 692 578 340
527 890 164	1 583 670 492	564 278 019	1 692 834 057
527 891 640	1 583 674 920	564 278 190	1 692 834 570
528 764 901	1 586 294 703	564 279 018	1 692 837 054
528 764 910	1 586 294 730	564 279 180	1 692 837 540
528 790 164	1 586 370 492	564 280 179	1 692 840 537
528 791 640	1 586 374 920	564 281 079	1 692 845 370
540 179 826	1 620 539 478	564 290 178	1 692 870 534
540 197 826	1 620 593 478	564 291 780	1 692 875 340
540 261 798	1 620 785 394	574 601 982	1 723 805 946
540 261 978	1 620 785 934	574 602 198	1 723 806 594
541 798 026	1 625 394 078	574 619 802	1 723 859 406
541 978 026	1 625 934 078	574 619 820	1 723 859 460
542 601 798	1 627 805 394	574 620 198	1 723 860 594
542 619 780	1 627 859 340	574 621 980	1 723 865 940

1) Urmare la Nota dela pag. 533, Vol. XLIII.

N_p	N	N_p	N
574 986 012	1 724 958 036	584 976 210	1 754 928 630
574 986 021	1 724 958 063	596 417 802	1 789 253 406
574 986 102	1 724 958 306	596 417 820	1 789 253 460
574 986 120	1 724 958 360	597 460 182	1 792 380 546
574 986 201	1 724 958 603	597 460 218	1 792 380 654
574 986 210	1 724 958 630	597 461 802	1 792 385 406
578 196 402	1 734 589 206	597 461 820	1 792 385 460
578 201 964	1 734 605 892	597 462 018	1 792 386 054
578 219 640	1 734 658 920	597 462 180	1 792 386 540
579 640 182	1 738 920 546	597 486 012	1 792 458 036
579 640 218	1 738 920 654	597 486 021	1 792 458 063
579 641 802	1 738 925 406	597 486 102	1 792 458 306
579 641 820	1 738 925 460	597 486 120	1 792 458 360
579 642 018	1 738 926 054	597 486 201	1 792 458 603
579 642 180	1 738 926 540	597 486 210	1 792 458 630
579 840 162	1 739 520 486	597 840 162	1 793 520 486
579 840 216	1 739 520 648	597 840 216	1 793 520 648
579 841 602	1 739 524 806	597 841 602	1 793 524 806
579 841 620	1 739 524 860	597 841 620	1 793 524 860
579 842 016	1 739 526 048	597 842 016	1 793 526 048
579 842 160	1 739 526 480	597 842 160	1 793 526 480
579 860 142	1 739 580 426	597 860 142	1 793 580 426
579 860 214	1 739 580 642	597 860 214	1 793 580 642
579 861 402	1 739 584 206	597 861 402	1 793 584 206
579 861 420	1 739 584 260	597 861 420	1 793 584 260
579 862 014	1 739 586 042	597 862 014	1 793 586 042
579 862 140	1 739 586 420	597 862 140	1 793 586 420
580 217 964	1 740 653 892	598 017 462	1 794 052 386
580 219 746	1 740 659 238	598 021 746	1 794 065 238
581 974 602	1 745 923 806	598 174 602	1 794 523 806
581 974 620	1 745 923 860	598 174 620	1 794 523 860
582 017 964	1 746 053 892	598 201 746	1 794 605 238
582 179 640	1 746 538 920	598 217 460	1 794 652 380
582 197 460	1 746 592 380	598 476 012	1 795 428 036
584 976 012	1 754 928 036	598 476 021	1 795 428 063
584 976 021	1 754 928 063	598 476 102	1 795 428 306
584 976 102	1 754 928 306	598 476 120	1 795 428 360
584 976 120	1 754 928 360	598 476 201	1 795 428 603
584 976 201	1 754 928 603	598 476 210	1 795 428 630

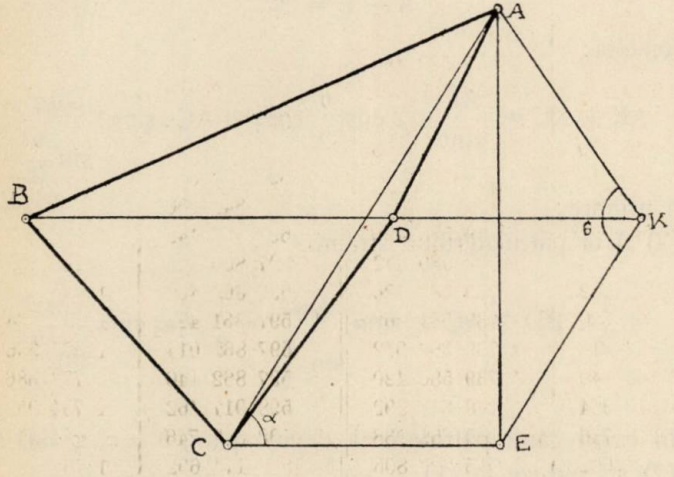
G-L GH. BUICLIU.

50. *Asupra ariei patrulaterului strâmb.*

Se cunoaşte formula care dă aria unui patrulater plan ABCD

$$(1) \qquad S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$$

unde d_1 şi d_2 sunt diagonalele AC şi BD, iar α e unghiul lor. Demonstraţia acestor formule pentru patrulaterul convex, concav sau complet, se poate face uşor ducând prin A şi C [resp. B şi D] paralele la BD [resp. AC]. Paralelogramul astfel construit e îndoitul patrulaterului, căci vârfurile paralelogramului sunt la aceeaşi depărtare de baza BC a triunghiului ABC [resp. DBC], ca şi vârfurile A [resp. D] ale triunghiurilor însăşi.



Formula (1) se poate generaliza la patrulaterul strâmb ABCD. Fie θ unghiul planelor ABD şi CBD. Planul dus din A perpendicular pe diagonala BD, o taie în K, şi taie paralela dusă din C la BD în E. Unghiul θ e tocmai AKE. Avem:

$$\text{aria ABD} = \frac{1}{2} \text{BD} \times \text{AK} \qquad \text{aria BCD} = \frac{1}{2} \text{BD} \times \text{KE}$$

$$\text{aria patrulaterului strâmb} = \frac{1}{2} \text{BD (AK} + \text{KE)}.$$

Dar, în triunghiul AKE avem:

$$\frac{AK}{\sin E} = \frac{KE}{\sin A} = \frac{AE}{\sin\theta} = \frac{AK+KE}{\sin A+\sin E}$$

$$= \frac{AK+KE}{2\sin\frac{A+E}{2}\cos\frac{A-E}{2}} = \frac{AK+KE}{2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{A-E}{2}}.$$

In triunghiul dreptunghiu CAE avem:

$$AE = AC\sin ACE = AC\sin\alpha,$$

unde α e unghiul diagonalelor AC şi BD. Să însemnăm încă:

$$A - E = 2\varphi.$$

Rezultă:

$$AK+KE = \frac{AE}{\sin\theta}.2\cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi = AC.\sin\alpha.\frac{\cos\varphi}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

şi prin urmare:

(2) Aria patrulaterului strâmb

$$= \frac{1}{2}.\ BD\times AC\times\sin\alpha\frac{\cos\varphi}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha\frac{\cos\varphi}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

In cazul când patrulaterul devine plan, $\theta=\pi$, $\varphi=0$ şi formula (2) se reduce la (1).

VIRGIL GHIŢESCU.

51. *O chestiune de prioritate.*

Propoziţia că *triunghiul pedal al unui punct pe prima elipsă a lui* STEINER *are o arie dublă triunghiului de referinţă,* pe care am dedus-o pe calea publicată în nota 36, G. M. XLIII, pag. 361 — a fost publicată anterior de D-l CEZAR COŞNIŢĂ în *Numerus,* problema 9.2481.

N. M.

52. *Notă asupra teoremei* PTOLOMEU.

Se ştie că proiecţiile focarului f al unei parabole (p), pe tangente, sunt colineare pe tangenta în vârf; fie deci τ_1, τ_2, τ_3,... τ_n n tangente ale unei parabole şi t_1, t_2,... t_n intersecţiile (τ_1, τ_2), (τ_2, τ_3),... (τ_n, τ_1), iar p_1, p_2, p_3,... p_n proiecţiile focarului pe tangente; se observă imediat că $p_i p_j = ft_i \cdot \sin(\tau_i, \tau_j)$ şi cum punctele p sunt colineare, verifică relaţia

$$p_1 p_2 + p_2 p_3 + \ldots + p_n p_1 = 0$$

sau

$$ft_1 \cdot \sin(\tau_1, \tau_2) + ft_2 \cdot \sin(\tau_2, \tau_3) + \ldots + ft_n \cdot \sin(\tau_n, \tau_1) = 0$$

deci: *dacă un poligon* (t) *este circumscris unei parabole* (p), *de focar* (f), *avem relaţia*

$$\Sigma ft \cdot \sin t = 0.$$

In particular, dacă $t_1 t_2 t_3$ este un triunghiu, f se află pe cercul circumscris, în plus, sinusurile sunt proporţionale cu laturele opuse, şi se obţine relaţia PTOLOMEU

$$ft_1 \cdot t_2 t_3 + ft_2 \cdot t_3 t_1 + ft_3 \cdot t_1 t_2 = 0.$$

N. N. MIHĂILEANU.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Institutului Român pentru Betoane, Construcţii şi Drumuri. Anul III. Nr. 1—3 Ianuarie—Martie 1938. Bucureşti.

Journal de mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 62. Nr. 17. 1 Iunie 1938. Paris.

Idem. Anul 62. Nr. 18. 15 Iunie 1938. Paris.

Mathesis, publicată de AD. MINEUR. Tom. LII. Nr. 5. Mai 1938. Bruxelles. Asupra patratelor curioase de V. THÉBAULT. O condiţie de continuitate exprimată cu media diferenţelor finite de ordin oarecare de G. VAN DER LYN. Remarcări asupra ecuaţiunilor algebrice neraţionale de GINO LORIA. Asupra centrelor de curbură succesive ale lănţişorului de egală rezistenţă de R. GOORMAGHTIGH. Asupra geometriei triunghiului şi tetraedrului de V. THÉBAULT.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVIII. Nr. 4. 15 Iunie 1938. Asupra lanţurilor bigrade de A. GLODEN. Permutări cu condiţiuni de C. C. TEODORESCU.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXIV. Nr. 1. Ianuarie-Martie 1938. Iaşi.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Anul 8. Nr. 7. Iulie 1938. Director M. KRAITCHIK. Cum se devenea inginer în 1690 de P. SERGESCU.

Ştiinţă şi Progres. Revista ştiinţifică a liceelor militare. Anul IV. Nr. 12. 20 Iunie 1938. Tg.-Mureş. Asupra teoremei lui PTOLOMEU de N. N. MIHĂILEANU. Câteva teoreme în legătură cu poligoanele regulate de I. V. MĂTIEŞ.

Suplimentul Gazetei Matematice. Exerciţii. Anul IV. Nr. 9. 1 Iunie 1938.

ALFRED MOESSNER. *Simultane Identitäten.* (Extras din Bulletin of the Calcutta Mathematical Society. Vol. XXVIII. Martie 1936).

ALFRED MOESSNER. *Zahlentheoretische Untersuchungen und Rezultate.* Calcutta 1935.

ALFRED MOESSNER. *Die Gleichung* $A_1^n + A_2^n + \ldots + A_z^n = B_1^n + B_2^n + \ldots + B_z^n$, $n = 1, 2 \ldots, 8$ *und verwandte Formen.* (Extras din The Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 41. Sendai, Japan. August 1935).

ALFRED MOESSNER. *Gewisse Fragen der Zahlentheorie.* Calcuta 1935.

ALFRED MOESSNER. *Verschiedene Diophantische Probleme und zahlentheoretische Theoreme.* Calcuta 1937.

ALFRED MOESSNER. *Einige Diophantische Probleme und zahlentheoretische Rezultate.* (Extras din Procedings of the Indian Academy of Sciences, Vol. VI. Nr. 4, Octomvrie 1937. City.

PAUL MONTEL. *Lecţiuni despre funcţiunile aproape periodice,* profesate la Universitatea din Cluj, redactate de TIBERIU POPOVICIU. Monografii matematice. Fascicola I. Cluj 1937.

W. SIERPIŃSKI. *Lecţiuni despre mulţimile analitice.* Fasc. II. Cluj. 1937.

TIBERIU POPOVICI. *Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame.* Fasc. III. Cluj 1937.

JEAN-LOUIS DESTOUCHES. *Essai sur la forme générale des théories physiques.* Fasc. V. Cluj 1938.

ION CUREA. *Determinarea polului ceresc pe cale astrofotografică.* Fasc. VI. Monografii matematice. Cluj 1938.

CERERI

278. Cine ne poate da date biografice pentru fostul profesor de matematici C. DUMITRESCU, care a funcţionat la Şcoala Comercială şi la Liceul Sf. Sava din Bucureşti?

I. I.

DIVERSE

a) Şedinţele Societăţii „Gazeta Matematică".

Joi 9 Iunie 1938 a avut loc o şedinţă obişnuită a Societăţii. S'a luat cunoştintă că Academia Română a premiat cu premiul „V. ADAMACHI" : Culegerea de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) de V. CRISTESCU, ediţia II-a revăzută şi adăugită de GH. TH. GHEORGHIU, publicată în Biblioteca *Gazetei Matematice.*

b) Sporirea Bibliotecii.

Aritmetică sau învăţătura socotelilor. Acum întâia oară întocmită în acest chip pentru folosul tinerilor din Seminarul Socolei. Eşii. In Tipografia Sf. Mitropolii 1839.

Donată de D-l Prof. T. STOICESCU.

Elemente de Matematică de Post. G. ASAKI Mădulari a mai multor Akademii. Partea I Aritmetica. Iaşii. La Institutul Albinei 1843.

Donată de D-l Prof. T. STOICESCU.

Elemente de algebră dupe APPELTAUER. Tradusă din latineşte cu oarecare modifikaţii de P. POENARU. Direktorul Şcoalelor Naţionale. Bukureşti, în Tipografia Kolegiului Sf. Sava 1841.

Donată de D-l Prof. T. STOICESCU.

Notă. Pe aceste trei cărţi D-l T. STOICESCU a scris următoarele:

„10 Noembrie 1937. Donată de Prof. TEODOR STOICESCU *Gazetei Matematice*; această carte a fost găsită în casele unchiului meu CONST. STOICESCU lăsată lui dela socrii MARIA şi ALECU ANDRONIK din Şoldana, jud. Iaşi".

CHRISTIANI HUGENII ΚΟΣΜΟΘΕΩΡΟΣ, sive De Terris Cœlestibus, earumque ornatu, *Conjecturæ ad* CONSTANTINUM HUGENIUM, Fratrem: GULIELMO III. *Magnæ Britanniæ regi, a secretis.* Editio Altera.

Hagæ-Comitum; Apud ADRIANUM MOETJENS, Bibliopolam. M.DC.XCIX. 2 : 4.

Donată de D-l Locot. C. D. IONESCU-ŢIU.

F. J. Exercices d'arithmétique. Paris 1894.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. A. LAISANT. Initiation mathématique. Paris 1907.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes par PAUL MONTEL, recueilles et rédigées par P. SERGESCO. 1932.

Donată de D-l P. SERGESCU, Profesor.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3557. *Se consideră un triunghiu* ABC *şi cercul* O *circumscris triunghiului. Din piciorul* H_b *al înălţimii* BH *să se construiască antiparalele, în unghiurile formate de latura* AC *cu diametrul punctului* B, *la laturile* BC *şi* BA. *Fie* B_a *şi* B_c *respectiv punctele unde aceste paralele întâlnesc diametrul punctului* B. *Să se determine apoi pe latura* AC *un punct* B' *astfel ca să avem:*

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{BB_a^n}}{\overline{BB_c^n}}, \tag{1}$$

(2*n* este un număr întreg).

Fie A' *şi* C' *punctele analoage pe laturile* BC *şi* AB.

α) *Să se găsească o metodă pur geometrică pentru determinarea punctului* B' *şi analoagele lui. Să se facă efectiv construcţiunile în cazurile* $n = 1$, $n = \frac{3}{2}$, $n = \frac{5}{2}$.

β) *Să se arate că dreptele* AA', BB', CC' *sunt concurente* (ω).

γ) *Insemnând cu* x, y, z *distanţele punctului de concurenţă* ω *la cele trei laturi* BC, CA, AB, *cu* a, b, c, r *laturile şi raza cercului înscris ale triunghiului* ABC, *să se stabilească relaţiunea*

$$\frac{1}{a^{2n}}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right] + \frac{1}{b^{2n}}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{y}\right] + \frac{1}{c^{2n}}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{z}\right] = 0.$$

O. N. ŢINO.

Soluţiune. Fie E a doua extremitate a diametrului BO al cercului O. Punctele B_a şi B_c de pe diametrul BOE le determinăm tăind acest diametru respectiv cu cercurile descrise pe $\overline{BC}$ şi $\overline{BA}$ ca diametre. (Căci avem: $\sphericalangle BB_a H_b = 180^0 - \sphericalangle EB_a H_b = 180^0 - \sphericalangle ACB$ şi $\sphericalangle BB_c H_b = \sphericalangle H_b AB \equiv \sphericalangle BAC$). Din triunghiurile dreptunghice BCE şi BAE, observând că CB_a şi AB_c sunt înălţimi, avem relaţiunile:

$$\overline{BB_a} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{BE}} = \frac{a^2}{2R} \quad \text{şi} \quad \overline{BB_c} = \frac{\overline{BA}^2}{\overline{BE}} = \frac{c^2}{2R},$$

cu care relaţiunea (1), care determină pe B′, devine:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}} = \frac{a^{2n}}{c^{2n}}. \qquad (1')$$

α) Pentru construirea punctului B′, vom lua ca punct de plecare proprietatea piciorului simedianei BT (T fiind punctul de întâlnire al tangentelor în A şi C la cercul O) pe latura corespunzătoare AC. Dacă însemnăm cu S acest punct, avem relaţiunea:

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{SC}} = \frac{c^2}{a^2}. \qquad (3)$$

[Vezi d. ex. F. G. M. pag. 1037].

Perpendiculara ridicată în S pe AC întâlneşte perpendicularele ridicate în A şi C, respectiv pe BA şi BC, în punctele M_3 şi N_3, şi avem:

$$\frac{\overline{AM_3}}{\overline{CN_3}} = \frac{c^3}{a^3}. \qquad (4)$$

In adevăr, observăm că asemănarea triunghiurilor (N_3SC şi $BH_b C$); (M_3SA şi $BH_b A$) dau relaţiunile:

$$\frac{\overline{CN_3}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{BH_b}} \text{ şi } \frac{\overline{AM_3}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{BH_b}},$$

din care deducem ţinând seamă de relaţiunea (3) pe următoarea:

$$\frac{\overline{AM_3}}{\overline{CN_3}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{CS}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{c^3}{a^3}.$$

Perpendicularele ridicate în M_3 şi N_3, respectiv pe AM_3 şi CN_3, determină punctele M_4 şi N_4 pe AC, astfel că avem:

$$\frac{\overline{AM_4}}{\overline{CN_4}} = \frac{c^4}{a^4}$$

[care rezultă din considerarea perechilor de triunghiuri (AM_3M_4 şi ABH_b); (CN_3N_4 şi CBH_b) dreptunghiuri şi asemenea]. In general, dacă am obţinut pe dreapta AC punctele M_{p-1} şi N_{n-1} astfel că:

$$\frac{\overline{AM_{p-1}}}{\overline{CN_{p-1}}} = \frac{c^{p-1}}{a^{p-1}},$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAŢIUNII

luăm pe dreptele AM_3 şi CN_3 segmentele $\overline{AM'_{p-1}}$ şi $\overline{CN'_{p-1}}$ egale cu $\overline{AM_{p-1}}$ şi $\overline{CN_{p-1}}$ şi ridicând perpendicularele respective în M'_{p-1} şi N'_{p-1}, ele determină pe AC segmentele $\overline{AM_p}$ şi $\overline{CN_p}$, astfel că:

$$\frac{\overline{AM_p}}{\overline{CN_p}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\overline{AM_{p-1}}}{\overline{CN_{p-1}}} \cdot \qquad (R)$$

Cunoscând lungimile segmentelor $\overline{AM_{2n}}$ şi $\overline{CN_{2n}}$ al căror raport este egal cu $\frac{c^{2n}}{a^{2n}}$, este de ajuns, pentru a avea punctul B′ cerut, să împărţim latura AC într'un raport:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}} = \frac{a^{2n}}{c^{2n}} = \frac{\overline{CN_{2n}}}{\overline{AM_{2n}}} \cdot$$

β) Având relaţiunile:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{b^{2n}}{c^{2n}}, \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{c^{2n}}{a^{2n}}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{a^{2n}}{b^{2n}},$$

deducem relaţiunea lui CEVA:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1,$$

şi ca urmare că dreptele AA′, BB′, CC′ sunt concurente.

γ) ω fiind punctul comun dreptelor AA′, BB′, CC′ şi y distanţa lui la latura AC, însemnând cu h_b înălţimea triunghiului ABC corespunzătoare laturei AC, avem imediat:

$$\frac{y}{h_b} = \frac{\overline{B'\omega}}{\overline{B'B}} \cdot \qquad (6)$$

Pentru calculul lui $\frac{\overline{B'\omega}}{\overline{B'B}}$, considerăm triunghiul ABB′ şi transversala C′ωC şi scriind relaţiunea lui MENELAUS, deducem:

$$\frac{\overline{B'\omega}}{\overline{\omega B}} = \frac{a^{2n}c^{2n}}{a^{2n}b^{2n} + b^{2n}c^{2n}},$$

iar din aceasta:

$$\frac{\overline{B'\omega}}{\overline{B'B}} = \frac{a^{2n}c^{2n}}{a^{2n}b^{2n}+b^{2n}c^{2n}+c^{2n}a^{2n}}.$$

Avem imediat:

$$\frac{1}{b^{2n}y} = \frac{1}{h_b}\left(\frac{1}{a^{2n}}+\frac{1}{b^{2n}}+\frac{1}{c^{2n}}\right). \qquad (7)$$

Scriind şi relaţiunile analoage şi însumându-le, avem, ţinând seamă de relaţiunea cunoscută:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c},$$

relaţiunea cerută pusă sub forma:

$$\sum \frac{1}{a^{2n}}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{x}\right] = 0.$$

Au dat soluţiuni bune problemei, Domnii: N. N. MIHĂILEANU (Constanţa, 1932) şi ERMIL N. ALBEAŢĂ (Lic. Piatra Neamţ, 1929).

Observare. Pentru stabilirea ultimei relaţiuni Domnul ERMIL N. ALBEAŢĂ a folosit coordonatele baricentrice, iar Domnul N. N. MIHĂILEANU relaţiunea lui VAN AUBEL.

De altminteri, aceste două soluţiuni sunt singurele primite la această problemă uşoară.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3755. *Laturile unui unghiu* xoy *taie pe două drepte* D şi D' *două segmente* $\overline{AB}$ *şi* $\overline{A'B'}$. *Fie* M *şi* M' *două puncte luate respectiv pe* D *şi* D'. *Să se arate că relaţiunea:*

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} : \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$$

este necesară şi suficientă ca dreapta MM' *să treacă prin vârful* O.

Ce devine această relaţiune, când dreptele D *şi* D' *sunt paralele sau antiparalele.*

Consecinţe.

O. N. ŢINO.

Soluțiune. Condițiunea este necesară. Să presupunem că dreapta MM' trece prin punctul O și să ducem, în acest caz, prin punctele A' și B' paralele la latura AB, care întâlnesc respectiv pe MM' în C' și D'. Din triunghiurile asemenea AMO, A'C'O și BMO, B'D'O avem relațiunile:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \tag{1}$$

și

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{B'D'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}, \tag{2}$$

deci, prin împărțirea lor, relațiunea:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} : \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'D'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} : \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}. \tag{3}$$

Dar, triunghiurile asemenea A'C'M' și B'D'M' dau:

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'D'}} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{B'M'}}. \tag{4}$$

Comparând relațiunile (3) și (4), obținem relațiunea dată:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} : \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}. \tag{R}$$

Condițiunea este suficientă. Să presupunem că punctele M și M' luate respectiv pe AB și A'B' îndeplinesc condițiunea (R) și că dreapta MM' nu trece prin punctul O. In acest caz, fie M'_1 punctul unde OM taie pe A'B'. Avem deci, pentru punctul M'_1, relațiunea necesară îndeplinită:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{M'_1A'}}{\overline{M'_1B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} : \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}; \tag{R_1}$$

dar atunci urmează să avem:

$$\frac{\overline{M'_1A'}}{\overline{M_1B'}} = \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}},$$

relațiunea care este imposibilă câtă vreme M'_1 este distinct de punctul M'.

Particularizând dreptele D şi D' în două drepte paralele, vedem că proprietatea de mai sus generalizează *proprietatea unui fascicol de trei drepte concurente care întâlnesc două drepte paralele*, şi reciproca ei.

In cazul când dreptele D şi D' sunt antiparalele în unghiul *xoy*, relaţiunea devine:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \left(\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\right)^2 .$$

Observarea I-a. Deoarece demonstraţiunea de mai sus este valabilă în toate cazurile de figură, particularizând-o găsim multe din teoremele importante, drept consecinţe.

Exemplu, presupunând că punctul B' coincide cu B, obţinem importanta teoremă a lui MENELAUS, iar ca urmare teorema lui CEVA. Tot astfel cosiderând două transversale trecând prin punctul O, anume $OM_1'M_1$ şi $OM_2'M_2$, deducem importanta proprietate geometrică care caracterizează raportul anarmonic al unui fascicol de patru drepte concurente. (Pentru desvoltări să se vadă articolul pe care l-am publicat în Nr. 1 al *Revistei Matematice din Timişoara*, an 1938).

Observarea II-a. Niciun corespondent din cei cari au rezolvat complet problema, n'a dat o soluţiune elementară şi din această cauză n'a dat peste consecinţele cerute de enunţul problemei.

Au rezolvat problema, cu ajutorul teoremei lui MENELAUS, D-ra MARIA ELEFTERESCU şi D-nii: JUSTIN N. VÂLCEANU (absolvent, Tg.-Jiu); N. N. MIHĂILEANU (elev, Constanţa); CEZAR COŞNIŢĂ (Bârlad); cu ajutorul raportului anarmonic al unui fascicol de patru drepte, Domnii: ALEXE ARSAVSKI, MARIUS MARGULIUS; cu ajutorul geometriei analitice: D-ra MARIA ELEFTERESCU şi Domnul MIRCEA I. GROSSU (Liceul Carol I, Craiova).

Observarea III-a. In soluţiunea sa, Domnul N. N. MIHĂILEANU arată că proprietatea poate fi enunţată şi sub forma: *Dacă într'un patrulater complet* (BAA'B'CO) *una din laturi* (*trecând prin* O) *se roteşte în jurul lui* O, *avem relaţiunea:*

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} : \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$$

OBB' *şi* OMM' *fiind două poziţiuni ale laturei variabile.*

Cum am arătat însă mai sus, proprietatea dată face trecerea dela un fascicol de drepte concurente care întâlneşte două drepte paralele la un fascicol de drepte concurente, care întâlneşte două drepte oarecare.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3839. *Intre elementele unui triunghiu oarecare avem relaţia :*

$$S=\frac{1}{2}Rr\left[\cos A\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}-1\right)+\cos B\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right.$$

$$\left.\times\left(\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}-1\right)+\cos C\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}-1\right)\right],$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

N. O. ZAHARIA.

Soluţie dată de D-nii : N. N. MIHĂILEANU, NEGREA A. MIRCEA-LEONTE, NUBĂR A. ACIKGHEOZIAN, V. IONESCU, ŞT. E. OLTEANU, G. SÂMBOTIN şi J. VÂLCEANU.

Folosind relaţia cunoscută [1])

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

avem succesiv

$$\cos A\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}-1\right)=\cos A\left(\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos A}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin 2A}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

şi cum

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C,$$

rezultă că partea din dreapta a relaţiei din enunţ este egală cu

$$\frac{1}{2}Rr\,\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

şi înlocuind pe $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\cos\frac{C}{2}$ în funcţie de laturi, găsim

---

1) Formulele întrebuinţate în soluţia acestei probleme se găsesc în Volumul Nr. 12 din *Biblioteca Gazetei Matematice.*

mai departe

$$4Rr\frac{pS}{abc} = 4Rr\frac{pS}{4RS} = rp = S.$$

Observaţie. S'au mai primit şi alte soluţii dela D-nii: N. ALDEA, I. C. BOIAN, A. C. CONSTANTINESCU, C. COŞNIŢĂ, VL. I. CRIVĂŢ, C. DAN, N. DONCIU, R. N. DUMITRAŞCU, A. C. GHEORGHIU, P. I. GHIŞOIU, A. HALPERIN, H. P. IONESCU, C. GH. LUPESCU, M. MARGULIUS, E. G. MILLEA, M. D. MOTOC, TH. N. PANAITE, I. C. PAREPEANU, I. GH. POPA, C. N. POPESCU, CR. I. RÂMNICEANU, M. VELEA, N. N. VELICESCU şi TITU GH. VELICESCU.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4166 [1]). *Să se determine funcţiunea:*

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + \alpha x + \beta},$$

ştiind că:

$$f(-1) = -2,\ f(2) = 1,\ f(3) = \frac{4}{5},\ f(4) = \frac{7}{9},$$

şi apoi să se calculeze expresia:

$$E = x^2[f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)] + x[3f(x+1) - 2f(x) - f(x-1)] + 2[2f(x) - f(x-1)].$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-l N. N. ALDEA. Scriind condiţiile din enunţ găsim că a, b, α, β sunt soluţii ale sistemului de ecuaţii:

$$\begin{aligned} a - b + 2\alpha - 2\beta &= 3, \\ 2a + b - 2\alpha - \beta &= 0, \\ 15a + 5b - 12\alpha - 4\beta &= -9, \\ 36a + 9b - 28\alpha - 7\beta &= -32, \end{aligned}$$

sistem care rezolvat ne dă:

$$a = -1\ ,\ b = 2\ ,\ \alpha = 1\ ,\ \beta = -2.$$

---

1) Enunţ rectificat.

Aşa dar:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x - 2}.$$

Să trecem acum la calculul lui E. Grupând termenii convenabil găsim succesiv:

$$E = (x^2+3x)f(x+1) - 2(x^2+x-2)f(x) + (x^2-x-2)f(x-1)$$

$$= (x^2+3x)\frac{(x+1)^2-(x+1)+2}{(x+1)^2+(x+1)-2} - 2(x^2+x-2)\frac{x^2-x+2}{x^2+x-2}$$

$$+ (x^2-x-2)\frac{(x-1)^2-(x-1)+2}{(x-1)^2+(x-1)-2} = (x^2+x+2)$$

$$-2(x^2-x+2) + (x^2-3x+4)$$

$$\therefore \quad E = 2.$$

Observare. Din cauza unei greşeli (nu ştiu dacă a fost a mea sau a zeţarului) în enunţul problemei s'a publicat $f(-1) = 2$ în loc de -2. Din această cauză ceilalţi rezolvitori, cari au rezolvat foarte bine problema, şi anume D-nii: CONST. CHIRIAC, D. MAVRODIN şi AL. D. STOICA au găsit pentru E o expresie foarte complicată.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4385. *Să se găsească toate polinoamele de gr. II care satisfac relaţiei:*

$$P^2(x+1) - P(x)\,P(x+2) = 2P(x+1).$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-ra G. BĂLĂCEANU şi de D-nii: V. CEAUŞESCU, V. CSEKE, PANAIT C. MAZILU, N. D. ŞTEFĂNESCU, T. STOICESCU şi I. I. ŢIŢEICA.

Fie:

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Vom avea:

$$P(x+1) = ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c),$$

$$P(x+2) = ax^2 + (4a+b)x + (4a+2b+c).$$

Inlocuind aceste valori în relaţia din enunţul problemei, găsim, după ce am făcut toate calculele,

$$2a^2x^2 + 2a(2a+b)x + (a^2+b^2+2ab-2ac) = 2ax^2$$
$$+ 2(2a+b)x + 2(a+b+c)$$

relaţie care trebue să aibă loc pentru orice valoare a lui x, adică trebuie să fie o identitate. Se ştie că în acest caz trebue să avem:

$$2a^2 = 2a,$$
$$2a(2a+b) = 2(2a+b),$$
$$a^2+b^2+2ab-2ac = 2(a+b+c).$$

Cum a este diferit de zero, prima relaţie dă $a = 1$. Pentru această valoare a doua relaţie devine o identitate, iar a treia

$$b^2 - 4c - 1 = 0.$$

Rezultă deci că polinoamele care răspund problemei sunt

$$P(x) = x^2 + bx + \frac{b^2-1}{4}.$$

Notă. Domnul AL. D. STOICA a dat o soluţie particulară căutând numai polinoamele de forma $x^2 + bx + c$ care satisfac relaţiei din enunţ.

S'au mai primit şi alte soluţii greşite.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4577. *Să se arate că expresia:*

$$X = \frac{1 + x^{a_i} + x^{2a_i} + \ldots + x^{(k_i-1)a_i}}{(1+x+x^2+.+x^{a_1-1})(1+x+.+x^{a_2-1}).(1+x+.+x^{a_{i-1}-1})(1+x+.+x^{a_{i+1}-1}).(1+x+.+x+^{a_n-1})}$$

(*unde* $k_i = a_1a_2\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n$) *are aceeaşi valoare oricare ar fi* i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

† N. BOTEA.

Soluţie dată de D-ra ALEXANDRA AL. VASILESCU (Lic. Carmen Sylva, Timişoara) şi de D-nii: D. MAVRODIN, PAUL DOBRESCU (elev Şcoala pregătitoare de ofiţeri), I. ŢIŢEICA (student), VICTOR FLORESCU (Lic. militar N. Filipescu) şi MIRCEA A. VASILESCU-STABU (Lic. Mihai Viteazu, Alba Iulia).

BIBLIOTECA CENTRALA „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

Numărătorul expresiei însumat, este

$$\frac{x^{k_i a_i} - 1}{x^{a_i} - 1},$$

iar numitorul,

$$\frac{(x^{a_1} - 1)(x^{a_2} - 1) \ldots (x^{a_{i-1}} - 1)(x^{a_{i+1}} - 1) \ldots (x^{a_n} - 1)}{(x-1)^{n-1}},$$

deci

$$X = \frac{(x^{k_i a_i} - 1)(x-1)^{n-1}}{(x^{a_1} - 1)(x^{a_2} - 1) \ldots (x^{a_{i-1}} - 1)(x^{a_i} - 1)(x^{a_{i+1}} - 1) \ldots (x^{a_n} - 1)}$$

$$= \frac{(x-1)^{n-1}(x^{a_1 a_2 \ldots a_n} - 1)}{(x^{a_1} - 1)(x^{a_2} - 1) \ldots (x^{a_n} - 1)}.$$

Independenţa de i este evidentă.

C. I. B.

PROBLEMA 4626. *Intr'un triunghiu* ABC *se consideră dreapta* AM *aşa fel ca*

$$\text{Supr. ABM} = m \text{ Supr. AMC}.$$

In mod analog se determină dreptele BN *şi* CP. *Să se arate că*:

$$1^0. \quad \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2 = \frac{m^2 + m + 1}{(m+1)^2}(a^2 + b^2 + c^2);$$

$$2^0. \quad \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \frac{m-1}{m+1}(\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C),$$

unde α *este unghiul ce* AM *face cu* BC, *etc.*

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-ra P. CĂLINESCU şi de D-nii: R. V. APOSTOL, I. I. BUZINCU, P. DOBRESCU, V. ECKSTEIN, V. L. FLORESCU, I. V. LITINSKI, E. MARCOVICI, GR. MARTEŞ, E. S. MODÂLCĂ, M. L. A. NEGREA, C. V. PANTELIMON, M. D. POPA, TR. PREDOIESCU, N. D. ŞTEFĂNESCU şi I. I. ŢIŢEICA.

1°. Triunghiurile ABM şi AMC având aceeaşi înălţime, putem scrie:

$$\frac{\text{Supr. ABM}}{\text{Supr. AMC}} = \frac{BM}{MC} = m$$

şi cum: $BM + MC = a$, găsim imediat

$$BM = \frac{ma}{m+1}, \quad MC = \frac{a}{m+1}.$$

Din triunghiul ABM scoatem:

$$\overline{AM}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{BM}^2 - 2BA \cdot BM \cos B$$

$$= c^2 + \frac{m^2 a^2}{(m+1)^2} - \frac{2mac}{m+1} \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

deoarece se ştie că într'un triunghiu oarecare avem:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$

Făcând toate calculele găsim că:

$$\overline{AM}^2 = \frac{m(m+1)b^2 + (m+1)c^2 - ma^2}{(m+1)^2}$$

şi analog se găseşte că

$$\overline{BN}^2 = \frac{m(m+1)c^2 + (m+1)a^2 - mb^2}{(m+1)^2},$$

$$\overline{CP}^2 = \frac{m(m+1)a^2 + (m+1)b^2 - mc^2}{(m+1)^2}.$$

Rezultă că:

$$\overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2 = \frac{m(m+1)+(m+1)-m}{(m+1)^2}(a^2+b^2+c^2)$$

$$= \frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}(a^2+b^2+c^2).$$

2°. Dacă notăm prin: α = ungh. AMB, atunci avem:

$$\text{Supr. AMB} = \frac{\overline{BM}^2 \sin B \sin\alpha}{2\sin(B+\alpha)}, \quad \text{Supr. AMC} = \frac{\overline{CM}^2 \sin C \sin(180^0-\alpha)}{2\sin(180^0-\alpha+C)};$$

înlocuind aci pe BM şi CM prin valorile găsite mai sus la Nr. 1 şi scriind că prima suprafaţă este de m ori a doua, găsim că:

$$\frac{m \sin B}{\sin(B+\alpha)} = \frac{\sin C}{\sin(\alpha - C)},$$

sau

$$m \sin B(\sin\alpha \cos C - \sin C \cos\alpha) = \sin C(\sin B \cos\alpha + \sin\alpha \cos B),$$

relaţie care împărţită prin produsul: sinB sinC sinα ne dă:

$$m(\operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg}\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg} B;$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{m}{m+1}\operatorname{cotg} C - \frac{1}{m+1}\operatorname{cotg} B.$$

In mod analog găsim:

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{m}{m+1}\operatorname{cotg} A - \frac{1}{m+1}\operatorname{cotg} C,$$

$$\operatorname{cotg}\gamma = \frac{m}{m+1}\operatorname{cotg} B - \frac{1}{m+1}\operatorname{cotg} A.$$

Aceste relaţii adunate parte cu parte ne dau imediat a doua formulă din enunţ.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4682. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sqrt[n]{(1+x)^2} - \sqrt[n]{(1-x+x^2)^2} = \sqrt[n]{1+x^3}.$$

† N. BOTEA.

Impărţind ambii membri cu $\sqrt[n]{1+x^3}$ şi simplificând, se obţine:

$$\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x+x^2}} - \sqrt[n]{\frac{1-x+x^2}{1+x}} = 1.$$

Notând

$$\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x+x^2}} = y,$$

ecuaţia devine

$$y - \frac{1}{y} = 1$$

sau

$$y^2 - y - 1 = 0,$$

cu rădăcini

$$y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Dacă

$$\frac{1}{2^n}(1 \pm \sqrt{5})^n = a, \qquad \frac{1+x}{1-x+x^2} = a,$$

de unde

$$ax^2 - (a+1)x + a - 1 = 0,$$

deci

$$x = \frac{(a+1) \pm \sqrt{1+6a-3a^2}}{2a}.$$

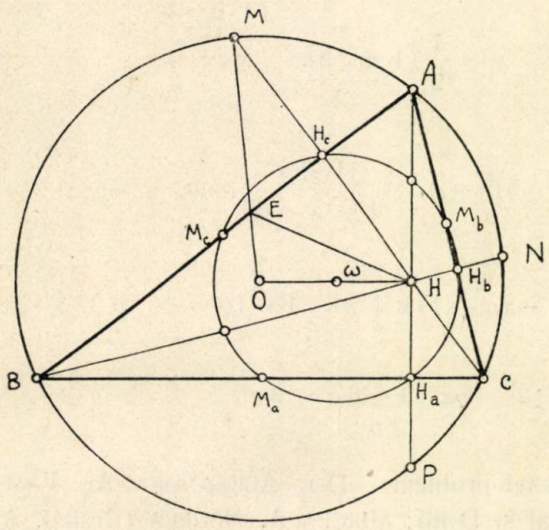
Au soluţionat astfel problema: D-ra ALEXANDRA AL. VASILESCU (Lic. Alba-Iulia) şi D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila), A. CĂLINESCU (Tg.-Mureş), N. I. MILU (Şcoala pregătitoare de ofiţeri, Bucureşti), G. POPOVICIU (elev inginer, Bucureşti), R. APOSTOL (Liceul militar N. Filipescu), M. F. AMĂRĂŞTEANU (bacalaureat Craiova), M. A. VASILESCU-STABU (Lic. Mihai Viteazul, Alba-Iulia) şi E. MARCOVICI (Iaşi).

C. I. B.

PROBLEMA 4865. *Se consideră triunghiurile* ABC *înscrise într'un cerc cu centrul* O *şi având acelaşi ortocentru* H. *Să se arate că triunghiurile* ABC *sunt circumscrise la o elipsă cu focarele* O *şi* H *şi având ca cerc director cercul dat. Să se arate că cercul principal al elipsei este cercul fix al celor nouă puncte (al lui* EULER) *al triunghiurilor* ABC.

N. ABRAMESCU.

Soluţie dată de D-nii: APOSTOL RADU, AURELIAN CĂLINESCU, AUREL CORNĂŢEANU, DUMITRU CIOC, VICTOR FLORESCU, ADRIAN GHEORGHIU, IACOB GOLDBERG, M. C. POSTELNICESCU, ADOLF ŞAICHIN, I. STREDER, NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU, DORIN TEODORESCU, SANDU TURCU, M. AL. VASILESCU-STABU.



Se ştie (T. LALESCU, La Géométrie du triangle, p. 3) că simetricele ortocentrului H în raport cu laturile triunghiului ABC sunt pe cercul O circumscris triunghiului. De asemenea, mijloacele laturilor, picioarele înălţimilor, mijloacele distanţelor dela vârfuri la ortocentru, sunt nouă puncte aşezate pe un cerc a lui EULER (cercul celor nouă puncte) cu centrul ω în mijlocul distanţei OH între centrul O şi ortocentrul H; iar raza sa este jumătatea razei R a cercului circumscris O.

M fiind simetricul lui H faţă de AB, M este pe cercul circumscris. Insemnând cu E intersecţia razei OM cu AB, avem EM = EH,

$$EO + EH = EO + EM = OM = R = \text{const.}$$

Deci E este pe elipsa cu focarele O şi H, cu lungimea axei mari OM = R. Aşa dar, după definiţie, punctul M descrie cercul director al elipsei relativ la focarul O; deci cercul circumscris triunghiului ABC este un cerc director al elipsei.

Din cauză că unghiurile MEA = AEH, iar E fiind pe elipsă şi H un focar, urmează că EA este bisectoarea exterioară a unghiului OEH format de razele vectoare EO şi EH. Deci, EA este tangenta în E la elipsă, iar laturile triunghiului ABC sunt tangente la această elipsă.

După cum se vede piciorul H_c al înălțimii din C este proiecția focarului H pe tangenta în E la elipsă; deci H_c este pe cercul principal al elipsei. Dar H_c este pe cercul celor nouă puncte al triunghiului ABC, de unde rezultă că cercul celor nouă puncte este cercul principal al elipsei.

Observare. D-l ADRIAN GHEORGHIU, bazându-se pe proprietățile elipsei dă o nouă demonstrare a teoremei lui EULER, că picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor, mijloacele distanțelor dela vârfuri la ortocentru sunt pe cercul celor nouă puncte.

PROBLEMA 4906. *Se dă un paralelogram* ABCD *a cărui bază* AB *este fixă și a cărui înălțime este de o mărime constantă. Pe laturile acestui paralelogram ca diametre se descriu în afară semicercuri. Fie* M_1, M_2, M_3, M_4 *mijloacele acelor semicercuri construite respectiv pe* AD, DC, CB *și* BA. *Se cere:*

1°. Să se arate că $M_1M_2M_3M_4$ *este un pătrat;*

2°. Știind că DC *alunecă pe paralela dusă la* AB *la depărtarea constantă considerată, să se determine locurile geometrice ale punctelor* M_1 *și* M_2 *precum și al centrului de greutate al triunghiului* $M_1M_2M_3$.

VIRGIL GHIȚESCU.

1°. Notăm cu O_1, O_2, O_3, O_4 centrele semicercurilor în ordinea specificată prin enunț. Fie O și O′ respectiv intersecțiile dreptelor (M_1M_3, O_1O_3) și (M_2M_4, O_2O_4).

Avem: triunghiu M_1OO_1 = tr. M_3OO_3 deoarece au $M_1O_1 = M_3O_3$, unghiurile din O opuse la vârf și $\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_3$. Din motive asemănătoare mai avem tr. $M_2O'O_2$ = tr. $M_4O'O_4$. Prin egalitatea primelor două triunghiuri se deduce că O este centrul paralelogramului dat; de asemeni din egalitatea celorlalte două avem că O′ este centrul aceluiași paralelogram. In consecință, O și O′ sunt confundate.

Cele patru triunghiuri menționate sunt încă și egale toate între ele deoarece:

$$M_1O_1 = OO_2 = M_3O_3 = OO_4$$

$$O_1O = M_2O_2 = O_3O = M_4O_4$$

$$\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2 = \sphericalangle O_3 = \sphericalangle O_4.$$

Egalitatea acestor patru triunghiuri procură:

$$M_1O = M_2O = M_3O = M_4O.$$

Apoi:

$$\sphericalangle M_2OM_1 = \sphericalangle O_2OO_1 - \sphericalangle O_2OM_2 - \sphericalangle M_1OO_1$$

$$= \sphericalangle O_2OO_1 - (\sphericalangle M_1 + \sphericalangle M_1OO_1) = 180^0 - A - (180^0 - 90^0 - A) = 90^0.$$

Patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$ în care diagonalele se taie în patru părţi egale şi care este şi ortodiagonal, este un pătrat.

2°. Proiecţia lui A pe DC, A', se găseşte pe cercul O_1 iar $\sphericalangle M_1A'A = 45^0$; deci locul geometric al lui M_1 este o dreaptă trecând prin A' şi făcând cu A'A un unghiu de 45°.

In mod asemănător deducem că locul geometric al lui M_3 este o dreaptă care trece prin B', proiecţia lui B pe DC şi face cu B'B un unghiu de 45°.

Coborîm perpendiculara M_2F pe O_1O_3. E fiind intersecţia paralelei dusă prin G la O_1O_3, al treilea loc căutat este chiar această paralelă deoarece avem:

$$EF = \frac{1}{3}M_2F = \frac{1}{3}(M_2O_2 + O_2F) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AA'\right) = \text{C-tant.}$$

Au rezolvat problema D-nii: STREDER ION (Lic. mil. Iaşi), BODNĂRESCU M. HORIA (Sem. ped. Buc.), OCT. GH. RĂDULESCU (Lic. mil. N. Filipescu), CONSTANTIN V. P., POPA D. MIRCEA (Lic. mil. Iaşi), M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. Alba-Iulia), POPIŞCĂ V. MIRCEA (Lic. mil. Cernăuţi).

Soluţii complete analitice au dat: D-şoarele MIOARA I. CRĂCIUNESCU şi ANA C. GEREANU, studente, precum şi D-l JOE SEGAL (cl. VII-a Lic. Libros).

Alte soluţiuni au dat D-nii: AUREL I. CORNĂŢEANU şi NIC. D. ŞTEFĂNESCU (cl. VIII-a Lic. mil. N. Filipescu).

Observaţiuni: D-l M. VASILESCU-STABU observă că figura $M_1M_2M_3M_4$ rămânând mereu asemenea cu ea însăşi şi având trei puncte care se mişcă pe trei drepte fixe, orice punct al ei se mişcă pe o dreaptă fixă.

D-l OCT. GH. RĂDULESCU face mai multe consideraţiuni; poate reveni asupra lor, expunându-le sub forma unei note.

V. GH.

PROBLEMA 4916. *Orice număr nedivizibil prin 2, 3 şi 5 admite o infinitate de multipli de forma 111...1.*

P. SERGESCU.

Fie N un număr nedivizibil prin 2 şi 5. Fracţia $\frac{1}{N}$ e periodică simplă deci se poate pune sub forma $\frac{P}{99\ldots9}$. Rezultă:

$$(1) \qquad N \times P = 99\ldots9 = 9 \times 111\ldots1.$$

Cum N e prim cu 3 prin enunţ, rezultă că N împarte pe $111\ldots1$.

Dacă acest multiplu al lui N, de forma $111\ldots1$, are p cifre, orice număr:

$$(10^{kp} + 10^{(k-1)p} + \ldots + 10^{2p} + 10^{p} + 1) \cdot (111\ldots1)$$

care e de forma $111\ldots1$, e multiplu de N. Cum k poate lua orice valoare întreagă, rezultă că există o infinitate de multipli ai lui N, de forma cerută.

De fapt, condiţia ca N să nu fie divizibil prin 3 *nu e necesară*. Chiar în ziua apariţiei problemei propuse (15. II. 1938), D-l GENERAL GH. BUICLIU mi-a atras atenţia asupra acestui fapt.

In adevăr, numărul $\mathfrak{N}$, format din $9p$ cifre egale cu 1 se împarte exact cu $99\ldots9$, unde cifra 9 e luată de p ori. Câtul lui $\mathfrak{N}$ prin numărul care se scrie cu p cifre 1 e format din nouă grupe de câte p cifre $00\ldots01$. Dar acest cât are suma cifrelor 9, deci se împarte cu 9. Ca atare $\mathfrak{N}$ se împarte cu $9 \times 111\ldots1$, unde 1 e scris de p ori, deci cu $N \times P$. $\mathfrak{N}$ e un multiplu al lui N, de forma dorită. Toate numerele

$$(10^{9pk} + 10^{9p(k-1)} + \ldots + 10^{18p} + 10^{9p} + 1)\,\mathfrak{N}$$

sunt multipli de N de forma $111\ldots1$, chiar când N nu e prim cu 3.

D-l GENERAL GH. BUICLIU mi-a arătat că problema 4916 este foarte înrudită, aproape identică, cu problema 899 propusă de TR. LALESCU şi rezolvată în G. M. XI. pag. 41, cu enunţul: *Orice număr prim afară de 2 şi 5 admite neapărat un multiplu de forma 11...1.* Eu nu cunoşteam problema 899 când am propus pe 4916. TR. LALESCU demonstrează *direct*, pe o cale minunată, problema 899 şi *deduce* de acolo că orice fracţie periodică simplă are o fracţie generatoare cu numitorul de forma $99\ldots9$. In soluţia de mai sus a problemei 4916 se face raţionamentul invers: plecând dela forma cunoscută

a numitorului fracției generatoare, se deduce proprietatea cerută de TR. LALESCU.

Au rezolvat problema 4916, D-nii: P. BOLDESCU și V. HERMAN (student, Cluj).

D-l P. BOLDESCU a dedus proprietatea mai generală că: *Dacă* N *este prim cu baza unui sistem de numerație și cu cea mai mare cifră a bazei, atunci* N *are o infinitate de multipli de forma* $11\ldots11$.

Demonstrația D-lui P. BOLDESCU se bazează pe relația

$$10^{\varphi(N)} - 1 = [10^{\varphi(N)-1} + 10^{\varphi(N)-2} + \ldots + 10 + 1] \times 9 = 11\ldots11 \times 9$$

unde primul membru este divizibil prin N, conform teoremei lui FERMAT, și unde $\varphi(N)$ este indicatorul lui N.

P. S.

PROBLEMA 4919. *Să se construiască triunghiul* ABC, *dreptunghic în* A, *cunoscând lungimea bisectoarei* BB′ *și poziția punctelor* C *și* B′.

G-L GH. BUICLIU.

Problema comportă examinarea a două cazuri diferite:

1°. Când B′ este piciorul bisectoarei interioare a unghiului B, pentru care avem de construit un triunghiu ca ABC.

2°. Când B′ este piciorul bisectoarei exterioare, pentru care avem de construit un triunghiu ca A_1B_1C.

Fie D, D_1 intersecția lui BB′ sau B_1B' cu perpendiculara în C pe AC și E, E_1 intersecțiile acelorași drepte cu cercul cu centrul în C și cu raza CB′, — cerc care taie în B″ pe AC. Rezultă că unghiul B′EB″ este drept și că proiecția C′ a lui C pe BB′ este la mijlocul lui B′E:

$$\overline{CB'} = \overline{CE}.$$

Unghiurile BDC, ABD sunt egale ca alterne interne, iar ultimul fiind egal cu DBC prin construcție, triunghiul BCD este isoscel și deci C′ este mijlocul lui BD, de unde rezultă:

$$BB' = ED.$$

La fel se arată că

$$B_1B' = D_1E_1.$$

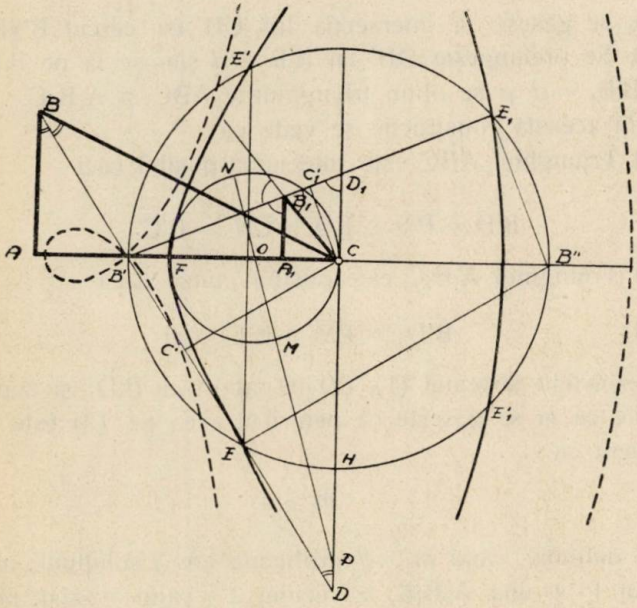
Dacă se notează cu d lungimea dată a bisectoarei BB′ pentru cazul 1° sau B_1B' pentru cazul 2°, se vede din cele de până aici că

$$(1) \qquad B'D - B'E = B'E_1 - B'D_1 = d.$$

Unghiurile DEB″, DCB″ și D_1E_1B'' fiind drepte, patrulaterele B″CED și $B''C_1D_1E_1$ sunt inscriptibile și atunci

$$(2) \qquad B'D \times B'E = B'D_1 \times B'E_1 = 2m^2$$

unde m este valoarea dată a lui CB′.



Relațiunile (1) și (2), reduc problema la următoarea, cunoscută în toate tratatele de geometrie: *Să se construiască două lungimi cunoscând diferența lor* d *și produsul lor* 2m².

Iată acum construcția triunghiului cerut. Se construește cercul O de diametru CF = d. Pentru simplificarea construcțiilor și pentru că punctele C_1B' sunt date, se ia O pe CB′.

Fie H intersecția perpendicularei în C pe CB′ cu cercul de centru C și rază CB′. Pe CH se ia punctul P așa încât

$$\overline{PC} = \overline{HB'} = \sqrt{2CB'^2} = m\sqrt{2}.$$

Fie M şi N intersecţiile lui PO cu cercul O. Avem de pe figură

$$\overline{PN} \times \overline{PM} = \overline{PC}^2 = 2m^2$$

$$\overline{PN} - \overline{PM} = \overline{MN} = d.$$

Comparând cu (1) şi (2) se vede că:

$$\overline{B'D} = \overline{PN} = \overline{B'E_1}$$

$$\overline{B'E} = \overline{PM} = \overline{B'D_1}$$

D şi D_1 se găsesc la intersecţia lui CH cu cercul B'(PN) sau B'(PM). Se prelungeşte DB' cu $B'B = d$ sau se ia pe $B'D_1$ lungimea $B'B_1 = d$ şi se obţin triunghiurile ABC şi A_1B_1C.

Din această construcţie se vede că

a) Triunghiul ABC este totdeauna posibil căci

$$\overline{B'D} = \overline{PN} > \overline{PO} > \overline{CH} = \overline{B'C}.$$

b) Triunghiul A_1B_1C este posibil numai dacă

$$\overline{B'D_1} = \overline{PM} > \overline{B'C} = m. \tag{3}$$

Rezolvând sistemul (1), (2) în raport cu $B'D_1$ şi comparând rădăcinile cu m se găseşte că pentru a avea pe (3) este necesar şi suficient ca

$$m > d.$$

In definitiv, când $m > d$ problema are 2 soluţiuni: una ABC a cazului 1° şi una A_1B_1C a cazului 2°; când $m \leqslant d$, problema are o singură soluţie, corespunzătoare cazului 1°.

Observaţiuni. 1. D-l Gh. Bazacov, (Prof. T.-Severin) a dat o foarte bună soluţie geometrică analoagă, dar nu a examinat decât cazul când BB' este bisectoară interioară.

2. Fie x lungimea B'A şi 2β valoarea unghiului B. Avem

$$\frac{BA}{BC} = \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta.$$

Dar triunghiul B'AB dă

$$\sin\beta = \frac{x}{d}.$$

Ţinând seamă de aceste relaţiuni şi de proprietatea

$$\frac{BA}{BC} = \frac{x}{m}$$

specifică bisectoarei, se găseşte următoarea ecuaţiune:

$$(1) \qquad 2mx^2 + d^2x - md^2 = 0$$

care are ambele rădăcini reale, dintre care numai rădăcina pozitivă

$$\frac{-d^2 + d\sqrt{d^2 + 8m^2}}{4m}$$

este admisibilă cu condiţia ca

$$x < d$$

pentru ca cercul cu centrul în A' şi cu raza d să taie perpendiculara ridicată pe CB' la distanţa x de B'. Această condiţie este

$$-d^2 + d\sqrt{d^2 + 8m^2} < 4dm$$

$$\therefore \quad 0 < m + d$$

care este totdeauna realizată.

Pentru cazul când B' este piciorul bisectoarei exterioare ecuaţiunea (1) devine

$$2mx^2 - d^2x - 2md^2 = 0$$

care are de asemenea totdeauna rădăcinile reale. Pentru ca rădăcina pozitivă să convină, trebue ca

$$x < d$$

$$\therefore \quad d^2 + d\sqrt{d^2 + 8m^2} < 4md$$

$$\therefore \quad d < m$$

ceea ce am găsit şi pe cale geometrică.

Au dat această soluţie algebrică, fără a face discuţia şi fără a se ocupa şi de cazul când BB' este bisectoară exterioară, D-nii: Locot. P. NEGOIŢĂ, AD. I. FLOAREŞ, M. PETRESCU, TR. BOTEZ, N. V. NEDELCU, R. E. GVIAZDOMORSCHI (Lic. militar, Cernăuţi); I. D. DIACONESCU (Lic. Traian, T.-Severin) şi un anonim.

3. Problema se rezolvă geometric şi prin consideraţiuni de locuri geometrice. Iată 2 căi pentru aceasta.

Din soluţia geometrică anterioară se vede că

$$\overline{DE} = \overline{D_1E_1} = d = \text{const.}$$

Deci când D se mişcă pe dreapta CH punctul E descrie concoida acestei drepte. Dacă $d < B'C = m$, concoida are forma trasată în plin pe figură. Intersecţiile ei cu cercul C (CB') dă punctele E, care unite cu B' dau vârful B.

Punctele E şi E' dau 2 soluţii identice, care diferă numai prin poziţie, pentru triunghiuri ca ABC, iar E_1, E'_1 dau soluţii identice pentru triunghiuri ca A_1B_1C.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

Când $m < d$ concoida are forma curbei trasată cu linii întrerupte. Se vede că în acest caz nu se obţin puncte ca E_1 şi E'_1, dar se obţin totdeauna punctele E şi E'.

A doua cale. Dacă se consideră punctul E de pe cercul fix C (CB'/ se vede că

$$\overline{DE} = \overline{E_1D_1} = d = \text{const.}$$

şi deci D descrie concoida cercului C (CB'/. Intersecţia acestei concoide cu CH dă punctele D. Se regăsesc rezultatele precedente.

4. Consideraţia locurilor geometrice dela 3/ dă imediat soluţia problemei pentru cazul când unghiul A este oarecare, iar latura AB are o direcţie dată.

In acest caz se duce prin C o paralelă cu direcţia dată şi se demonstrează întocmai ca la soluţia geometrică dela început că ED este constant, D fiind intersecţia lui BB' cu paralela din C la direcţia dată.

G-L GH. B.

EXERCIŢII

35. Fie Δ ABC, în care BB', CC', BB_1, CC_1 sunt respectiv înălţimile şi medianele din B şi C. Să se arate că dacă avem $B'B_1 = C'C_1$, triunghiul este sau isoscel sau un triunghiu în care avem relaţia:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{CA}.$$

I. I. ŢIŢEICA.

R. 1. In triunghiul ABC ducem şi înălţimea AA'. Punctele A', B', B_1, C', C_1 sunt pe cercul lui EULER al triunghiului ABC. Să presupunem întâi că B' şi C' sunt de aceeaşi parte a lui B_1C_1. Deoarece $B'B_1 = C'C_1$, deducem:

$$\widehat{B'A'B_1} = \widehat{C'A'C_1}$$

şi adunând în ambii membrii unghiul $\widehat{B_1A'C_1}$, avem:

$$\widehat{B'A'C_1} = \widehat{C'A'B_1}.$$

Deci şi:

$$B'C_1 = C'B_1$$

sau

$$\frac{AB}{2} = \frac{AC}{2} \quad \therefore \quad AB = AC.$$

Prin urmare triunghiul ABC e isoscel.

2. Dacă propunem B′ de o parte a lui B_1C_1 şi C′ de cealaltă, avem

$$\overset{\frown}{B'A'B_1} = \overset{\frown}{C'A'C_1}$$

şi adunând în ambii membrii pe $\overset{\frown}{B'A'C_1}$ sau $\overset{\frown}{B_1A'C'}$ avem:

$$\overset{\frown}{B'A'C'} = \overset{\frown}{B_1A'C_1} = \overset{\frown}{BAC}.$$

Dar:

$$\overset{\frown}{B'A'C'} = 180^0 - 2\overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{BAC}.$$

De unde:

$$\overset{\frown}{BAC} = 60^0.$$

Pe de altă parte, într'un triunghiu, avem:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB} \cdot \overline{CA} \cos \hat{A}.$$

In cazul nostru, ţinând seamă că: $\cos\hat{A} = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$, avem:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{CA}.$$

Observări. 1. Avem egalităţile: $AC' = AB_1$ şi $AB' = AC_1$, căci avem:

$$\overset{\frown}{C_1C'B_1} = \overset{\frown}{B'B_1C'}.$$

Deci şi suplimentele: $\overset{\frown}{AC'B_1} = \overset{\frown}{AB_1C'}$. Triunghiul $AC'B_1$ e echilateral şi la fel $\Delta\, AB'C_1$. Prin urmare: $AC' = AB_1$ şi $AB' = AC_1$.

2. Triunghiul $A_1B'C'$ e echilateral (A_1 fiind mijlocul lui BC) căci avem:

$$\overset{\frown}{A_1B'C'} = \overset{\frown}{A_1C'B'} = \overset{\frown}{BAC} = 60^0$$

fiindcă A_1B' şi A_1C' sunt tangente cercului circumscris patrulaterului AB′C′H, unde H este ortocentrul triunghiului.

36. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^6y^2 - 18xy^5 - 17y^4 - 18x^5y + x^2y^6 = 17x^4 - 833 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$$

MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU.

R. Sistemul dat se mai poate scrie:

$$\begin{cases} (x^2y^2 - 18xy - 17)(x^4 + y^4) = -833 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} [x^2y^2 - 18xy - 17][(x+y)^4 + 2x^2y^2 - 4xy(x+y)^2] = -833 \quad (1) \\ (x+y)^2 - xy = 7 \quad (2) \end{cases}$$

Din (2) deducem:

$$(x+y)^4 + x^2y^2 - 2xy(x+y)^2 = 49.$$

Inlocuind pe $(x+y)^4$ din ec. (1) cu această valoare obţinem:

$$[x^2y^2 - 18xy - 17][x^2y^2 + 49 - 2xy(x+y)^2] = -833.$$

în care înlocuind pe $(x+y)^2$ cu valoarea sa scoasă din ec. (2), obţinem:

$$(x^2y^2 - 18xy - 17)(-x^2y^2 - 14xy + 49) = -833$$

sau:

$$-x^4y^4 + 4x^3y^3 + 318x^2y^2 - 644xy - 833 = -833$$

sau în fine:

$$x^4y^4 - 4x^3y^3 - 318x^2y^2 + 644xy = 0.$$

Să rezolvăm această ecuaţie în raport cu xy. Ea se poate scrie succesiv:

$$(xy-1)^4 - 324x^2y^2 + 648xy - 1 = 0$$

sau

$$(xy-1)^4 - 324(xy-1)^2 + 323 = 0. \quad (3$$

Notând: (4) $(xy-1)^2 = u$ ec. (3) devine:

$$u^2 - 324u + 323 = 0 \text{ etc.}$$

37. Să se arate că dacă rădăcinile reale şi mai mari ca un număr real a ale ecuaţiunii:

$$P(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_n = 0$$

sunt în număr par sau impar, atunci $P(\alpha) > 0$ sau $P(a) < 0$.

LT. C. IONESCU-ŢIU.

R. 1°. Fie rădăcinile $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$. Dacă x_i şi x_j sunt 2 rădăcini imaginare conjugate,

$$(a - x_i)(a - x_j) = (a - \alpha - i\beta)(a - \alpha + i\beta) = (a-\alpha)^2 + \beta^2.$$

$$P(\alpha) = (a - x_1)(a - x_2)(a - x_3)\ldots(a - x_n).$$

Pentru $x > a$, $a - x < 0$; iar pentru $x < a$, $a - x > 0$.

2°. Enunţul mai poate lua forma: Dacă numărul rădăcinilor reale şi mai mici ca un număr real a ale ecuaţiunii $P(x) = 0$ este sau nu de aceeaşi paritate cu gradul ecuaţiunii, atunci $P(a) > 0$ sau $P(a) < 0$.

Soluţiuni uşoare mai pot fi date cu ajutorul schiţei reprezentării grafice $y = P(x)$.

38. Fie m latura bazei, m' muchia laterală şi n numărul laturilor bazei la o piramidă regulată. Să se demonstreze relaţia:

$$m < 2m' \sin \frac{180^0}{n} .$$

VIRGIL GHIŢESCU.

R. h fiind înălţimea piramidei şi R raza cercului circumscris bazei, avem:

(1) $$h^2 = m'^2 - R^2 > 0.$$

Insă:

$$m^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\alpha = R\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

(2) $$m = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \left(\alpha = \frac{360^0}{n}\right) .$$

Trăgând apoi valoarea lui R din (2), înlocuind-o în (1) şi extrăgând rădăcina, obţinem relaţia propusă.

39. In orice triunghiu există identitatea:

$$2\left(\Pi \operatorname{cotg} \frac{A}{3} - \Sigma \operatorname{cotg} \frac{A}{3}\right) = \operatorname{cosec} \frac{A}{3} \operatorname{cosec} \frac{B}{3} \operatorname{cosec} \frac{C}{3} .$$

SUBLT. SAVIN C. IOAN.

R. Pornesc dela identitatea:

$$\frac{A+B+C}{3} = 60^0.$$

Deci:

$$\cos\left(\frac{A}{3} + \frac{B}{3} + \frac{C}{3}\right) = \cos 60^0 = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Insă

$$\cos\left(\frac{A}{3} + \frac{B}{3} + \frac{C}{3}\right) = \cos\left(\frac{A}{3} + \frac{B}{3}\right)\cos\frac{C}{3} - \sin\left(\frac{A}{3} + \frac{B}{3}\right)\sin\frac{C}{3}$$

$$= \left(\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3} - \sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\right)\cos\frac{C}{3} - \left(\sin\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3} + \sin\frac{B}{3}\cos\frac{A}{3}\right)\sin\frac{C}{3}$$

$$= \cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3} - \sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3} - \sin\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3} - \sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\cos\frac{A}{3}$$

Deci (1) devine:

$$2\Pi \cos\frac{A}{3} - 2\Sigma \sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3} = 1 .$$

Impărţind ambii membri cu $\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}$ avem:

$$2\Pi \operatorname{cotg}\frac{A}{3} - 2\Sigma \operatorname{cotg}\frac{A}{3} = \operatorname{cosec}\frac{A}{3}\operatorname{cosec}\frac{B}{3}\operatorname{cosec}\frac{C}{3} .$$

PROBLEME PROPUSE

4953*). Dacă $2n+1$ este un număr prim, să se arate că avem întotdeauna:

$$[(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n)]^2+(-1)^n=\mathcal{M}_{(2n+1)}.$$

CPT. COMANDOR GR. ZAPAN.

4975. Între unghiurile x şi y avem relaţiunea:

$$x+y=\tfrac{1}{3}(2k+1)\pi.$$

Se cere o relaţiune simplă simetrică de sinusuri care să conducă la această relaţie şi la următoarea:

$$x-y=2k\pi.$$

I. IONESCU.

4976. Se ştie că puterea a cincea a oricărui număr a se termină cu aceeaşi cifră ca a. Să se arate că a^{21} se termină cu aceleaşi două cifre ca a, dacă a e prim cu 2 şi cu 5, şi că a^{22} se termină cu aceleaşi două cifre cu a^2, dacă a e oarecare.

Să se arate că în general, dacă $p\geqq 3$, numărul $a^{10^{p-1}+1}$ se termină cu aceleaşi p cifre ca a, dacă a e prim cu 2 şi 5; iar dacă a e oarecare, $a^{10^{p-1}+p}$ se termină cu aceleaşi p cifre ca a^p.

P. SERGESCU.

4977. Două drepte se intersectează sub un unghiu a cărui valoare e foarte apropiată de 180^0. Să se ducă bisectoarea acelui unghiu.

IULIAN ALEXIU.

4978. Să se găsească locurile geometrice ale vârfurilor C şi D ale patrulaterului cu suprafaţa constantă ABCD, în care latura AB este fixă, iar latura CD se mişcă paralel cu ea însăşi.

D. V. STOICA.

*) Problema 4953 apărând eronat, se publică din nou.

4979. Fie A'B'C' triunghiul pedal al unui punct M din planul unui triunghiu oarecare ABC, iar $A_1B_1C_1$ triunghiul format de dreptele ortocentroidale *) ale patrulaterelor AB'MC', BC'MA', CA'MB'.

Să se arate că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt ortologice.

ALEXANDRU N. POPESCU-ZORICA.

4980. Fie O, O' două cercuri tangente în R. O secantă dusă prin R taie pe O în M şi pe O' în N. Tangentele în M şi N la O şi O' întâlneşte în Q şi P tangenta în R la cele două cercuri. Diametrele QO şi PO' taie cercurile O şi O' în A', B' şi A, B, iar secanta MN în C' şi C. Să se arate:

1°. Că punctele $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de intersecţie a perechilor de drepte AB' şi BA', PB' şi BQ, AC' şi CA', PC' şi CQ se află pe o dreaptă Δ.

2°. Dreptele Δ şi MN fac un unghiu constant, oricare ar fi poziţia lui MN.

GENERAL AL. GHEORGHIEŞ.

4981. Un plan variabil taie muchiile BA, AC, CB, DA, DB, DC ale unui tetraedru ABCD în punctele M, N, P, Q, R, S. Să se demonstreze că tetraedrul obţinut, ducând prin centrele de greutate ale tetraedrelor AMNQ, BNPR, CNPS, DQRS planuri respectiv paralele cu feţele BCD, CDA, DAB, ABC, păstrează un volum constant.

V. THÉBAULT.

4982. Se consideră un triunghiu ABC în care cunoaştem laturile *b*, *c* şi unghiul A. Prin A se duce o dreaptă AD (D fiind pe BC) făcând cu AB un unghiu φ. Unghiul φ este măsurat dela AB în spre AC.

1°. Să se calculeze AD în funcţie de datele problemii.

2°. Din expresia găsită să se deducă expresia înălţimii şi bisectoarelor unghiului A.

3°. Să presupunem că prin B ducem o dreaptă BE (E fiind pe AC) care să facă un unghiu φ cu BC şi tot aşa se duce o dreaptă CF (F fiind pe AB) care să facă cu CA un unghiu φ.

*) Formate de ortocentrele celor patru triunghiuri ale fiecărui patrulater complet.

Să se arate că există triunghiuri pentru care se poate determina un unghiu φ în aşa fel ca:

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}.$$

4°. Să se arate că între laturile unui triunghiu care satisface condiţiilor dela 3° există relaţia

$$a^2(a-c)+b^2(b-a)+c^2(c-b)=0.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4983. Razele cercurilor înscrise în triunghiurile formate de două laturi ale triunghiului ABC cu latura corespunzătoare a triunghiului ortic sunt proporţionale cu cosinusurile unghiurilor respective ale triunghiului de referinţă.

C. IONESCU-BUJOR.

4984. Ori ce triunghiu putând fi considerat ca proecţiunea ortogonală a unui triunghiu echilateral din spaţiu, să se găsească latura triunghiului echilateral corespunzător unui triunghiu dat, precum şi unghiul celor două plane.

ULPIU FLORESCU.

4985. Să se discute ecuaţia:

$$1-\sin 7\theta = \lambda^2(1+\sin\theta)$$

când parametrul λ variază.

N. CIORĂNESCU.

4986. Se se arate că cercurile osculatoare la o conică cu centru în patru puncte conciclice, retaie conica în patru puncte conciclice.

AD. GHEORGHIU.

ERATĂ. Articolul *«O reţea de Conice»*.

— Pag. 463 punctul 6°, paragraful *a)* se va citi:
Tot în cazul general, Cayleyana are 6 Contacte cu Hesiana.

— Pag. 464 punctul 6° rândul 9 de jos în sus se va citi:
„O curbă de gradul 3 bitangentă dreptei $(D)''$.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bodnărescu M. Horia (4968); *Cârdeiu Gh.* (4948); *Cetăţeanu Stelian* (4870, 945, 53); *Cornăţeanu A.* (4791); *Drăghicescu P.* (4946); *Eckstein Virgil* (N); *Jareghie V. I.* (4946, 47); *Pascaru C.* (4941, 45, 48); *Petrescu Achile* (4950, 68); *Popa Mircea* (4968, 70); *Popescu Adrian* Subloc. (4928, 34, 43, 60); *Şaichin O. A.* (4943); *Topălescu S. Gh.* (4964); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (4932, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

Colecţiunea *„Gazetei Matematice"* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică* Ediţia VI . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50
Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. **C. D. IONESCU-ŢIU**

C. 51.535

1937/1938 - complet -
C III R 24

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIII

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1938

SUMARUL

1. † Regina Maria.
2. Aritmetica lui Gheorghe Asachi (urmare şi sfârşit) . . . . . *Petre V. Cazanacli.*
3. Relaţiuni într'un patrulater . . . . . *Ad. Gheorghiu.*
4. Formula mediei pentru polinoame (urmare) *Gh. Mihoc.*
5. Regulamentul premiului „Inginer H. Capriel".
6. Note Matematice: 53 — 56.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 279.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1882, 3319, 3343, 3650, 4038, 4088, 4495, 4570, 4792, 4830, 4924, 4950, 4951.
11. Exerciţii: 40 — 43.
12. Probleme propuse: 4987 — 4998.
13. Tabla de Materii.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1938

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stan,** Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan; Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1937 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4859, 71, 79, 88, 90, 94, 901, 04, 05, 09, 12, 13, 14, 15, 20, 22, 27, 29, 37, 38, 42, 44, 49, 53, 54, 55, 59, 62, 63, 65, 66, 67, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

In Biblioteca «Gazetei Matematice» a apărut:

CULEGERE DE PROBLEME DE ALGEBRĂ

INTOCMITĂ DE

D-l Inginer Profesor A. G. IOACHIMESCU
Licențiat în Matematici

PARTEA I. EDIȚIA IV-a

REVĂZUTĂ ȘI MĂRITĂ

188 pagini
Prețul: 120 lei

DE VÂNZARE LA LIBRĂRII, SE POATE COMANDA ȘI LA «GAZETA MATEMATICĂ», BUC. CALEA GRIVIȚEI Nr. 158, TRIMIȚÂNDU-SE COSTUL DE 120 LEI PLUS 15 LEI PENTRU TRANSPORT SAU CONTRA RAMBURS

La 1 Septemvrie va apare:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

PARTEA II-a (Trigonometria triunghiului)

DE

V. CRISTESCU

EDIȚIA II-a REVĂZUTĂ ȘI ADĂOGITĂ

DE

GH. TH. GHEORGHIU

Prețul: 120 lei

† REGINA MARIA

In seara de 18 Iulie c. a închis ochii pentru totdeauna, adormind somnul de veci, MAJESTATEA SA REGINA MARIA.

Strâns identificată cu aspiraţiile noastre naţionale, REGINA MARIA *a ştiut din prima clipă a domniei, în atmosfera sguduitor de tristă a restriştei războiului de reîntregire al Neamului, să se înalţe majestuos şi falnic în ochii şi sufletele tuturor Românilor, rămânând tot timpul războiului dârză, ca o stâncă, cu sufletul neclintit în convingerea biruinţei finale.*

REGINA MARIA *a ştiut, în cele mai mari clipe ale istoriei noastre, să fie Ea temelie a înfăptuirei României-Mari şi să ţese coroanei Ei aureola strălucitoare ce o vor cânta deacum veacuri nesfârşite legendele poporului.*

Gazeta Matematică *luând parte deosebită la durerea Neamului şi a iubitului nostru Suveran, a expediat* M. S. REGELUI CAROL II *următoarea telegramă:*

„Cu sufletele îndurerate membrii Societăţii Gazeta Matematică *îşi îndreaptă gândul şi profunda lor simpatie către Majestatea Voastră rugând-O respectuos să binevoiască a primi, ca o licărire de mângâere, alăturarea lor din întreg sufletul la marea durere a Familiei Regale şi a admite totodată exprimarea sinceră a nesfârşitului lor devotament".*

La aceste cuvinte M. S. Regele a binevoit să onoreze Gazeta Matematică *cu următorul răspuns:*

„Mulţumesc pentru condoleanţele exprimate". — CAROL R.

ARITMETICA LUI GHEORGHE ASACHI

(Urmare dela pag. 570 şi sfârşit).

Ultimul Capitol al cărţii tratează *„De cube şi de extragerea lor* (§§ 173—187, 12 pagini.) In § 173 se defineşte cubul unui număr şi se dau cuburile primelor 9 numere. § 174: *„Să însemnăm, dintâi, că acel mai mare cubu a numerilor din o ţifră are numai trii numere; şi că 10 acel mai mic din numerile din două ţifre, are patru ţifre la cubul său, carile este 1000“*. In § 175 se ridică la cub numărul 12, scris ca (10+2); după socoteli amănunţite, se conchide (§ 176): *„Din aceste încheiu că cubul unui număr ce este compus din zecimi şi din unimi cuprinde: 1) Cubul zecimilor, 2) De trii ori cvadratul zecimilor prin unimi, 3) De trii ori zecimi prin cvadratul unimilor, 4) Cubul unimilor. Să informăm cubul unui număr compus din zecimi şi unimi, de exemplu de 23.*

Cubul de două zecimi va fi	8000
De trii ori cvadratul zecimilor prin unimi va fi	3600
Soma acestor două întâi mădulări va fi	11600.
De trii ori zecimile prin cvadratul unimilor va fi . . .	540
In urma cubul unimilor va fi ecval cu	27
Soma totală sau cubul de 23	12167.

§ 177. *„Iată în ce chip se cuvine a urma, pentru a se extrage rădăcina cubică din ori care număr. Se cere rădăcina cubică de 12167. Fiind că cubul de 10 este 10×10×10 sau 1000, cubul zecimilor neapărat nu se poate găsi decât în miile, deci de prisos este a-l căuta în acele trii de pe urmă ţifre spre dreapta: deci despart acele trii ţifre de pe urmă prin un punct. Caut rădăcina cubică de 12, care este 2, pentru că acel mai mare cubu cuprins în 12 este 8, cubul de 2; pun 2 la rădăcină în dreapta comei care o disparte, de la cubu. Cubuez 2 şi substragu productul 8 dela 12, rămâne 4, alături cu rămăşiţa celor 167, care îmi dă 4167, şi care număr cuprinde de trii ori cvadratul zecimilor 2, acuma aflate, prin unimile ce le căutăm, plus de trii ori tot acele zecimi înmulţite prin cvadratul unimilor, şi plus cubul acestor unimi. Dar cvadratul, sau mai bine zicând de trii ori cvadratul zecimilor nu se poate afla de cât în sutimi* (§ 161).

Cubu	Rădăcina
12.167	23
8	
41.67	
12	

Deci dispart două ţifre spre dreapta de 4167, şi precum 41 trebui să cuprindă de trii ori pe cvadratul zecimilor prin unimi, pentru de avea acele unimi le împărţesc prin 12, ecval cu trii ori cvadratul a două zecimi cunoscute (§ 38); *cătoriul este 3, pe carile îl scriu la rădăcină, după 2, căre dă 23 rădăcină cubică de 12167, şi pentru de a mă încredinţa cubuez 23, făcând productul de 23 prin 23 prin 23*".

§ 178: „*Se cere rădăcina cubică de 1860867*". Se lucrează cu 1860, cum s'a făcut mai sus şi se găseşte 12. Pe urmă:

1.860.867	123: „*Cubuez 12 şi substragu 1728 de la 1860, care îmi rămâne 132, lângă carile cobor clasul 867, şi socotind tot pe 12 ca pe un singur număr care exprimează zecimile rădăcinei căutate, dispart acele două de pe urmă ţifre 67 a numărului 132867, şi împărţesc 1328 prin întreitul cvadrat a 12, sau prin 432; cătoriul este 3, pe carile scriu după 12 la rădăcină; cubuez 123, substragu productul 1860867 dela 1860867, pentru de a adeveri şi a mă încredinţa de este la rădăcină vreo rămăşiţă. După substragere eşind 0, încheiu că 123 este rădăcina cubică de 1860867.*" § 179: „*Din cele urmate să încheiem, că mainainte de a păşi către extragerea rădăcinii cubice a unui număr, trebui a-l împărţi, mergând dela dreapta spre stânga, în clasuri câte trii ţifre*". § 180. „*Dacă ţifra care se va pune la rădăcină ar fi prea mare, aceasta s'ar înţelege prin neputinţa de a face substragerea, şi atunce s'ar împuţina acea rădăcină pe rând de 1, 2, 3,.... unimi, până se va putea face substragerea*". § 181: „*Dacă numărul despre care se caută rădăcina nu este cu cubu deplin, atunce rădăcina care se află este numai o rădăcină apropietă. Incă foarte rar se întâmplă să fie destul de a o avea în numere întregi; căci dacă s'ar cere, de exemplu, rădăcina cubică de 25, nu s'ar îndestula cererea, de s'ar da spre răspuns 2, de şi aceasta este rădăcina cubică de 8, acel mai mare din cubele ce se cuprind în 25; dar prin mijlocirea zecimalelor şi urmând unei marşe analoghice cu acea ce s'au arătat* (§ 165) *la prilejul extragerii rădăcinei cvadrate, se va apropia de adevărata valoare a rădăcinei cubice atâta pe cât se va voi. De acea se va pune în urma numărului a căruia rădăcină se caută*
1	
08.60	
3	
1728	
1328.67	
432	

de atâtea ori 000 câte ţifre zecimale voim avea la rădăcină, după care se cuvine urma ca în exemplile trecute". In § 182, se găseşte rădăcina cubică din 9, cu apropiere de o sutine". *Se lucrează cu 9000000, şi rădăcina cubică este 2,07, iar restul se scrie: 130257 (de fapt, este 0,130257)*". La urmă avem explicaţia: „*Puind 000000 după 9, am făcut această ţifră de un milion de ori mai mare* (§ 15). *Deci rădăcina 207 este de o sută ori mai mare, căci cubul de 100 sau* $100 \times 100 \times 100$ *ecvalează cu 1000000, deci 207 îl fac de o sută de ori mai mic, dispărţind prin o comă duoă ţifre spre dreapta sa* (§ 61). In § 183 se dă regula obişnuită pentru extragerea rădăcinii cubice dintr'o fracţie ordinară. § 184: *Dacă singurul numitoriu este un cubu, se va extrage rădăcina apropiitoare din numărătoriu, şi la această rădăcină se va da de numitoriu pe rădăcină cubică a numitoriului*". Ca exemplu se extrage rădăcina cubică din $\frac{9}{1331}$, şi se găseşte $\frac{207}{11}$ (trebuia scris $\frac{2,07}{11}$), sau 0,18. § 185: „*Dacă numitoriul nu ar fi cubu deplin, atunce s'ar cuveni înmulţi amândouă termine a fracţii prin cvadratul numitoriului, şi apoi cel nou numitoriu fiind un cubu, vom urma ca în exemplul trecut. Se cere rădăcina cubică de* $\frac{2}{3}$ *cu apropiere de o sutine. Inmulţesc aceste două termine prin 9 ce este cvadratul numitoriului său 3, carile se face* $\frac{18}{27}$; *extrag rădăcina cubică din 18000000, ea este 2,62, rădăcina de 27 este 3. Incât rădăcina cubică a fracţiei este* $\frac{2,62}{3}$. *Sau reducând în zecimale 0,87*".

Şi o ultimă regulă (§ 187): „*Dacă zecimalele aflătoare lângă un număr, din care se extrage rădăcina cubică, nu sânt trii la număr, sau un hotărât număr de ori trii, atunce să se adaugă către ele una sau mai multe 0 în cât numărul zecimalilor să fie trii, sau un multiplu de trii; aşa dar dacă de exemplu zecimalele sânt cinci la număr, se va adăogi 0; de sunt patru se va adăogi două 0, spre a face şesă ţifre zecimale, aceasta nu va schimba valoarea numărului* (§ 63).

* * *

Termin cu aceasta expunerea conţinutului Aritmeticii lui GHEORGHE ASACHI; am ţinut s'o fac cât mai amănunţită, pentru ca cititorii să poată cunoaşte mai bine această carte, care are multe lipsuri, dar şi foarte multe calităţi, cu atât mai remarcabile dacă ţinem seamă de faptul că a fost una din primele Aritmetici româneşti. Chestiunea foarte importantă, anume după ce autori streini s'a condus autorul când a întocmit această carte, rămâne, de o cam dată, fără răspuns. Terminologia întrebuinţată mă face să cred că ASACHI s'a folosit de cărţi franţuzeşti sau cele italieneşti, dar nu pot preciza nimic. Limba în care e scrisă această Aritmetică e foarte clară, şi, dacă n'ar fi unele arhaisme, elevii de astăzi ar putea învăţa cu succes după această carte, ceea ce constitue încă un mare merit pentru autorul ei.

PETRE V. CAZANACLI.

RELAŢIUNI INTR'UN PATRULATER

1°. In articolul *„Aplicaţiuni ale calculului vectorial"* din *Gazeta Matematică* XLI, pag. 224, D-l GH. VASILIU stabileşte următoarea remarcabilă relaţiune într'un patrulater oarecare ABCD:

$$\frac{\sin(\alpha-\alpha_1)}{AB\,.\,DC}=\frac{\sin(\beta-\beta_1)}{AC\,.\,BD}=\frac{\sin(\gamma-\gamma_1)}{AD\,.\,BC} \qquad (1)$$

unde α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 sunt respectiv unghiurile orientate:

$$\widehat{CAD},\ \widehat{DAB},\ \widehat{BAC}\ ;\ \widehat{CBD},\ \widehat{BDC},\ \widehat{DCB}.$$

(Cu această ocazie observăm că unghiurile α şi γ din figura dela pag. 224 trebuesc schimbate între ele).

Pentru aceasta D-l GH. VASILIU consideră patrulaterul ABCD format din vectori şi defineşte alţi trei vectori $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ ce se dovedesc egali, rezultând apoi, în valori absolute, relaţiunea (1). Aceeaşi vectori egalaţi cu zero dau condiţia ca patrulaterul ABCD să fie inscriptibil, rezultând următoarea formulă ce caracterizează patrulaterele inscriptibile:

$$AB\sin\alpha+AC\sin\beta+AD\sin\gamma=0 \qquad (2)$$

şi din care se deduce cunoscuta formulă a lui PTOLEMEU:

$$AB\,.\,CD+AD\,.\,BC=AC\,.\,BD. \qquad (3)$$

2°. Vrem să arătăm o legătură strânsă între relaţiunile (1) şi formula (3) prin intermediul unei *formule a lui* PTOLEMEU *generalizată*, ce ascunde relaţiunile (1).

Anume, înmulţim numărătorii şi numitorii primului şi ultimului raport din (1), fără a restrânge generalitatea, respectiv cu $\cos(\gamma-\gamma_1)$ şi $\cos(\alpha-\alpha_1)$; avem apoi după o cunoscută proprietate a şirului de rapoarte egale:

$$\frac{\sin(\alpha-\alpha_1)\cos(\gamma-\gamma_1)+\sin(\gamma-\gamma_1)\cos(\alpha-\alpha_1)}{AB\,.\,DC\cos(\gamma-\gamma_1)+AD\,.\,BC\cos(\alpha-\alpha_1)}=\frac{\sin(\beta-\beta_1)}{AC\,.\,BD}. \quad (4)$$

Dar

$$\sin(\alpha-\alpha_1)\cos(\gamma-\gamma_1)+\sin(\gamma-\gamma_1)\cos(\alpha-\alpha_1)=\sin(\alpha-\alpha_1+\gamma-\gamma_1)$$

$$=\sin[(\alpha+\gamma)-(\alpha_1+\gamma_1)]=\sin[(2\pi-\beta)-(\pi-\beta_1)]=\sin(\beta-\beta_1).$$

Deci în (4) numărătorii fiind egali avem şi:

$$AB\,.\,DC\cos(\gamma-\gamma_1)+AD\,.\,BC\cos(\alpha-\alpha_1)=AC\,.\,BD \quad (5)$$

obţinând astfel o formulă a lui PTOLEMEU generalizată.

Intr'un patrulater inscriptibil $\alpha=\alpha_1$ şi $\gamma=\gamma_1$, deci din (5) rezultă imediat cunoscuta formulă a lui PTOLEMEU (3).

3°. Să observăm următoarele:

Se pot scrie încă două formule analoage formulei (5) dând celelalte două produse AB . DC şi AD . BC.

Suma unghiurilor $\alpha-\alpha_1$, $\beta-\beta_1$, $\gamma-\gamma_1$ ce intră în aceste relaţiuni este π căci:

$$\alpha+\beta+\gamma-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1=2\pi-\pi=\pi.$$

Notând cu I intersecţia (AC, BD) avem din triunghiurile BCI şi DIA:

$$\widehat{BCA}+\widehat{CBD}=\widehat{CAD}+\widehat{BDA}$$

de unde

$$\widehat{CAD}-\widehat{CBD}=\widehat{BCA}-\widehat{BDA}=\alpha-\alpha_1,$$

adică diferenţele celor două perechi de unghiuri la fel aşezate faţă de laturile produsului AB . DC sunt aceleaşi. Analog se pot defini $\beta-\beta_1$ şi $\gamma-\gamma_1$ în două moduri. Să numim diferenţa $\alpha-\alpha_1$: unghiul opus produsului AB . DC, fiind formată de unghiuri neadiacente nici uneia din laturile cari intră în produs; iar diferenţele $\beta-\beta_1$ şi $\gamma-\gamma_1$ le numim unghiuri adiacente aceluiaş produs AB . DC.

Cu acestea să observăm că cele trei produse ale laturilor opuse în patrulaterul ABCD şi cele trei diferenţe de unghiuri se comportă după formulele (1) şi (5) ca laturile şi unghiurile unui triunghiu.

Putem deci scrie şi formula:

$$AC^2 . BD^2 = AB^2 . DC^2 + AD^2 . BC^2 - 2AB . DC . AD . BC \cos(\beta - \beta_1) \quad (6)$$

şi încă două analoage.

4°. Dăm aci, relaţiunilor (1) şi (5) o altă demonstraţie stabilindu-le pe o cale mai naturală şi mai simplă decât cea din articolul citat.

Se cunoaşte următoarea relaţiune a lui EULER între patru puncte pe o dreaptă orientată:

$$\overline{AB} . \overline{CD} + \overline{AD} . \overline{BC} = \overline{AC} . \overline{BD} \quad (7)$$

care rezultă din identitatea algebrică:

$$(b - a)(d - c) + (d - a)(c - b) = (c - a)(d - b). \quad (8)$$

Cum această identitate rămâne valabilă şi în numere complexe, rezultă că relaţiunea lui EULER are loc şi în plan: A, B, C, D fiind patru puncte oarecare, segmentele orientate fiind înlocuite cu vectori, iar operaţiile fiind acelea din calculul equipolentic (cu numere complexe).

Cu acestea, să formăm din (7) expresiunea:

$$\frac{\overline{AB} . \overline{CD}}{\overline{AC} . \overline{BD}} + \frac{\overline{AD} . \overline{BC}}{\overline{AC} . \overline{BD}} = 1, \quad (9)$$

sau:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = 1, \quad (10)$$

adică relaţia ce leagă două din determinaţiunile raportului anarmonic a patru puncte, cari diferă cu unitatea.

In planul complex, Ox fiind axa reală, avem deci:

$$\overline{AB} = AB . [\cos(Ox, \overline{AB}) + i \sin(Ox, \overline{AB})] \quad (11)$$

scriind astfel că distanţa AB e modulul iar unghiul orienta

$(Ox, \overline{AB})$, argumentul cantității complexe $(b - a)$ sau ceea ce e tot una a vectorului $\overline{AB}$. Atunci:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{AB}{AC}\left[\cos\left(Ox, \overline{AB} - Ox, \overline{AC}\right) + i \sin\left(Ox, \overline{AB} - Ox, \overline{AC}\right)\right]$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{AB}{AC}\left(\cos \widehat{CAB} + i \sin \widehat{CAB}\right). \qquad (12)$$

Cu acestea relațiunea (10) se scrie succesiv:

$$\frac{AB}{AC}\left(\cos \widehat{CAB} + i \sin \widehat{CAB}\right) : \frac{DB}{DC}\left(\cos \widehat{CDB} + i \sin \widehat{CDB}\right)$$

$$+ \frac{AD}{AC}\left(\cos \widehat{CAD} + i \sin \widehat{CAD}\right) : \frac{BD}{BC}\left(\cos \widehat{CBD} + i \sin \widehat{CBD}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC}\right)\left[\cos\left(\widehat{CAB} - \widehat{CDB}\right) + i \sin\left(\widehat{CAB} - \widehat{CDB}\right)\right]$$

$$+ \left(\frac{AD}{AC} : \frac{BD}{BC}\right)\left[\cos\left(\widehat{CAD} - \widehat{CBD}\right) + i \sin\left(\widehat{CAD} - \widehat{CBD}\right)\right]$$

$$= \cos O + i \sin O,$$

$$AB \cdot DC \cos\left(\widehat{CAB} - \widehat{CDB}\right) + AD \cdot BC \cos\left(\widehat{CAD} - \widehat{CBD}\right)$$

$$+ i\left[AB \cdot DC \sin\left(\widehat{CAB} - \widehat{CDB}\right) + AD \cdot BC \sin\left(\widehat{CAD} - \widehat{CBD}\right)\right]$$

$$= AC \cdot BD. \qquad (13)$$

De unde, egalând părțile reale și părțile imaginare ale ambilor membrii obținem:

$$AB \cdot DC \cos\left(\widehat{CAB} - \widehat{CDB}\right) + AD \cdot BC \cos\left(\widehat{CAD} - \widehat{CBD}\right) = AC \cdot BD \qquad (14)$$

adică formula (5) de mai sus, cu aproximația semnelor de sub cos;

$$AB \cdot DC \sin\left(\widehat{CAB} - \widehat{CDB}\right) + AD \cdot BC \sin\left(\widehat{CAD} - \widehat{CBD}\right) = 0 \qquad (15)$$

de unde:

$$AB \cdot DC \sin\left(\widehat{BAC} - \widehat{BDC}\right) = AD \cdot BC \sin\left(\widehat{CAD} - \widehat{CBD}\right) \qquad (16)$$

adică egalitatea între primul şi ultimul raport din relaţiunile (1).

Dar se ştie că mai există încă două perechi de rapoarte anarmonice a celor patru puncte cari diferă prin unitate şi din care se deduc pe aceeaş cale încă două relaţiuni analoage lui (14) şi încă două relaţiuni analoage lui (15) completând astfel tabloul relaţiunilor (5) şi (1) respectiv.

Prin această demonstraţie putem spune că atingem *cauza* relaţiunilor (1) şi (5), ele devenind consecinţe în domeniul relaţiunilor metrice ale unei relaţiuni vectoriale simple şi generale: relaţiunea lui EULER între patru puncte.

5°. Să dăm o explicare a analogiei observate la paragraful 3°, între formulele (1) şi (5) dintr'un patrulater şi cunoscutele formule dintr'un triunghiu.

In adevăr, relaţiunile dintr'un triunghiu se pot deduce pe calea arătată la paragraful 4° din următoarea simplă identitate vectorială între trei puncte în plan:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \qquad (17)$$

sau:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = 1. \qquad (18)$$

Aplicăm calculul cu numere complexe, avem după (12):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{AB}{AC}\left(\cos\widehat{CAB} + i\sin\widehat{CAB}\right)$$

$$+ \frac{BC}{AC}\left(\cos\widehat{ACB} + i\sin\widehat{ACB}\right) = \cos O + i\sin O$$

de unde

$$AB\left(\cos\widehat{CAB} + i\sin\widehat{CAB}\right) + BC\left(\cos\widehat{ACB} + i\sin\widehat{ACB}\right) = AC. \qquad (19)$$

De unde egalând părţile reale şi părţile imaginare din fiecare membru, obţinem:

$$AB\cos\widehat{CAB} + BC\cos\widehat{ACB} = AC \qquad (20)$$

$$AB\sin\widehat{CAB} + BC\sin\widehat{ACB} = 0 \qquad (21)$$

adică cunoscutele formule din trigonometrie şi cari se completează cu analoagele, scriind celelalte două sume ce dau vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{BC}$. [Relaţiunea (21) se scrie imediat sub formă de egalitate de rapoarte pozitive, schimbând semnul unuia din unghiurile de sub sin].

Analogia evidentă între formulele (20) şi (21) cu formulele (14) şi (15) arată că relaţiunea vectorială (10) este o generalizare la configuraţia a patru puncte în plan, a relaţiunei vectoriale (18) între trei puncte în plan.

AD. GHEORGHIU.

FORMULA MEDIEI PENTRU POLINOAME

(Urmare dela pag. 577).

II.

1. Ne propunem să arătăm cum se găseşte intervalul minim de contracţie pentru polinomul general de grad par. Evident că determinarea lui efectivă, prin nişte formule analoage cu (8) nu mai este în general posibilă. Acest lucru nu s'a putut dealtminteri face nici pentru polinoamele de grad impar, pentru care s'a arătat că intervalul de contracţie este dat de rădăcinile extreme ale polinomului, determinat prin relaţiile de ortogonalitate ponderată:

$$\int_a^b P_m(x)\, P_n(x)\, g(x)\, dn = 0 \quad , \quad m \neq n.$$

Se ştie că polinomul $P_n(x)$ are toate rădăcinile reale, însă găsirea rădăcinilor extreme ale acestui polinom, cu ajutorul unor formule de tipul (8), nu s'a putut obţine până acum.

Vom căuta să găsim pentru polinomul general de grad par un rezultat asemănător cu acela obţinut pentru polinoamele de grad impar. Fie

$$(9) \qquad f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n} x^{2n}$$

un polinom arbitrar de gradul $2n$.

Intocmai ca şi în cazul $n=1$, vom căuta să rezolvăm sistemul:

$$(10)\quad \begin{cases} p_1+p_2+\ldots+p_n = M_0 \\ p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n = M_1 \\ p_1x_1^2+p_2x_2^2+\ldots+p_nx_n^2 = M_2 \\ \vdots \\ p_1x_1^{2n-2}+p_2x_2^{2n-2}+\ldots+p_nx_n^{2n-2} = M_{2n-2} \\ p_1x_1^{2n-1}+p_2x_2^{2n-1}+\ldots+p_nx_n^{2n-1} = M_{2n-1}+\lambda \end{cases}$$

unde λ e un parametru arbitrar.

Dacă introducem notaţia:

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \ldots\ldots x^n \\ M_0 & M_1 & M_2 \ldots\ldots M_n \\ M_1 & M_2 & M_3 \ldots\ldots M_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ M_{n-1} & M_n & M_{n+1} \ldots M_{2n+1} \end{vmatrix}$$

se arată uşor că valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$P_n(x)+\lambda P_{n-1}(x) = 0.$$

Şirul

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x), \ldots, P_{n-1}(x),\ P_n(x)+\lambda P_{n-1}(x).$$

formează o succesiune de polinoame STURM, după cum se poate uşor arăta. In baza acestei proprietăţi, se demonstrează că polinomul $P_n(x)+\lambda P_{n-1}(x)$, are toate rădăcinile reale şi separate de rădăcinile de asemenea reale ale polinomului $P_{n-1}(x)$. Deci valorile $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots x_n(\lambda), [x_1(\lambda)<x_2(\lambda)\ldots]$, sunt întotdeauna reale şi distincte.

Printr'un procedeu asemănător se arată că $p_i>0$ [1]).

---

1) A se consulta cu privire la aceste puncte tratatele clasice de calculul probabilităţilor. (De exemplu: G. CASTELNUOVO, „Calcolo delle probabilità", vol. II, pag. 154—178, sau E. BOREL, „Les principes de la théorie des probabilités", pag. 123—146).

Introducerea parametrului λ nu schimbă demonstraţiile găsite în acele tratate, astfel că repetarea lor, fără nicio modificare esenţială, este inutilă.

2) G. CASTELNUOVO: „Sul problema dei momenti", Giornale dell'Instituto italiano degli attuari, Anno I, No. 2, 1930.

Se obţine astfel formula:

$$\frac{p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2)+\ldots+p_n f(x_n)}{p_1+p_2+\ldots+p_n} = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx.}$$

a cărei interpretare ne conduce la concluzia, că între valorile $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$ se găseşte întotdeauna un ξ, din formula mediei. Dintre aceste intervale, în număr infinit, trebue să-l găsim pe acela de lungime minimă.

Pentru aceasta observăm că punctele $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $\ldots x_n(\lambda)$ reprezentând rădăcinile ecuaţiei

$$P_n(x)+\lambda P_{n-1}(x)=0 \tag{11}$$

formează un grup de n puncte, care este în mod unic determinat atunci când ne dăm oricare dintre ele. Grupul $x_i(\lambda)$ alcătueşte o involuţie de ordinul n, care întocmai ca şi o involuţie obişnuită de ordinul al doilea, a fost complet studiată.

In special, în cazul când $P_n(x)$ este polinomul clasic, ce intervine în problema momentelor, D-l C. CASTELNUOVO a arătat că involuţia (11) nu are puncte unite reale şi că omoloagele unui punct y sunt date de ecuaţia de gradul $(n-1)$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \\ 1 & M_0 & M_1 & M_2 & \ldots & M_{n-1} \\ y & M_1 & M_2 & M_3 & \ldots & M_n \\ y^2 & M_2 & M_3 & M_4 & \ldots & M_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{n-1} & M_{n-1} & M_n & M_{n+1} & \ldots & M_{2n-2} \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

O consecinţă a faptului că involuţia nu are puncte unite este aceea că punctele a două grupe diferite aparţinând involuţiei se separă între ele. In particular, rădăcinile polinomului $P_{n-1}(x)$ separă toate celelalte grupe de puncte ale involuţiei. Avem deci întotdeauna inegalităţile:

$$x_1(\lambda) \leqslant x_1 \leqslant x_2(\lambda) \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1}(\lambda) \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n(\lambda) \text{ [1]} \tag{13}$$

unde am însemnat prin x_i rădăcinile ecuaţiei $P_{n-1}(x)=0$.

1) Egalităţile sunt adevărate pentru $\lambda=\infty$.

Dacă notăm prin l lungimea intervalului de contracție, corespunzător punctului y, rezultă pe de altă parte din ecuația (12)

$$(14)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & y+l & (y+l)^2 \dots (y+l)^{n-1} \\ 1 & M_0 & M_1 & M_2 \dots M_{n-1} \\ y & M_1 & M_2 & M_3 \dots M_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{n-1} & M_{n-1} & M_n & M_{n+1} \dots M_{2n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Oricare ar fi y, ecuația (14), care nu este decât o transformată a ecuației (12), admite pentru 1 valori reale și distincte. Cea mai mare dintre ele dă lungimea intervalului de contracție corespunzător valorii y.

Derivând relația (14) în raport cu y și anulând derivata lui l în raport cu y, căpătăm:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2(y+l) \dots (n-1)(y+l)^{n-2} \\ 1 & M_0 & M_1 & M_2 \dots M_{n-1} \\ y & M_1 & M_2 & M_3 \dots M_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{n-1} & M_{n-1} & M_n & M_{n+1} \dots M_{2n-2} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & y+l & (y+l)^2 \dots (y+l)^{n-1} \\ M_0 & M_1 & M_2 \dots M_{n-1} \\ M_2 & M_3 & M_4 \dots M_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n-1} & M_n & M_{n+1} \dots M_{2n-2} \end{vmatrix}$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & y+l & (y+l)^2 \dots (y+l)^{n-1} \\ M_0 & M_1 & M_2 \dots M_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n-2} & M_{n-1} & M_n \dots M_{2n-3} \end{vmatrix} = 0.$$

Fie $F(y, y+l)$ primul membru al ecuației (14) și $G(y, y+l)$ primul membru al ecuației (15). Sistemul de ecuații:

$$(16) \qquad \begin{aligned} F(y, z) &= 0 \\ G(y, z) &= 0 \end{aligned}$$

ne dă intervalul de contracție căutat, care este definit prin soluțiile y_l și z_k a căror diferență este cea mai mare. Intervalul de contracție astfel determinat nu mai poate fi micșorat.

III.

Vom arăta cum se aplică această metodă la un caz particular Să presupunem astfel că avem:

$$g(x) = \frac{1}{2}$$

și că intervalul (a, b) este egal cu $(-1, +1)$.

Ne propunem să găsim în acest caz intervalul de contracție minim pentru un polinom arbitrar de gradul al patrulea.

Avem:

$$M_0 = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{2} = 1\,, \quad M_1 = \int_{-1}^{+1} x\frac{dx}{2} = 0\,, \quad M_2 = \int_{-1}^{+1} x^2\frac{dx}{2} = \frac{1}{3}\,.$$

$$M_3 = \int_{-1}^{+1} x^3\frac{dx}{2} = 0\,, \quad M_4 = \int_{-1}^{+1} x^4\frac{dx}{2} = \frac{1}{5}\,.$$

Sistemul (16) devine:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & z & z^2 \\ 1 & 1 & 0 & 1/3 \\ y & 0 & 1/3 & 0 \\ y^2 & 1/3 & 0 & 1/5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2z \\ 1 & 1 & 0 & 1/3 \\ y & 0 & 1/3 & 0 \\ y^2 & 1/3 & 0 & 1/5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/5 \end{vmatrix} - 2y \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sau:

$$(17)\qquad \begin{cases} z^2y^2 - \dfrac{z^2+y^2}{3} + \dfrac{4}{15}zy + \dfrac{1}{5} = 0 \\ (1+3yz)(z+y) = 0. \end{cases}$$

Sistemul (17) admite soluţiile reale:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}. & y = -\sqrt{\dfrac{3}{5}} \\ z = +\dfrac{1}{\sqrt{3}}. & z = +\sqrt{\dfrac{3}{5}} \end{cases}$$

Introducând aceste valori în prima ecuaţie a sistemului cu scopul de a găsi grupele de puncte care formează involuţia de ordinul al treilea obţinem următoarele grupe de puncte omoloage:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, 0, +\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right).$$

Primul grup se completează cu punctul dela infinit. El dă lungimii intervalului de contracţie o valoare infinită. Suntem în cazul unul maxim.

Grupul al doilea de puncte ne dă intervalul minim căutat. Deci: *Intervalul minim de contracţie pentru polinomul de gradul al patrulea este pentru cazul considerat*

$$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, +\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

IV.

Se vede cum folosind teoremele clasice ale momentelor din teoria probabilităţilor, problema intervalului de contracţie se poate rezolva în întregime.

Rezultate şi mai generale decât cele obţinute se pot căpăta observând că relaţia, cunoscută în teoria momentelor:

$$(18)\quad p_1 F(x_1) + p_2 F(x_2) + \ldots + p_\nu F(x_\nu) = \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx$$

în care cantităţile p_i şi x_i sunt date, constitue o ecuaţie funcţională pentru determinarea lui $F(x)$.

Dacă:

$$p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = \int_a^b g(x)\,dx, \quad a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b.$$

toate soluţiile continue ale acestei ecuaţii *admit un* ξ *cuprins între* x_1, x_n.

Faptul remarcabil că pentru polinoame există un interval de contracţie trebue pus în legătură cu proprietatea pe care o are ecuaţia (18), ca pentru anumite valori convenabile, date valorilor x, p să admită ca soluţie un polinom arbitrar de un anumit grad.

După cum se vede, ecuaţia funcţională (18) ne defineşte o clasă cu mult mai întinsă de funcţiuni decât aceea a polinoamelor şi care se bucură de proprietatea că admite pentru ξ din formula mediei un interval de variaţie (x_1, x_n) mai restrâns decât (a, b).

Introducerea momentelor este utilă nu numai pentru rezolvarea problemei în cazul general, ci şi pentru anumite cazuri particulare, care sunt destul de interesante.

Presupunând astfel că avem $0 < a < b$, ne propunem să găsim intervalul de contracţie referitor la clasa polinoamelor

$$F = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

pentru cari coeficienţii $a_0, a_1, \ldots a_m$ sunt de acelaşi semn sau egali cu zero.

Punând condiţia clasică:

$$\int_a^b (a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m)\, g(x)\,dx = (a_0 + a_1 \xi + \ldots + a_m \xi^m) \int_a^b g(x)\,dx$$

avem pentru determinarea lui ξ următoarea ecuaţie de gradul m:

$$f(\xi) = a_m \xi^m + a_{m-1}\xi^{m-1} + \ldots + a_i \xi - \left(a_m \frac{M_m}{M_0} + a_{m-1} \frac{M_{m-1}}{M_0} + \ldots + a_1 \frac{M_1}{M_0} \right) = 0.$$

Dacă înlocuim pe ξ prin $\frac{M_1}{M_0}$, obţinem:

$$\left(\frac{M_1}{M_0}\right) = a_m \left[\frac{M_1^m}{M_0^m} - \frac{M_m}{M_0}\right] + a_{m-1}\left[\frac{M_1^{m-1}}{M_0^{m-1}} - \frac{M_{m-1}}{M_0}\right] + \ldots a_2 \left[\frac{M_1^2}{M_0^2} - \frac{M_2}{M_0}\right].$$

Ştim că momentele, referitoare la elemente pozitive, se bucură de proprietatea:

$$\sqrt[\nu]{\frac{M_\nu}{M_0}} < \sqrt[p]{\frac{M_p}{M_0}} \qquad (\nu < p).$$

Rezultă că toate parantezele din formula de mai sus sunt negative.

Presupunând că semnul tuturor coeficienţilor este pozitiv, avem atunci

$$f\left(\frac{M_1}{M_0}\right) < 0.$$

Pentru $\xi = \sqrt[m]{\frac{M_m}{M_0}}$ căpătăm:

$$f\left[\sqrt[m]{\frac{M_m}{M_0}}\right] = a_{m-1}\left[\left(\frac{M_m}{M_b}\right)^{\frac{m-1}{m}} - \frac{M_{m-1}}{M_0}\right] + \ldots + a_1\left[\left(\frac{M_m}{M_0}\right)^{1/m} - \frac{M_1}{M_0}\right].$$

Aceeaşi proprietate a momentelor ne arată că avem:

$$f\left[\left(\frac{M_m}{M_0}\right)^{1/m}\right] > 0.$$

Intre $\frac{M_1}{M_0}$ şi $\left(\frac{M_m}{M_0}\right)^{1/m}$ se găseşte deci întotdeauna un ξ.

Mai mult însă decât atât, intervalul găsit nu se mai poate restrânge. Ne convingem de acest lucru considerând polinoamele x şi x^m. Pentru primul din ele avem $\xi = \frac{M_1}{M_0}$, iar pentru al doilea $\xi = \left(\frac{M_m}{M_0}\right)^{1/m}$. Putem deci enunţa următoarea teoremă:

Dacă $0 < a < b$ *intervalul de contracţie pentru clasa polinoamelor cu coeficienţii de acelaşi semn sau nuli şi de gradul maxim* n, *este egal cu* $\frac{M_1}{M_0}$, $\left(\frac{M_m}{M_0}\right)^{1/m}$ *unde* $M_\nu = \int_a^b x^\nu g(x)\,dx$.

In acelaşi mod se dovedeşte teorema următoare:

Intervalul de contracţie pentru clasa polinoamelor

$$F(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_\nu x^{2\nu}, \quad (\nu \leqslant n)$$

unde coeficienţii a_0, a_1, a_ν *sunt de acelaşi semn sau nuli, este egal cu* $\sqrt{\frac{M_2}{M_0}}$, $\sqrt[2n]{\frac{M_{2n}}{M_0}}$.

GH. MIHOC.

REGULAMENTUL PREMIULUI „INGINER H. CAPRIEL“

Art 1.—Societatea „*Gazeta Matematică*“ acordă un premiu în valoare de 1000 lei, din venitul fondului „*Inginer H. Capriel*“, adunat în urma propunerii dela 2 Iunie 1912 a *Inginerului Ştefan Mirea* şi din venitul fondului general de premii.

Art. 2. — Premiul se acordă din 5 în 5 ani celei mai bune lucrări de matematici superioare, pure sau aplicate, ce se va prezenta Societăţii de către studenţii Universităţilor, de către elevii Şcolilor Politechnice, sau de către elevii Şcolilor Militare pregătitoare şi de aplicaţie din ţară.

Art. 3. — Lucrarea se propune de o Comisiune aleasă în acest scop şi va consta dintr'o chestiune de matematici pure sau de matematici aplicate, din programele Facultăţilor de Ştiinţe şi Şcolilor speciale de Ingineri şi Ofiţeri.

Art. 4.—Comisiunea se compune din doi membri şi un delegat şi se alege de către prima adunare generală din anul în care începe o perioadă de 5 ani. Această Comisiune pregăteşte chestiunile până în luna Mai a anului următor când se vor publica în „*Gazeta Matematică*“.

Aceleaşi chestiuni se vor publica în fiecare an în numărul „*Gazetei Matematice*“ din luna Mai, până la expirarea anului al 4-lea din perioada de 5 ani pentru care au fost propuse.

Art. 5. — Lucrările — semnate de autor — se trimit Societăţii cel mai târziu până la 1 Mai al anului care precede decernarea premiului. Decernarea se face de a doua adunare generală a celui al 5-lea an, în urma raportului Comisiunii dela art. 4, publicându-se rezultatul în numărul din Octomvrie următor.

Art. 6. — Premiul este indivizibil, iar în cazul când nu se acordă, valoarea lui se adaugă la premiul perioadei sau perioadelor următoare de 5 ani, până la decernare.

NOTE MATEMATICE

53. *Completare la rezolvarea problemei 4802.*

După ce am trimes spre publicare soluția problemei 4802 însă înainte de apariția Nr. 2 din Octomvrie 1937 am mai primit o serie de soluțiuni bune la această problemă.

Soluția D-lui O. SACTER, notând cu:

$$(1)\quad u=\frac{x+\sqrt[3]{xyz}}{x-\sqrt[3]{xyz}},\ v=\frac{y+\sqrt[3]{xyz}}{y-\sqrt[3]{xyz}}\ \text{și}\ w=\frac{z+\sqrt[3]{xyz}}{z-\sqrt[3]{xyz}},$$

va trebui să demonstrăm că

(2) $uv+vw+wu$ este independentă de x, y, z.

Dar din relațiile (1) deducem că:

$$\frac{u+1}{u-1}=\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\ ;\ \text{etc.}\ldots$$

deci:

$$\frac{u+1}{u-1}\cdot\frac{v+1}{v-1}\cdot\frac{w+1}{w-1}=1$$

care dă după efectuarea calculelor și reducerilor de rigoare că:

$$u.v+v.w+w.u=-1$$

ceea ce dovedește că expresia din enunțul problemei este independentă față de x, y, z; ea fiind constant egală cu -1.

D-l FLORESCU VICTOR (elev liceul milit. Târgoviște) rezolvă problema în următorul fel: fie:

$$E=\sum\frac{(x+a).(y+a)}{(x-a).(y-a)}$$

o funcție dependentă de x, y, z și a. Să se găsească condiția ca ea să fie independentă de aceste variabile. Avem însă că:

$$E=\frac{3xyz-3a^3-a^2\Sigma x+a\Sigma xy}{xyz-a^3+a^2\Sigma x-a\Sigma xy}=3+\frac{4a\Sigma xy-4a^2\Sigma x}{xyz-a^3-a\Sigma xy+a^2\Sigma x}.$$

Deci pentru ca E să fie independentă față de x, y, z și a va trebui să avem:

$$4a\frac{\Sigma xy-a\Sigma x}{xyz-a^3-a\Sigma xy+a^2\Sigma x}=k=\text{constant},$$

de unde:

$$k(xyz - a^3) + (4 + k)(a\Sigma x - \Sigma xy)\, a = 0.$$

Dacă:

$k = 0$ trebue ca $a\Sigma x = \Sigma xy$; iar dacă $k = -4$ va trebui ca $a^3 = xyz$.

In cazul $k = -4$, avem $E = -1$ şi suntem la problema propusă, iar pentru $k = 0$ obţinem o nouă identitate:

$$\sum' \frac{[x^2 + 2x(y + z) + yz][y^2 + 2y(z + x) + 3x]}{(x^2 + yz)(y^2 + zx)} = 3.$$

Soluţiuni analoage celei publicate în Gazetă la pag. 106 s'au primit dela D-nii: APOSTOL RADU, BODNĂRESCU M. HORIA, CETĂŢEANU STELIAN, CARDARA GH. GH., IONESCU B. M. GH., MARCOVICI EUG., PETRESCU ACHILE, POPA MIRCEA, POPESCU-ZORICA AL., POPOVICI GABRIEL, PREDESCU-ŢÂNŢĂRENI şi TILICĂ C. ŞT. D-l DOBRESCU PAUL, pune bine problema, însă dintr'o greşeală de calcul la sfârşit, găseşte că expresia este egală cu 3 în loc de -1.

GH. V.

54. *Asupra exerciţiului Nr. 33 (XLIII).*

Observăm că numitorul şi numărătorul fracţiei din membrul I al relaţiei exerciţiului, se anulează pentru $a = b$; $a = c$; $b = c$ şi pentru $a + b + c = 0$. Prin urmare dacă vom înmulţi termenii fracţiunii din membrul al doilea cu produsul:

$$(a - b)\ (c - a)\ (b - c)\ (a + b + c)$$

obţinem prin grupări convenabile termenii fracţiunii din membrul I.

I. L.

55. *O propoziţie asupra conicelor.* Se consideră faţă de o conică (c), două puncte m şi n conjugate pe diametrul (u), care taie conica în a, a'; m şi n descriu diviziuni în involuţie pe (u), cu punctele duble în a, a' şi cu punctul central c, în centrul conicei; avem deci relaţia involutivă

$$\frac{1}{am} + \frac{1}{an} = \frac{1}{ac}.$$

In particular, dacă (c) este o parabolă, relaţia precedentă devine: $am + an = 0$, deci: *fie* m *un punct în planul parabolei* (c); *polara lui, taie paralela* (u) *din* m *la axa parabolei, într'un punct* n; m *şi* n *sunt simetrice pe* (u) *faţă de parabolă.* Dacă (u) este chiar axa, se regăseşte proprietatea parabolei că *tangenta într'un punct curent, taie axa în simetricul faţă de vârf, al proiecţiei punctului de tangenţă, pe axă.*

N. N. MIHĂILEANU.

56. *O propoziţie asupra conicelor. Lemă. Pe o tangentă* τ *a unei conice* (γ) *se consideră două diviziuni omografice* (τ); *din două puncte omoloage* m, m′ *se duce tangente la* (γ) *care intersectează în* μ; *locul lui* μ *este o conică* (μ) *bitangentă conicei* (γ) *în punctele de contact cu* (γ) *ale tangentelor din punctele duble* o, o′ *ale omografiei* (τ).

Fie în adevăr, δ o dreaptă a planului, ν un punct mobil pe δ; tangentele din ν la (γ) taie pe τ în n, n', puncte ale unei omografii (δ); omografiile (τ) şi (δ) au două perechi de puncte omoloage (reale, confundate ori imaginare[1]); există deci pe δ două puncte ν_1, ν_2 astfel ca intersecţia tangentelor duse din ele la (γ) să taie pe τ în n_1, n'_1; n_2, n'_2 perechi de puncte ale omografiei (τ); dreapta δ taie deci curba (μ) în două puncte ν_1, ν_2 deci (μ) este o conică. Dacă o şi o' sunt punctele duble ale omografiei (τ), e evident că tangentele se confundă şi intersecţia lor limită este respectiv punctul de contact cu conica (ω, ω'); fie încă ω'' un al treilea punct de intersecţie a coniceler (γ), (μ); ω'' fiind un punct μ, tangentele din ω'' la γ se confundă şi taie pe τ într'un punct dublu care ar trebui să fie al treilea al omografiei (τ), ceea ce e imposibil; conicele (γ) şi (μ) intersectează deci numai în ω, ω'; celelalte două puncte de intersecţie se confundă cu acestea; conicele sunt deci bitangente în aceste puncte.

---

1) Dacă ar avea trei perechi de puncte omoloage, omografiile (τ) şi (δ) s'ar confunda; μ ar fi totdeauna pe δ; dar (δ) este o involuţie; se regăseşte corelativa teoremei FRÉGIER: *dacă pe o tangentă* τ *a unei conice* (γ) *se consideră două diviziuni în involuţie, intersecţia tangentelor la* (γ) *din două puncte omoloage, descrie o dreaptă care taie pe* (γ) *în punctele de contact ale tangentelor din punctele duble.* Invers, dacă s'ar fi dat dela început că omografia (τ) este o involuţie, procedând ca mai sus cu o dreaptă arbitrară $\varepsilon \neq \delta$, involuţiile (τ) şi (ε) au un punct dublu; un singur punct pe ε aparţine curbei (μ); curba (μ) este deci o dreaptă.

In baza precedentelor, e uşor de justificat propoziţia, *fie* (γ) *o conică înscrisă şi* (c) *o conică circumscrisă patrupunctului arbitrar* f, f', i, j; p *un punct mobil pe* (c); pf, pf' *taie o tangentă arbitrară* τ, *la* (γ) *în* m, m'; *tangentele din* m, m' *la* (γ), *diferite de* τ, *intersectează în* μ; *locul lui* μ *este o conică* (μ) *trecând prin* i, j *şi bitangentă conicei* (γ).

Dacă se duce tangenta τ prin polul ω al dreptei *ff'* faţă de conica (*c*), omografia (τ) devine o involuţie; deci (μ) o dreaptă δ dublă (din cauza bitangenţei) care trece prin *i* şi *j*.

In particular dacă *i*, *j* sunt punctele ciclice, deci *f*, *f'* focarele reale ale conicei (γ), se obţine; *fie* (c) *un cerc ce trece prin focarele* f, f' *ale unei conice* (γ); p *variabil pe cerc;* pf, pf' *taie o tangentă* τ *oarecare fixă în* m, m'; *locul intersecţiei tangentelor din* m, m' *la* (γ) *este un cerc bitangent conicei* (γ), *pe tangentele duse din punctele (reale, confundate ori imaginare) unde cercul* (c) *taie tangenta* τ. *Dacă* τ *trece prin polul dreptei* ff' *faţă de cercul* (c), *tangentele la* (γ) *din* m, m' *sunt paralele* [1]).

N. N. MIHĂILEANU.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico, publicat de B. I. BAIDAFF. Buenos-Aires. Anul XI. Nr. 5. Minimum exponenţial; proprietăţi, de M. O. GONZALES. Scurte consideraţiuni relative la înfăşurători de T. VESCAN, cu o notă de B. I. BAIDAFF. Programe de Matematică în Argentina de B. I. BAIDAFF.

Idem. Anul XI. Nr. 6. Mai 1938. Asupra unei proprietăţi a punctului MIQUEL de VIRGIL CLAUDIAN.

Buletinul „I. R. E.". Anul VI. Nr. 2. Iunie 1938. Bucureşti.

Bulletin Scientifique de L'école Politechnique de Timişoara. Tom. 8. Fasc. 1—2. 1938. Soluţiune analitică a problemei oscilaţiunilor amortizate, de V. ALACI. Asupra unei teoreme a lui FEUERBACH de V. THÉBAULT. Asupra funcţiunilor hipergeometrice confluente, de GH. TH. GHEORGHIU. Asupra unei probleme de mecanică de MIHAIL GHERMĂNESCU. Energia radiantă solară în evoluţia orbitelor planetare de T. VESCAN. Asupra unităţii în fizica teoretică de JEAN-LOUIS DESTOUCHES. Determinarea pierderilor de sarcină în conducte circulare drepte de POMPILIU NICOLAU şi VICTOR GHEORGHIU.

1) Luând cercul (*c*) cu diametrul *ff'*, deci *pf*, *pf'* perpendiculare, se regăseşte problema 4878. Considerând conica (*c*) formată de dreptele *ff'* şi *ij*, dreapta dela infinit, deci *pf*, *pf'* paralele, locul lui (μ) este deasemenea un cerc.

Bulletin de la section scientifique, publicat de GR. ANTIPA. Tom. XIX. Nr. 6—7. Bucureşti 1938.

Idem. Tom. XIX. Nr. 8—10. Bucureşti 1938.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 44. Nr. 5. Mai 1938. Menasho Wis., New-York.

Idem. Vol. 44. Nr. 6. Iunie 1938. Torsiunea în regiuni mărginite de arce circulare de I. S. SOKOLNIKOFF şi E. S. SOKOLNIKOFF. Notă asupra ecuaţiunilor integrale ale lui FREDHOLM-STIELTJES, de F. G. DRESSEL.

Journal de mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 62. Nr. 19. 1 Iulie 1938. Paris.

Idem. Anul 62. Nr. 20. 15 Iulie 1938. Paris.

Pitagora. Revistă de matematici. Anul III. Nr. 8—9 Mai — Iunie 1938 Colegiul naţional „Carol I" Craiova. Exerciţiu de calcul integral de N. MIHĂILEANU. Asupra reciprocei unei teoreme a Domnului POMPEIU de P. BOLDESCU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVIII. Nr. 5. Iulie 1938. O generalizare a coeficienţilor binominali de EUGEN VIŞA.

Idem. Anul XVIII. Nr. 6. August 1938. Soluţiunile întregi ale ecuaţiunii $x^2 - 10^n y^2 = z$ de GH. CONSTANTINESCU.

Sphinx, Revue mensuelle des questions recreatives. Anul 8. Nr. 8. August 1938. Director: M. KRAITCHIK. Bruxelles. Ultimele lupte pentru triumful calculului infinitesimal de P. SERGESCU. Formele geometrice în natură de A. SAINTE-LAGUE.

The Mathematical Gazette. Vol. XXII. Nr. 250. Iulie 1938. London.

PAUL APPÈLL. *Analyse Mathématique,* Tome I. Analyse des courbes, surfaces et fonctions usuelles, integrales simples. Ediţia V-a revăzută de GEORGES VALIRON. Gauthier-Villars. Paris 1937.

TH. I. GÂLCĂ. *Cum trebuiesc înfăptuite silozurile în România.* Bucureşti 1938.

CERERI

279. Pentru istoricul nomenclaturii matematice din România ar fi interesant să se extragă cuvintele referitoare la ştiinţele matematice din « *Vocabulaire français-valaque, d'après la dernière édition du Dictionnaire de l'Académie française, augmenté de plusieurs autres mots recueillis dans différents dictionnaires,* par P. POYENAR, *Directeur des écoles nationales,* F. AARON et G. HILL, professeurs au Collège St. Sava, Boucourest, Imprimerie du Collège St. Sava. 1840. Acolo găsim de exemplu că Românii ziceau la *compas: perghel, ţărcălău* sau *capra dogarului;* la *echer* se zicea *dreptar* etc.

Rezultatul unei asemenea cercetări ar fi folositor pentru revizuirea *Vocabularului Matematic* tipărit în *Biblioteca Gazetei Matematice*, care ni se cere a fi completat şi tipărit în o nouă ediţie.

I. IONESCU.

DIVERSE

b) **Sporirea Bibliotecii.**

HANS HARTL. Aufgaben auf der Arithmetik und Algebra. Für den Gebrauch an höheren Gewerbeschulen und für das Selbststudium zusammengestellt und metodisch geordnet. Lipsca şi Viena 1898.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. L'equazione di LAPLACE. Pavia 1907.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1882. *Fie* C *o curbă aşa ca raza de curbură în orice punct* M *să fie văzută dintr'un punct fix* O *sub un unghiu constant. Prin* O *ducem o dreaptă* Δ *făcând cu un ax fix* OX *un unghiu egal cu unghiul ce face tangenta în* M *la curbă cu dreapta* MO; *luăm pe dreapta* Δ *o lungime* OM′ = OM. *Să se arate că punctul* M′ *descrie o spirală logaritmică când punctul* M *descrie curba dată.*

† A. ANGELESCU.

Soluţia. Luăm drept axe de coordonate pe OX ca axă a x-ilor şi o perpendiculară pe ea în punctul O ca axă a y-ilor. Notăm prin: α şi β coordonatele centrului de curbură Γ în punctul M (x, y) la curba C, θ unghiul sub care este văzută raza de curbură în M din O, φ unghiul pe care-l face OΓ cu OX, ψ unghiul pe care-l face OM cu OX şi prin i unghiul pe care-l face tangenta în M la curba C cu OX.

Din enunţ rezultă că

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi} = a,$$

a fiind o constantă arbitrară. Cum

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \quad , \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''},$$

vom avea:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{yy'' + 1 + y'^2}{xy'' - y'(1+y'^2)};$$

iar

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{y}{x}.$$

Deci, (1) devine:

$$(2) \quad \frac{x(yy'' + 1 + y'^2) - y[xy'' - y'(1+y'^2)]}{x[xy'' - y'(1+y'^2)] + y(yy'' + 1 + y'^2)} = a,$$

sau:

$$(3) \quad (x + yy')(1 + y'^2) = a[y''(x^2+y^2) + (y - xy')(1+y'^2)].$$

De unde

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = a\left[\frac{y''}{1+y'^2} + \frac{y - xy'}{x^2+y^2}\right],$$

relaţie care integrată ne dă:

$$\frac{1}{2}\log C(x^2+y^2) = a\left(\operatorname{arctg} y' - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right),$$

şi cum:

$$\operatorname{arctg} y' = i \quad , \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \psi \quad , \quad i - \psi = V,$$

V fiind unghiul pe care-l face raza vectoare OM cu tangenta în M la curba C, avem mai departe

$$\frac{1}{2}\log C(x^2+y^2) = aV$$

$$\therefore \qquad C\sqrt{x^2+y^2} = e^{aV}.$$

Această relaţie scrisă sub forma

$$Cr = e^{aV},$$

unde am notat prin: $r = \sqrt{x^2+y^2}$, spune că punctul M' care va avea coordonatele polare (r, V) va descrie o spirală logaritmică, adică tocmai ce cerea enunţul problemei.

Problema admite două cazuri particulare interesante.

1^0 $a = 0$. Atunci din (3) se vede că

$$(x + yy')(1 + y'^2) = 0,$$

şi cum $1 + y'^2 \neq 0$ rezultă că:

$$x + yy' = 0,$$

ecuaţie care integrată ne dă:

$$x^2 + y^2 = C$$

adică curba C este un cerc. Locul punctului M' este tot un cerc ($V = 90^0$) care după cum se ştie este tot o spirală logaritmică particulară.

2^0 $a = \infty$, adică $\theta = 90^0$. Atunci din (2) se vede că:

$$\operatorname{arctg} y' - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0,$$

de unde:

$$y' = \frac{y}{x} \quad \therefore \quad (4) \quad y = Cx.$$

In cazul acesta $V = 0$ şi locul este tot o spirală logaritmică redusă la o dreaptă (4).

Observaţii. Cu câtva timp înainte de a se prăpădi AUREL ANGELESCU mi-a încredinţat problemele lui dela *Gazeta Matematică,* ce aveau soluţii, dându-mi şi unele indicaţii cum înţelegea el să le publice. Problema 1882 o redactasem acum câtva timp, după dorinţa sa, şi urma să i-o arăt înainte de a o da la tipar. Soarta a vrut însă altfel, lăsându-mă pe mine singur cu răspunderea problemelor lui, privându-mă astfel de sfaturile sale cu cari eram învăţat să fiu desfătat.

S'au primit soluţii bune dela D-nii: G. G. CONSTANTINESCU, ADRIAN C. GHEORGHIU, N. MIHĂILEANU, E. MORŢUN şi I. C. VASILIU.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 3319. *Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu oarecare avem relaţia:*

$$\cos A \cos B \cos C + (\sin A + \cos C)(\sin B + \cos A)(\sin C + \cos B) + \Sigma \cos A (1 + \sin B)(\sin B + \cos A) = (1 + \sin A)(1 + \sin B)(1 + \sin C).$$

ION M. MIU.

Soluție dată de D-nii: GH. M. CĂLIN, CEZAR COȘNIȚĂ, T. DIACONESCU, B. GATAIANȚU, GH. T. GHEORGHIU, IOACHIM GRIGORE, C. ISTINIE-BREZUICA, N. ȘT. MIHĂILESCU, I. NICOLAU-DOBRIDOR, AURELIU N. STOICA, TH. STOICESCU, HULUBEI TELEMAC, TR. TUNARU.

In partea I-a desvoltând și grupând convenabil avem:

$$2\cos A\cos B\cos C + \sin A\sin B\sin C + \Sigma\cos^2 A +$$
$$\Sigma\sin B(\sin A\cos B + \cos A\sin B) + \Sigma\cos A(\sin A\cos B + \cos A\sin B)$$
$$+ \Sigma\cos A\sin B.$$

Observând însă că:

$$\sin A\cos B + \cos A\sin B = \sin(A+B) = \sin C$$

și

$$\Sigma\cos^2 A + 2\cos A\cos B\cos C = 1$$

(C. d. P. Trig. pag. 394)

mai putem scrie

$$1 + \sin A\sin B\sin C + \Sigma\sin A\sin C + \Sigma\cos A\sin C + \Sigma\cos A\sin B$$

Dar:

$$\Sigma\cos A\sin C + \Sigma\cos A\sin B = \Sigma(\sin A\cos C + \cos A\sin C)$$
$$= \Sigma\sin(A+C) = \sin A + \sin B + \sin C.$$

Deci expresia din partea întâia se poate scrie:

$$1 + \sin A\sin B\sin C + \sin A\sin B + \sin B\sin C$$
$$+ \sin C\sin A + \sin A + \sin B + \sin C.$$

Aceasta este însă chiar desvoltarea produsului din partea doua, deci tocmai ce se cerea a demonstra.

Alte soluții s'au primit dela D-nii: CORN. N. POPESCU și V. NOVACU.

G-L G. I. LITEANU.

PROBLEMA 3343. *Fie*:

$$P_m = a^m + a^{m-1}b + \ldots + ab^{m-1} + b^m.$$

Să se arate că expresiunea:

$$E = \frac{P_n}{n+1} \cdot \frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{n+m}}{n+m+1}$$

este divizibilă cu $(a-b)^2$ *și să se exprime câtul cu ajutorul lui* $P_1, P_2, \ldots, P_{m+n-2}$.

Se presupune m *și* n, *întregi și pozitivi.*

D. V. IONESCU.

Să notăm:

$$\Delta_{m,n} = \frac{P_n}{n+1} \cdot \frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{n+m}}{n+m+1} .$$

Pentru a uşura expunerea vom arăta că $\Delta_{m,1}$ şi $\Delta_{m,2}$ sunt divizibili cu $(a-b)^2$. Metoda pe care o întrebuinţăm este generală şi se aplică şi pentru m, n oarecare.

1. $n = 1$. Putem scrie:

$$\Delta_{m,1} = \frac{(m+2)\,P_1\,P_m - (2m+2)\,P_{m+1}}{2\,(m+1)\,(m+2)} .$$

Rămâne deci să arătăm că:

$$D_{m,1} = (m+2)\,P_1 P_m - (2m+2)\,P_{m+1},$$

este divizibil cu $(a-b)^2$.

Putem scrie:

$$D_{m,1} = (m+2)(a+b)(a^m + a^{m-1}b + \ldots + ab^{m-1} + b^m)$$
$$- (2m+2)(a^{m+1} + a^m b + \ldots + ab^m + b^{m+1})$$

sau:

$$D_{m,1} = 2(a^m b + a^{m-1}b + \ldots + ab^m) - m(a^{m+1} + b^{m+1}).$$

Putem scrie pe $D_{m,1}$ sub forma:

$$D_{m,1} = b^m(a-b) + b^{m-1}(a^2 - b^2) + \ldots + b(a^m - b^m)$$
$$- a^m(a-b) - a^{m-1}(a^2 - b^2) - \ldots - a(a^m - b^m),$$

adică:

$$D_{m,1} = -[(a-b)(a^m - b^m) + (a^2 - b^2)(a^{m-1} - b^{m-1}) + \ldots$$
$$+ (a^m - b^m)(a-b)].$$

Sub această formă se vede bine că $D_{m,1}$ este divizibil cu $(a-b)^2$, iar câtul este de asemenea pus în evidenţă. Avem:

$$D_{m,1} = -(a-b)^2[P_{m-1} + P_1 P_{m-2} + \ldots + P_{m-2}P_1 + P_{m-1}]$$

şi prin urmare

$$\Delta_{m,1} = -\frac{(a-b)^2}{2(m+1)(m+2)}[P_{m-1} + P_1 P_{m-2} + \ldots + P_{m-2}P_1 + P_{m-1}].$$

2. $n = 2$. Avem :

$$\Delta_{m,2} = \frac{P_2}{3} \cdot \frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{m+2}}{m+3}$$

sau :

$$\Delta_{m,2} = \frac{(m+3)\,P_2\,P_m - (3m+3)\,P_{m+2}}{3\,(m+1)\,(m+3)} .$$

Rămâne deci să arătăm că :

$$D_{m,2} = (m+3)\,P_2\,P_m - (3m+3)\,P_{m+2}$$

este divizibil cu $(a-b)^2$.

Putem scrie :

$$D_{m,2} = (m+3)\,(a^2+ab+b^2)\,(a^m + a^{m-1}b + \ldots + ab^{m-1} + b^m)$$
$$-(3m+3)\,(a^{m+2} + a^{m+1}\,b + a^m\,b^2 + \ldots + b^{m+2}).$$

Făcând calculele se vede că putem scrie :

$$D_{m,2} = -2m\,(a^{m+2} + b^{m+2}) - (m-3)\,(a^{m+1}\,b + ab^{m+1})$$
$$+6\,(a^m\,b^2 + a^{m-1}\,b^3 + \ldots + a^2\,b^m).$$

Numărul de termeni în coeficientul lui 6 este $m-1$, vom aranja deci termenii astfel :

$$D_{m,2} = -2\,(m-1)\,(a^{m+2} + b^{m+2}) - (m-1)\,(a^{m+1}\,b + ab^{m+1})$$
$$+6\,(a^m\,b^2 + a^{m-1}\,b^3 + \ldots + a^2\,b^m)$$
$$-2\,(a^{m+2} + b^{m+2}) + 2\,(a^{m+1}\,b + b^{m+1}a).$$

Să aranjem termenii acum în modul următor :

$$D_{m,2} = ab^m\,(a-b) + ab^{m-1}\,(a^2-b^2) + \ldots + ab^2\,(a^{m-1} - b^{m-1})$$
$$-a^m\,b\,(a-b) - a^{m-1}\,b\,(a^2-b^2) - \ldots - a^2\,b\,(a^{m-1} - b^{m-1})$$
$$+2\,[b^m\,(a^2-b^2) + b^{m-1}\,(a^3-b^3) + \ldots + b^2\,(a^m - b^m)]$$
$$-2\,[a^m\,(a^2-b^2) + a^{m-1}\,(a^3-b^3) + \ldots + a^2\,(a^m - b^m)]$$
$$+2b^{m+1}\,(a-b) - 2a^{m+1}\,(a-b),$$

adică :

$$D_{m,2} = -ab\,[(a-b)\,(a^{m-1} - b^{m-1}) + (a^2-b^2)\,(a^{m-2} - b^{m-2}) + \ldots$$
$$+(a^{m-1} - b^{m-1})\,(a-b)] - 2\,[(a^m - b^m)\,(a^2-b^2)$$
$$+(a^{m-1} - b^{m-1})\,(a^3-b^3) + \ldots + (a^2-b^2)\,(a^m - b^m)].$$
$$-2\,(a^{m+1} - b^{m+1})\,(a-b).$$

Sub această formă se vede bine că $D_{m,2}$ este divizibil cu $(a-b)^2$. In plus, câtul este pus în evidență. Putem scrie:

$$D_{m,2} = -(a-b)^2 [ab(P_{m-2} + P_1 P_{m-3} + \ldots + P_{m-2}) + 2(P_m + P_{m-1} P_1 + P_{m-2} P_2 + \ldots + P_1 P_{m-1})]$$

adică:

$$\Delta_{m,2} = -\frac{(a-b)^2}{3(m+1)(m+3)} [ab(P_{m-2} + P_1 P_{m-3} + \ldots + P_{m-2}) + 2(P_m + P_{m-1} P_1 + \ldots + P_1 P_{m-1})].$$

3. Urmând aceeași metodă pentru $\Delta_{m,3}$ putem să dăm rezultatele numai. Avem:

$$\Delta_{m,3} = \frac{P_3}{4} \frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{m+3}}{m+4} = \frac{D_{m,3}}{4(m+1)(m+4)} .$$

$$D_{m,3} = -3(m-2)(a^{m+3} + b^{m+3}) - 2(m-2)(a^{m+2} b + ab^{m+2}) - (m-2)(a^{m+1} b^2 + a^2 b^{m+1}) + 12(a^m b^3 + a^{m-1} b^4 + \ldots + a^3 b^m) - 6(a^{m+3} + b^{m+3}) + 6(a^{m+1} b^2 + a^2 b^{m+1}).$$

Mai putem scrie:

$$D_{m,3} = -a^2 b^2 [(a^{m-2} - b^{m-2})(a-b) + (a^{m-3} - b^{m-3})(a^2 - b^2) + \ldots + (a-b)(a^{m-2} - b^{m-2})] - 2ab[(a^{m-1} - b^{m-1})(a^2 - b^2) + (a^{m-2} - b^{m-2})(a^3 - b^3) + \ldots + (a^2 - b^2)(a^{m-1} - b^{m-1})] - 3[(a^m - b^m)(a^3 - b^3) + (a^{m-1} - b^{m-1})(a^4 - b^4) + \ldots + (a^3 - b^3)(a^m - b^m) - 6(a^{m+1} - b^{m+1})(a^2 - b^2).$$

De unde rezultă că:

$$\Delta_{m,3} = -\frac{(a-b)^2}{4(m+1)(m+4)} [a^2 b^2 (P_{m-3} + P_{m-4} P_1 + \ldots + P_{m-3}) + 2ab(P_{m-2} P_1 + P_{m-3} P_2 + \ldots + P_1 P_{m-2}) + 3(P_{m-1} P_2 + P_{m-2} P_3 + \ldots + P_2 P_{m-1}) + 6 P_1 P_m]$$

4. Metoda se urmează la fel pentru $n = 4, 5, \ldots$

Cititorul n'are nicio dificultate pentru a stabili formele finale în aceste cazuri.

D. V. I.

PROBLEMA 3650. *Se dă în plan o dreaptă fixă* Δ, *un punct fix* A *şi un punct mobil* P. *Se cere să se arate care este curba loc* Γ *a punctului* P, *ştiind că dacă din* A *se ridică o perpendiculară* AM *pe* AP (M *fiind pe* Δ), *dreapta* MP *este tangentă la curba* Γ.

M. NICOLAU.

Soluţie şi generalizare. Iau pe Δ ca axă de Oy şi perpendiculara din A pe Δ ca axă Ox. Dacă $P(x, y)$ atunci tangenta în P la Γ va fi:

$$Y - y = y'(X - x)$$

de unde se deduce $M(O, y - xy')$. Rezultă că ecuaţiile dreptelor AP şi AM sunt respectiv

$$Y = \frac{y}{x - a}(X - a)$$

$$Y = \frac{y - xy'}{-a}(X - a).$$

Presupunând că dreptele AP, AM fac între ele un unghiu constant φ, ecuaţiile precedente conduc la următoarea ecuaţie a curbei Γ pentru cazul general

$$\frac{\dfrac{y}{x-a} + \dfrac{y - xy'}{a}}{1 - \dfrac{y(y - xy')}{a(x - a)}} = \operatorname{tg}\varphi$$

care, sub formă lineară este

$$(x + x\operatorname{tg}\varphi - a)(y\,dx - x\,dy) + (a^2\operatorname{tg}\varphi + ay - ax\operatorname{tg}\varphi)\,dx = 0.$$

Efectuând transformarea

$$x = X + a \quad , \quad y = Y$$

obţin ecuaţia de tipul clasic al lui JACOBI

$$(X + Y\operatorname{tg}\varphi)(Y\,dX - X\,dY) - a(X + Y\operatorname{tg}\varphi)\,dY + a(Y - X\operatorname{tg}\varphi)\,dX = 0$$

în care făcând transformarea

$$Y = UX$$

obţin ecuaţiunea

$$(U^2 + 1)\,a\operatorname{tg}\varphi\frac{dX}{dU} + aX(1 + U\operatorname{tg}\varphi) + X^2(1 + U\operatorname{tg}\varphi) = 0$$

de tipul cunoscut BERNOULLI.

Pentru integrarea acestei ecuaţiuni pun

$$Z = \frac{1}{X}$$

şi obţin ecuaţia diferenţială lineară de primul ordin

$$\frac{dZ}{dU} - \frac{1 + u\,\mathrm{tg}\varphi}{(1+u^2)\,\mathrm{tg}\varphi} Z - \frac{1 + u\,\mathrm{tg}\varphi}{(1+u^2)\,a\,\mathrm{tg}\varphi} = 0$$

a cărei integrală generală este

$$Z = e^{\int \frac{1+u\,\mathrm{tg}\varphi}{(1+u^2)\,\mathrm{tg}\varphi}\,du} \left[C + \int \frac{1 + u\,\mathrm{tg}\varphi}{(1+u^2)\,a\,\mathrm{tg}\varphi} e^{-\int \frac{1+u\,\mathrm{tg}\varphi}{(1+u^2)\,\mathrm{tg}\varphi}\,du}\,du \right]$$

care se mai scrie sub forma

$$Z = C e^{\int \frac{1+u\,\mathrm{tg}\varphi}{(1+u^2)\,\mathrm{tg}\varphi}\,du} - \frac{1}{a} = C\sqrt{1+u^2}\; e^{\frac{\mathrm{arc\,tg}\,u}{\mathrm{tg}\varphi}} - \frac{1}{a}$$

şi revenind la transformările iniţiale

$$(1) \qquad x = C\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\; e^{\mathrm{cotg}\varphi\ \mathrm{arctg}\ \frac{y}{x-a}}$$

care pentru cazul particular al problemei, când unghiul φ este 90^0, devine:

$$(2) \qquad x^2 = c^2(x-a)^2 + c^2y^2.$$

Se conchide că ecuaţia curbei Γ este ecuaţia (1) în cazul general şi ecuaţia (2) în cazul problemei.

Ecuaţia (2) reprezintă:

Parabole pentru $c = \pm 1$

Hiperbole pentru $-1 < c < 1$

Elipse pentru $c < -1$ şi $1 < c$.

G. G. CONSTANTINESCU.

Notă. Se ajunge la acelaşi rezultat dacă se procedează direct după indicaţiile din enunţ. Se scrie ecuaţia dreptei AP, ecuaţia unei drepte care trece prin A şi face un unghiu constant cu AP şi se caută intersecţia M cu Δ. Apoi se scrie că coeficientul unghiular al dreptei PM este y' şi se găseşte ecuaţia diferenţială care a condus la curba (1).

Pentru cazul particular $\varphi = 90^0$ se regăseşte proprietatea caracteristică a conicelor anume că *segmentul de tangentă cuprins între punctul de tangenţă şi intersecţia tangentei cu o directoară este văzut sub un unghiu drept din focarul corespunzător acelei directoare.*

G-L GH. B.

PROBLEMA 4038. *Fie* $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ *rădăcinile ecuaţiei*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Ce valori vor lua coeficienţii p, q, r, *în cazul când* $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, *pentru ca rădăcinile să se raporte ca numerele 3, 7, 6?*

In aceste condiţiuni să se afle rădăcinile ecuaţii date.

IULIU DEAC.

Soluţie dată de Domnii: N. N. MIHĂILEANU, N. N. ALDEA, C. V. CNISKY, H. IONESCU-BISS, SUBLOC. C. D. IONESCU-ŢIU, M. MARGULIUS, EM. MEREUŢĂ, M. L. A. NEGREA, ŞT. OLTEANU, I. I. PETRESCU, G. ŞT. ROŞCA, V. VASU.

Se cere ca:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{3} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{7} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{6}$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{7}{3}\operatorname{tg}\alpha \quad ; \quad \operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\alpha.$$

Cum

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0,$$

avem:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma.$$

Inlocuind în funcţie de $\operatorname{tg}\alpha$, se obţine:

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{7}}$$

şi deci

$$\operatorname{tg}\beta = \pm\frac{1}{3}\sqrt{7 \times 8} \quad , \quad \operatorname{tg}\gamma = \pm 2\sqrt{\frac{8}{7}}.$$

Relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi ne dau:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = -p; \\ \Sigma \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = q \\ \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = -r = -p. \end{cases}$$

De unde:

$$p = -(1 + \frac{7}{3} + 2)\operatorname{tg}\alpha = \mp \frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{7}}$$

$$q = \left(\frac{7}{3} + \frac{14}{3} + 2\right)\operatorname{tg}^2\alpha = 9\operatorname{tg}^2\alpha = 9.\frac{8}{7}$$

$$r = p = -2 \times \frac{7}{3}\operatorname{tg}^3\alpha = \mp \frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{7}}.$$

Ecuaţia devine deci:

$$x^3 \mp \frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{7}}\,x^2 + \frac{72}{7}x \mp \frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{7}} = 0.$$

Notă. 1. Domnii M. MARGULIUS şi ŞT. OLTEANU au calculat şi valorile

$$\alpha = 46^0\,54'\,41'' \;;\; \beta = 68^0\,9'\,16'' \;;\; \gamma = 64^0\,56'\,3'',$$

corespunzătoare rădăcinilor pozitive; e uşor de văzut că se pot lua şi valorile lui α, β, γ ce corespund şi rădăcinilor negative combinând arcele din cadranele 2 şi 4 cu valorile ce convin pentru a satisface condiţia

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

De exemplu putem lua:

$$\alpha = -46^0\,54'\,41''$$

$$\beta = 111^0\,50'\,46''$$

$$\gamma = 115^0\,3'\,57''.$$

2. D-l A. EM. BĂDESCU a tratat cazul când α, β şi γ s'ar fi raportat ca numerele 3, 7 şi 6.

3. Autorul problemei în indicarea rezolvirei a studiat, nu cazul propus, ci când $\alpha + \beta + \gamma = 90^0$, găsind

$$p = \pm\frac{16}{9}, \qquad q = 1, \qquad r = \pm\frac{14}{81};$$

iar ca rădăcini valorile

$$\operatorname{tg}\alpha = \mp\frac{1}{3} \;;\; \operatorname{tg}\beta = \mp\frac{7}{9} \;;\; \operatorname{tg}\gamma = \mp\frac{2}{3}.$$

GENERAL G. LITEANU.

PROBLEMA 4088. *Notând cu* ω *centrul cercului lui* EULER *al triunghiului* ABC *şi cu* ρ *puterea centrului de greutate al triunghiului în raport cu acest cerc, să se demonstreze egalităţile:*

$$\overline{A\omega}^2 + \overline{B\omega}^2 + \overline{C\omega}^2 = \frac{1}{4} R^2 (11 + 8 \cos A \cos B \cos C)$$

$$\rho = -\frac{1}{36}(a^2 + b^2 + c^2).$$

CEZAR COŞNIŢĂ.

Soluţie dată de Domnii: CEZAR IVĂNESCU, N. N. MIHĂILEANU, SUBLOC. TH. N. PANAITE şi G. ST. ROŞCA.

Fie O şi H respectiv centrul cercului circumscris şi ortocentrul triunghiului ABC.

Ţinând seamă de teorema: „Intr'un triunghiu suma pătratelor a două laturi este egală cu de două ori suma pătratelor medianei, cuprinsă între ele, şi a jumătăţii laturii a treia“,

putem scrie referindu-ne la triunghiul AOH, în care $A\omega$, e mediană:

$$\overline{AO}^2 + \overline{AH}^2 = 2\left(\overline{A\omega}^2 + \frac{\overline{OH}^2}{4}\right)$$

$$\therefore \quad \overline{A\omega}^2 = \frac{2\overline{AO}^2 + 2\overline{AH}^2 - \overline{OH}^2}{4}.$$

Analog se obţine:

$$\overline{B\omega}^2 = \frac{2\overline{BO}^2 + 2\overline{BH}^2 - \overline{OH}^2}{4}$$

$$\overline{C\omega}^2 = \frac{2\overline{CO}^2 + 2\overline{CH}^2 - \overline{OH}^2}{4}.$$

Deci:

$$\overline{A\omega}^2 + \overline{B\omega}^2 + \overline{C\omega}^2 = \frac{2(\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2) + 2(\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2) - 3\overline{OH}^2}{4}.$$

Dar:

$$AO = BO = CO = R \ ; \quad AH = 2R\cos A,$$

$$BH = 2R\cos B \ , \ CH = 2R\cos C;$$

şi

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 9R^2 - 4R^2 \Sigma \sin^2 A.$$

Putem aşa dar scrie:

$$\overline{A\omega}^2+\overline{B\omega}^2+\overline{C\omega}^2=\frac{6R^2+8R^2\sum\cos^2A-27R^2+12R^2\sum\sin^2A}{4}$$

$$=\frac{6R^2+8R^2\sum(\sin^2A+\cos^2A)-27R^2+4R^2\sum\sin^2A}{4}$$

$$=\frac{6R^2+24R^2-27R^2+4R^2\sum\sin^2A}{4}=\frac{3R^2+4R^2\sum\sin^2A}{4}.$$

Şi cum

$$\sum\sin^2A=2+2\cos A\cos B\cos C,$$

rezultă:

$$\overline{A\omega}^2+\overline{B\omega}^2+\overline{C\omega}^2=\frac{3R^2+4R^2(2+2\cos A\cos B\cos C)}{4}$$

$$=\frac{1}{4}R^2(11+8\cos A\cos B\cos C)$$

prima egalitate este astfel stabilită.

Pentru a stabili pe a doua să ne amintim că puterea unui punct în raport cu un cerc este egală în mărime şi semn cu diferenţa dintre pătratul distanţei punctului la centrul cercului şi pătratul razei cercului.

In cazul problemei, însemnând prin G, centrul de greutate şi ţinând seama că raza cercului lui EULER este $\frac{R}{2}$ (R fiind raza cercului circumscris lui ABC) avem:

$$\rho=\overline{G\omega}^2-\frac{R^2}{4}.$$

Dar:

$$\overline{G\omega}=\frac{OH}{6},$$

deci

$$\rho=\frac{\overline{OH}^2}{36}-\frac{R^2}{4}=\frac{\overline{OH}^2-9R^2}{36}=\frac{9R^2-(a^2+b^2+c^2)-9R^2}{36}$$

$$=-\frac{1}{36}(a^2+b^2+c^2)$$

c. c. t. d.

— S'au primit soluţii foarte bune dela Domnii: N. N. ALDEA, M. MARGULIUS, D. D. MAVRODIN, M. L. A. NEGREA, ST. OLTEANU, I. C. PARAPEANU, M. I. POPESCU-STĂNEŞTI, P. VARLAM, unele în parte diferite de soluţia dată mai sus, altele servindu-se de relaţiile stabilite în Gaz. Mat. Vol. XXXVII, pag. 104, 105.

— Domnul Subloc. I. G. ZAMFIRESCU, a trimis o foarte bună soluţie, servindu-se în stabilirea relaţiilor din enunţ, de triunghiul anticomplimentar triunghiului ABC.

Notă. Puterea ρ este negativă, căci G este în interiorul cercului lui EULER; în enunţul propus, autorul nu a ţinut seama de semn.

Dintre rezolvitori numai Domnii SUBLOC. I. G. ZAMFIRESCU şi CEZAR IVĂNESCU au demonstrat şi indicat semnul puterei, corectând expresia lui ρ.

GENERAL G. LITEANU.

PROBLEMA 4495. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin z + \cos z = i,$$

unde i *este simbolul imaginar.*

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-l NEGREA A. MIRCEA-LEONTE (Brăila). Punând $e^{iz} = u$, în baza definiţiei funcţiunilor trigonometrice în domeniul complex, avem

$$2i \sin z = u - \frac{1}{u}, \quad 2\cos z = u + \frac{1}{u},$$

aşa încât ecuaţia din enunţ devine

$$\frac{1}{2i}\left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = i$$

$$\therefore \quad (i+1)u^2 + 2u + (i-1) = 0,$$

ecuaţie care rezolvată ne dă

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{1+i} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}(1-i).$$

In baza notaţiei noastre avem deci

$$e^{iz} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}(1-i) \qquad \therefore \quad iz = \log\left[\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}(1-i)\right],$$

logaritmii fiind consideraţi în domeniul complex.

Dacă luăm semnul + avem succesiv

$$z=\frac{1}{i}\log\left\{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}$$

$$=-i\left[\log\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+i\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\therefore\ (1)\quad z=\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)-i\log\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},\qquad (k\ \text{întreg})$$

iar dacă luăm semnul —, avem

$$z=\frac{1}{i}\log\left[\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$=-i\left[\log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}+i\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$\therefore\ (2)\quad z=\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-i\log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.\qquad (k\ \text{întreg})$$

Soluţiile problemei sunt date de (1) şi (2).

Observaţii. 1°. D-l AL. ARŞAVSCHI a trimis o soluţie, care dacă nu avea greşeli de calcul, era foarte bună.

2°. D-l D. MAVRODIN a dat o soluţie foarte bună numai că a folosit formulele cunoscute din domeniul real fără a menţiona că aceste formule sunt valabile şi în domeniul complex.

3°. Această problemă se găseşte rezolvată şi în „*Culegere de probleme de trigonometrie* (partea I) de V. CRISTESCU şi revăzută de subsemnatul, în Cap. XXVIII, capitol care se ocupă numai cu probleme de acest fel.

4°. Am mai primit încă 14 soluţii toate greşite. Ba mai mult, am primit şi un *articol* care se ocupa cu această problemă, din care se vedea bine că autorul, elev al Şcoalei Politechnice, nu cunoştea definiţia funcţiunilor trigonometrice în domeniul complex.

Problema 4495 cere cunoştinţe de Matematici superioare care depăşesc cadrul elementar al Matematicelor de liceu. De aceea nu mă miră că am primit atâtea soluţii greşite ale căror autori sunt în majoritate elevi de liceu. M'a mirat însă faptul că la această problemă am primit şi trei soluţii, foarte bune, toate la fel, dela

trei elevi din cl. VI-a dela acelaşi liceu. Din această cauză am fost convins că soluţia comună nu era a lor. Poate că greşesc spunând acest lucru, dar prefer să greşesc eu decât să încurajez unele obiceiuri care nu sunt deloc în concordanţă cu scopurile acestei reviste.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4570. *Să se arate că în orice triunghiu între raza cercului înscris, razele cercurilor exînscrise şi înălţimi există relaţiile:*

$$(1)\qquad \frac{1}{r}+\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=2\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

$$(2)\qquad \frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=4\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right).$$

CPT. COMANDOR GR. ZAPAN.

I. *Soluţie* dată de D-l A. GLODEN (Luxembourg).

Relaţia (1) este o consecinţă imediată a celor două relaţii cunoscute:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

Pentru a demonstra relaţia (2) este suficient de a stabili că:

$$\frac{1}{r}\sum\frac{1}{r_a}+\sum\frac{1}{r_b r_c}=4\sum\frac{1}{h_b h_c}$$

sau:

$$(\alpha)\qquad \frac{\sum r_b r_c + r\sum r_a}{r\, r_a r_b r_c}=\frac{4\sum h_a}{h_a h_b h_c}.$$

Dar se ştie că:

$$\sum \sin B\,\sin C=\frac{r\sum r_a+\sum r_b r_c}{4R^2}$$

deci:

$$\sum h_a = 2R\sum \sin B\,\sin C=\frac{r\sum r_a+\sum r_b r_c}{2R}.$$

Substituind în (α) rămâne de demonstrat:

$$\frac{2R\,\Sigma h_a}{r r_a r_b r_c} = \frac{4\,\Sigma h_a}{h_a h_b h_c}$$

$$\therefore\ R h_a h_b h_c = 2 r r_a r_b r_c$$

$$\therefore\ R\,\Pi(2R\ \sin B\ \sin C) = 2 r r_a r_b r_c\,;\quad (\Pi = \text{produs})$$

$$\therefore\ 8R^4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = 2 r r_a r_b r_c$$

$$\therefore\ 2S^2 = 2S^2$$

căci după teorema lui LHUILIER:

$$r r_a r_b r_c = S^2.$$

II. *Soluție* dată de D-ra ALEXANDRA A. VASILESCU și de D-nii: O. IANCULESCU și O. SACTER.

Din identitățile:

$$\begin{cases} p + (p-a) + (p-b) + (p-c) = a + b + c \\ p^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{cases}$$

deducem:

$$\begin{cases} \dfrac{p}{S} + \dfrac{p-a}{S} + \dfrac{p-b}{S} + \dfrac{p-c}{S} = 2\left(\dfrac{a}{2S} + \dfrac{b}{2S} + \dfrac{c}{2S}\right) \\ \dfrac{p^2}{S^2} + \dfrac{(p-a)^2}{S^2} + \dfrac{(p-b)^2}{S^2} + \dfrac{(p-c)^2}{S^2} = 4\left(\dfrac{a^2}{4S^2} + \dfrac{b^2}{4S^2} + \dfrac{c^2}{4S^2}\right) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = 2\left(\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}\right) \\ \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r_a^2} + \dfrac{1}{r_b^2} + \dfrac{1}{r_c^2} = 4\left(\dfrac{1}{h_a^2} + \dfrac{1}{h_b^2} + \dfrac{1}{h_c^2}\right). \end{cases}$$

III. *Soluție* dată de D-l O. IANCULESCU:

Folosim relațiunile (G. M. XXI, 357):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} \quad \dfrac{1}{r_b} = \dfrac{1}{h_c} + \dfrac{1}{h_a} - \dfrac{1}{h_b} \\ \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_a} \quad \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c} \end{cases}$$

cari adunate între ele ne dau:

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=2\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right).$$

Dacă le ridicăm la pătrat obţinem:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}+2\left(\frac{1}{h_a h_b}+\frac{1}{h_b h_c}+\frac{1}{h_c h_a}\right)$$

$$\frac{1}{r_a^2}=\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}+\frac{1}{h_a^2}+2\left(\frac{1}{h_b h_c}-\frac{1}{h_c h_a}-\frac{1}{h_a h_b}\right)$$

$$\frac{1}{r_b^2}=\frac{1}{h_c^2}+\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+2\left(\frac{1}{h_c h_a}-\frac{1}{h_a h_b}-\frac{1}{h_b h_c}\right)$$

$$\frac{1}{r_c^2}=\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}+2\left(\frac{1}{h_a h_b}-\frac{1}{h_b h_c}-\frac{1}{h_c h_a}\right)$$

din cari, prin adunare, rezultă:

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=4\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right).$$

IV. Au mai rezolvat problema D-nii: M. AMĂRĂŞTEANU, R. APOSTOL, I. BAUMGARTNER, ST. BEGU, E. BEIU-PALADI, E. BLAGA, I. BOGDAN, G. BOIANGIU, I. BOROŞ, V. BUCUR, C. BURSAN, I. BUZINCU, A. CĂLINESCU, V. CEAUŞESCU, D. CERCELARU, C. CHIRIAC, I. CIUCĂ, P. COJOCARU, A. CORNĂŢEANU, C. COTESCU, I. COTIGHER, I. ENACHE, DORIN FILIPESCU, I. FLORESCU, V. FLORESCU, C. GAVRILESCU, C. GHIŞOIU, F. GRABOVSCHI, M. GRUMĂZESCU, S. LERNOVICI, M. MĂNAC, E. MARCOVICI, DAN MARIN, NĂSTASE MARIN, GR. MARTEŞ. D. MATEI, N. MIHALCEA, N. MILU, E. MODÂLCĂ, ST. MOISOVICI, M. NEGREA, V. PĂDUREŢ, I. PAREPEANU, I. PETRESCU, A. POPESCU-ZORICA, GAVRIL POPOVICI, M. POSTELNICESCU, T. PREDOIESCU, D. RADA, M. ROŞCULEŢ, D. SACTER, C. SĂNDULACHE, J. SEGALL, I. STREDER, TILICĂ ŞTEFAN, N. ŞTEFĂNESCU, DORIN THEODORESCU, RADU ŢIGHILIU, ILIE ŢIŢEICA, MIRCEA VASILESCU-ŞTABU, FL. VASILOSCHI.

Notă. 1) — D-l V. CEAUŞESCU observă că:

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{S^2}=\frac{4}{S}\operatorname{cotg}\omega$$

ω fiind unghiul lui BROCARD.

2) — D-l TUDOR STOICESCU a rezolvat problema stabilind relaţia generală :

$$2^n \sum \frac{1}{h_a^n} = \sum \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right)^n .$$

3) — D-ra ALEXANDRA A. VASILESCU observă că o soluţie a problemei 4570 se găseşte în *Compléments de Trigonométrie, par F. J.*, ediţia 1896, pag. 192.

PROBLEMA 4792. A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu, să se stabilească relaţia :*

$$\frac{2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C + \Sigma \sin^2 A \sin^2 B (\sin^2 A + \sin^2 B)}{\Sigma \sin A \sin B \sin (B - A)} = \frac{(\sin^2 A + \sin^2 B)(\sin^2 B + \sin^2 C)(\sin^2 C + \sin^2 A)}{\sin (B - C) \sin (C - A) \sin (A - B)} .$$

C. IONESCU-BUJOR.

1°. *Soluţie şi generalizare :*

In identitatea

$$2abc + \Sigma ab (a + b) = (a + b)(b + c)(c + a)$$

punând

$$a = \sin^2 \alpha \quad , \quad b = \sin^2 \beta \quad , \quad c = \sin^2 \gamma ,$$

obţinem

$$(I) \qquad 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma + \Sigma \sin^2 \alpha \sin^2 \beta (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)$$
$$= (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)(\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)(\sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha).$$

Şi cum [1]):

$$(II) \qquad \Sigma \sin \alpha \sin \beta \sin (\beta - \alpha) = \sin (\alpha - \beta) \sin (\beta - \gamma) \sin (\gamma - \alpha),$$

împărţind egalităţile (I) şi (II) obţinem generalizarea identităţii problemei.

Domnul VICTOR L. FLORESCU (Liceul militar N. Filipescu) a semnalat generalizarea. Soluţii analoage pentru cazul particular al problemei date de D-nii : D. D. MATEI (bacalaureat Iaşi), TR. PREDOIESCU-ŢÂNTĂRENI (bacalaureat), S.-LT. MARTEŞ GRIGORE, E. S.

---

1) V. CRISTESCU. Culegere de probleme de trigonometrie. Ed. II. Partea I, problema 18.IX.

MODÂLCĂ, I. D. DIACONESCU şi ŞTEFAN C. TILICĂ (Liceul Traian T.-Severin), P. P. COJOCARU şi SANDU R. TURCU (Liceul militar Iaşi), DORIN N. THEODORESCU (Liceul militar N. Filipescu), M. AL. VASILESCU-STABU (Liceul Mihai-Viteazul Alba-Iulia), H. L. REISCHER şi I. I. SOLOMON (Iaşi).

2°. Domnii MIRCEA A. NEGREA (Brăila), S.-LT. I. C. PAREPEANU şi N. D. ŞTEFĂNESCU (Liceul militar Nicolae Filipescu) au stabilit identitatea problemei punând

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = l, \quad \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = m, \quad \frac{\sin^2 C}{\sin^2 A} = n$$

şi folosind relaţiile:

$$(l+1)(m+1)(n+1) = lmn + \Sigma lm + \Sigma l + 1$$

$$(l-1)(m-1)(n-1) = lmn - \Sigma lm + \Sigma l - 1$$

cu $lmn = 1$.

3°. Au soluţionat problema pe căi mai complicate Domnişoara GEORGETTA G. ROMAŞCAN (Şcoala Centrală Bucureşti) şi D-nii: S.-LT. MIHAI C. I. VLAD (Student Cluj), S.-LT. MIRCEA GRUMĂZESCU, I. GR. BOGDAN şi N. I. MILU (Şcoala pregătitoare ofiţeri), RADU APOSTOL şi MIREL D. STOENESCU (Liceul militar N. Filipescu Târgovişte), G. A. RUMICI (Orheiu), IOAN STREDER (Iaşi), IOAN CĂLIN DIMITRIU (Galaţi), MARCEL N. ROŞCULEŢ, RADU I. CIURESCU (Colegiul naţional Sf. Sava Bucureşti), HORIA M. BODNĂRESCU (Seminarul pedagogic Titu Maiorescu), A. POPESCU-ZORICA (Lic. Sf. Iosif Bucureşti), JOE SEGAL, (Liceul Libros), MIRCEA D. POPA şi CONSTANTIN V. PANTELIMON (Liceul militar Iaşi).

C. I. B.

PROBLEMA 4830. *Să se stabilească natura seriilor care au termenul general*

$$u_n = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \quad \text{sau} \quad v_n = (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}.$$

C_{2n}^n *este numărul combinărilor fără repetiţie a* $2n$ *obiecte luate câte* n.

TH. ANGHELUŢĂ.

Au rezolvat problema D-nii: DIMITRIE MAVRODIN (Student); ALEX. POPESCU-ZORICA; TRAIAN PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI; ADOLF O. ŞAICHIN (Lic. Mateiu Basarab, Buc.); I. ŢIŢEICA.

Soluţie. Avem:

$$u_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)}$$

şi prin urmare

$$u_n < \frac{1}{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}}$$

căci la numitor am suprimat termeni pozitivi şi deci l'am micşorat.

Din această inegalitate deducem:

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

fiindcă seria

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1},\ldots$$

este divergentă.

Deşi $u_n \to 0$ când $n\to\infty$ totuşi seria este divergentă. In adevăr, avem:

$$(2) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} > \frac{n}{n+1}.$$

Deci seria este divergentă căci $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ este mai mare decât raportul termenilor corespunzători din seria armonică

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Se putea arăta divergenţa utilizând criteriul lui RAABE-DUHAMEL sau acela a lui GAUSS. D-l POPESCU-ZORICA a folosit seria armonică, iar ceilalţi corespondenţi criteriul lui RAABE-DUHAMEL.

Să arătăm că seria Σv_n este convergentă. In adevăr ea este alternată, cu termenii decrescători în valoare absolută din cauza lui (2) şi termenul general tinde la zero când rangul lui creşte nemărginit, după cum arată (1).

Seria Σv_n este o serie semi-convergentă, căci Σu_n formată cu valorile absolute a termenilor ei este divergentă.

Observare. Pentru a dovedi egalitatea (1) D-l MAVRODIN întrebuinţează inegalităţile

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}} < \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

cari intervin la demonstrarea formulei lui WALLIS.

De altfel ele se deduc imediat integrând între 0 şi $\frac{\pi}{2}$ inegalităţile evidente

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

în intervalul de integrare.

PROBLEMA 4924. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x-2} = 0.$$

MAIOR I. LINTEŞ.

Soluţia I-a. Presupunem că voim să căutăm numai rădăcinile reale, atunci dacă notăm:

$$f(x) \equiv \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x-2}.$$

Observăm uşor că avem:

— pentru $x > 1$, $f(x) > 0$

— „ $x = 1$, $f(x) = 0$

— „ $x = 0$, $f(x) < 0$

— „ $x < 0$, $f(x) =$ imaginar

— „ $0 < x < 1$, $f(x) < 0$.

Prin urmare singura rădăcină reală este $x = 1$.

Totuşi să încercăm rezolvarea directă.

Prin ridicări la puteri, ceea ce ne face să mai introducem şi alte rădăcini, obţinem:

$$x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 0$$

sau

$$(x-1)(x^3 - 8x^2 + 16x - 16) = 0.$$

Dacă în a doua ecuaţie facem substituţia:

$$x = y + \frac{8}{3}$$

obţinem:

$$y^3 - \frac{2^4}{3} \cdot y - \frac{2^4 \times 19}{3^3} = 0.$$

Aplicând formula lui CARDAN, şi eliminând rădăcinile imaginare, ne rămâne rădăcina:

$$y_1 = \frac{2}{3}\left[\sqrt[3]{19 + \sqrt{19^2 + 8^2}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{19^2 + 8^2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt[3]{19 + 5\sqrt{17}} + \sqrt[3]{19 - 5\sqrt{17}}\right].$$

Dar cum $y_1 > 2$ înseamnă că am avea:

$$x_2 = y_1 + \frac{8}{3} > 4$$

ceea ce nu convine ecuaţiei date.

Au dat soluţii în felul acesta, D-nii: Lt. M. C. VLAD (student, Cluj), MIHU CERCHEZ şi Sublocot. GRUMĂZESCU M.

Soluţia II-a. Notând:

$$\varphi(x) \equiv x^3 - 8x^2 + 16x - 16 = 0$$

atunci ecuaţia derivată este:

$$\varphi'(x) \equiv 3x^2 - 16x + 16 = 0$$

care are rădăcinile:

$$x' = \frac{4}{3} \quad \text{şi} \quad x'' = 4.$$

Formând şirul lui ROLLE constatăm că ecuaţia $\varphi(x) = 0$ are o singură rădăcină reală mai mare ca 4.

Să vedem dacă această rădăcină satisface ecuaţia dată.

Fie a rădăcina; rădăcinile cubice ale lui $(a - 2)$ sunt:

$$+\sqrt[3]{a-2} \quad ; \quad \alpha\sqrt[3]{a-2} \quad ; \quad \alpha^2\sqrt[3]{a-2}$$

α şi α^2 fiind rădăcinile complexe ale unităţii, iar prima fiind rădăcina aritmetică.

Rădăcinile cuadratice ale lui a sunt:

$$+\sqrt[4]{a} \quad ; \quad -\sqrt[4]{a} \quad ; \quad +i\sqrt[4]{a} \quad ; \quad -i\sqrt[4]{a}.$$

In ecuaţiunea dată radicalul cuadratic are determinaţiunea pozitivă, deci excludem rădăcinile negative.

Ţinând acum seamă de discuţiunea dela *Soluţia I-a,* se constată uşor că a nu poate să fie rădăcină.

Calculând rădăcina $a = 5{,}668\ldots$ observăm că ar verifica ecuaţia:

$$-\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x-2} = 0.$$

Ecuaţia dată nu admite deci decât soluţiunea reală $x = 1$.

A rezolvat astfel problema D-l O. MĂRCULESCU (Craiova) şi GH. B. N. IONESCU (Ploeşti).

D-l A. PETRESCU (Iaşi) a dat o soluţie făcând substituţia $x = y^4$, însă cu o discuţiune incomplectă.

D-nii: M. ALEXANDRESCU, O. CORNĂŢEANU, T. C. ŞTEFAN şi A. N. POPESCU-ZORICA, au dat soluţii analoage soluţiei II, însă n'au observat că valoarea $x = 5{,}668$ nu verifică ecuaţia.

Celelalte soluţiuni primite s'au mărginit numai la $x = 1$.

I. L.

PROBLEMA 4950. *Să se figureze funcţia:*

$$y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

şi să se deducă neegalitatea:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}$$

pentru $n \geqq 1$. *Numărul* e *este baza logaritmilor naturali.*

TH. ANGHELUŢĂ.

Au rezolvat problema D-nii: ORIGEN MĂRCULESCU, ISAC I. SOLOMON (Lic. Internat Iaşi); MULLER ROSENBLATH-ROTH (Lic. Internat Iaşi).

Soluţie. Prin definiţie putem scrie:

$$y = e^{x \log\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

de unde rezultă că y este real şi pozitiv pentru valorile lui x din intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(1, +\infty)$.

Avem:

$$\frac{y'}{y} = \log\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}.$$

Pentru cercetarea semnului lui y' să calculăm derivata funcţiei $\frac{y'}{y}$, găsim:

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = -\frac{1}{x(x-1)^2}.$$

In intervalul $(-\infty, 0)$ funcţia $\frac{y'}{y}$ este crescătoare şi se anulează pentru $x = -\infty$. Rezultă că y' este pozitiv în acest interval.

In intervalul $(1, +\infty)$, $\frac{y'}{y}$ este descrescător. Fiind nul pentru $x = +\infty$, rezultă că y' este pozitiv în acest interval.

Avem astfel următorul tablou al variaţiei valorilor lui y.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$				$+$	
y	$\frac{1}{e}$	↗	1		0	↗	$\frac{1}{e}$

Prin urmare neegalitatea cerută este dovedită. Curba se figurează cu înlesnire; ea este asimptotă la dreapta $x = \frac{1}{e}$ şi tangentă la dreptele $y = 0$ şi $y = 1$.

PROBLEMA 4951. *Se cere patratul de şase cifre :*

$$abbaab.$$

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l ADOLF O. ŞAICHIN (Clasa VIII-a B, Liceul Matei Basarab, Bucureşti).

Fie N numărul căutat. Suma cifrelor lui este $3(a+b)$, şi deci $N = \mathcal{M}3$. Cum N este patrat, el nu se poate divide cu 3 fără a se divide cu $3^2 = 9$. Deci trebuie să avem $(a+b) = \mathcal{M}3$. Insă ultimele două cifre cu care se poate termina un patrat (*Culegere de Probleme de Aritmetică* de I. IONESCU, XXXIX) sunt : 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96.

Aceste numere reprezintă pe *ab*. Prima grupă 00 duce la soluţia formală *000 000*. Din celelalte grupe eliminăm pe acelea la care suma cifrelor nu este $\mathcal{M}3$. Ne rămân astfel grupele 09, 21, 24, 36, 69, 81, 94, 96. Cu acestea formăm numerele: 099 009, 211 221, 244 224, 366 336, 699 669, 811 881, 844 448, 966 996. Din acestea eliminăm pe cele ce nu sunt de una din formele $\mathcal{M}4$ sau $\mathcal{M}8+1$, neputând fi patrate, si anume pe 211 221 şi pe 699 669. Pe celelalte le dividem cu 9 şi trebuie să găsim câturi care să fie patrate. Câturile sunt: 011 001, 27 136, 40 704, 90 209, 93 876 şi 107 444.

Dar 11 001, 40 704, 90 209, 93 876 nu pot fi patrate deoarece sunt $\mathcal{M}3$ fără a fi $\mathcal{M}9$. Celelalte, divizate prin 4, trebuie să ne dea câturi patrate. Aceste câturi sunt 6 784 şi 26 861. Primul nu este patrat perfect, nefiind nici de forma $\mathcal{M}4$, nici de forma $\mathcal{M}8+1$. Al doilea nu este patrat, căci este de forma $\mathcal{M}3+2$.

Problema nu are dar soluţie, în afară de cea formală indicată.

Au dat soluţiuni bune, făcând însă şi extragere de rădăcini, D-nii : GH. CÂRDEIU, (Liceul militar, Iaşi) şi HERMANN L. REISCHER, (Liceul internat, Iaşi).

D-l REISCHER, a arătat că prin schimbarea cifrei zecilor putem avea soluţia : $811\,801 = 901^2$.

EXERCIŢII

40. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 + 2 = 0 \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$$

LT. MIHAI C. I. VLAD.

R. Facem substituţia:

$$y = tx$$

şi sistemul dat devine:

$$\begin{cases} x^3(t - t^2) = -2 \\ x^3(1 + t^3) = 9. \end{cases}$$

Eliminăm pe x

$$2t^3 - 9t^2 + 9t + 2 = 0.$$

Aceasta se poate descompune în:

$$(t - 2)(2t^2 - 5t - 1) = 0.$$

Şi deci rădăcinile sunt:

$$\boxed{\begin{aligned} t_1 &= 1; \\ t_2 &= \frac{5 + \sqrt{33}}{4}; \\ t_3 &= \frac{5 - \sqrt{33}}{4} \end{aligned}}.$$

Având soluţiile lui t, aflăm pe ale lui x din relaţia:

$$x^3 = \frac{2}{t^2 - t} \text{ etc.}$$

41. Notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu să se demonstreze relaţia:

$$2p = \sum \operatorname{tg} A\,(h_b + h_c) = 2R \sum \operatorname{tg} A\,(\cos B + \cos C).$$

S.-LT. MARTEŞ GRIGORE.

R. Dacă AA_1, BB_1, CC_1 sunt înălţimile triunghiului ABC, H ortocentrul

$$x = \sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle BCC_1, \quad y = \sphericalangle ABB_1 = \sphericalangle ACC_1, \quad z = \sphericalangle CAA_1 = \sphericalangle CBB_1,$$

$$x = \frac{\pi}{2} - B \ , \quad y = \frac{\pi}{2} - A \ , \quad z = \frac{\pi}{2} - C.$$

(1) $a = \overline{BA_1} + \overline{A_1C} = \overline{HA_1}\,\text{cotg}z + \overline{HA_2}\,\text{cotg}x = \overline{HA_1}\,(\text{tgB} + \text{tgC})$

(2) $b = \overline{HB_1}\,(\text{tgA} + \text{tgC})$

(3) $c = \overline{HC_1}\,(\text{tgA} + \text{tgB})$.

Adun (1) cu (2) cu (3) şi obţin:

$$2p = \sum \overline{HA_1}\,(\text{tgB} + \text{tgC}).$$

Dar:

$$\overline{HA_1} = h_a - \overline{AH}$$

şi cum:

$$\overline{AH} = 2R\cos A\ ,\quad \overline{HA_1} = h_a - 2R\cos A,$$

deci:

$$2p = \sum (h_a - 2R\cos A)\,(\text{tgB} + \text{tgC})$$

$$= h_a\,\text{tgB} + h_a\,\text{tgC} - 2R\cos A\,\text{tgB} - 2R\cos A\,\text{tgC}$$

$$+ h_b\,\text{tgA} + h_b\,\text{tgC} - 2R\cos B\,\text{tgA} - 2R\cos B\,\text{tgC}$$

$$+ h_c\,\text{tgA} + h_c\,\text{tgB} - 2R\cos C\,\text{tgA} - 2R\cos C\,\text{tgB}$$

$$= \sum \text{tgA}\,(h_b + h_c) - 2R \sum \text{tgA}\,(\cos B + \cos C).$$

Q. E. D.

42. Să se demonstreze că dacă arcele pozitive a, b, c satisfac condiţia

$$0 < a + b + c < \frac{\pi}{2},$$

avem inegalitatea:

$$\text{tg}\,(a + b + c) > \text{tg}a\,\text{tg}b\,\text{tg}c.$$

MIRCEA ADAM.

R. Dată fiind condiţia impusă arcelor, rezultă că $\cos(a + b + c)$, $\cos a$ $\cos b$ şi $\cos c$ sunt cantităţi pozitive şi deci putem înmulţi ambii membrii a inegalităţei cu:

$$\cos\,(a + b + c)\,\cos a\,\cos b\,\cos c\,,$$

obţinem:

(1) $\sin(a + b + c)\cos a\cos b\cos c > \cos(a + b + c)\sin a\sin b\sin c.$

Pe de altă parte folosind relaţiile cunoscute:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta + \gamma}{2}\sin\frac{\gamma + \alpha}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 4\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\beta + \gamma}{2}\cos\frac{\gamma + \alpha}{2}$$

(Prob. 23 şi 24 Cap. XII. — Culegere de Prob. Trigonom),

găsim:

$$4\cos a\cos b\cos c = \sum \cos(-a+b+c) + \cos(a+b+c)$$

şi

$$4\sin a\sin b\sin c = \sum \sin(-a+b+c) - \sin(a+b+c).$$

Astfel că vom avea:

$$E_1 = \sin(a+b+c)\cos a\cos b\cos c$$

$$= \frac{1}{4}\sum \sin(a+b+c)\cos(-a+b+c) + \frac{1}{4}\sin(a+b+c)\cos(a+b+c)$$

$$= \frac{1}{8}\sum \sin 2(b+c) + \frac{1}{8}\sum \sin 2a + \frac{1}{8}\sin 2(a+b+c)$$

şi

$$E_2 = \cos(a+b+c)\sin a\sin b\sin c$$

$$= \frac{1}{4}\sum \cos(a+b+c)\sin(-a+b+c) - \frac{1}{4}\sin(a+b+c)\cos(a+b+c)$$

$$= \frac{1}{8}\sum \sin 2(b+c) - \frac{1}{8}\sum \sin 2a - \frac{1}{8}\sin 2(a+b+c).$$

Inegalitatea (1) devine:

$$8E_1 > 8E_2$$

sau

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c + \sin 2(a+b+c) > 0$$

inegalitate evidentă, termenii primului membru fiind pozitivi, căci avem:

$$0 < 2(a+b+c) < \pi.$$

43. Notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu să se stabilească identitatea:

$$\frac{a\cos\left(\frac{A}{2}+C\right) + b\cos\left(\frac{B}{2}+A\right) + c\cos\left(\frac{C}{2}+B\right)}{\sum a\left(\cos\frac{A}{4} - \sin\frac{A}{4}\right)\sin\frac{B-C}{4}} = \sqrt{2}.$$

SUBLT. SAVIN C. IOAN.

R. Proiectând conturul triunghiului de laturi a, b şi c pe bisectoarea vârfului A se găseşte:

$$\text{pr.}\,\overline{AB} + \text{pr.}\,\overline{BC} + \text{pr.}\,\overline{CA} = 0 \qquad (1)$$

Insă:

$$\text{pr.}\,\overline{AB} = c\cos\frac{A}{2}$$

$$\text{pr.}\,\overline{BC} = a\cos\left(C+\frac{A}{2}\right) \tag{2}$$

$$\text{pr.}\,\overline{CA} = b\cos\left(180^0-\frac{A}{2}\right) = -b\cos\frac{A}{2}\,.$$

Din (1) şi (2) se deduce:

$$a\cos\left(\frac{A}{2}+C\right) = (b-c)\cos\frac{A}{2}\,. \tag{3}$$

Proiectând conturul şi pe celelalte 2 bisectoare se găseşte

$$b\cos\left(\frac{B}{2}+A\right) = (c-a)\cos\frac{B}{2}$$

$$c\cos\left(\frac{C}{2}+B\right) = (a-b)\cos\frac{C}{2}\,. \tag{4}$$

Adunând (3) cu (4) avem:

$$\Sigma\, a\cos\left(\frac{A}{2}+C\right) = \Sigma a\left(\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{B}{2}\right). \tag{5}$$

Insă:

$$\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{B}{2} = 2\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{B-C}{4}\,.$$

Insă:

$$\sin\frac{B+C}{4} = \sin\left(\frac{180^0-A}{4}\right) = \sin\left(45^0-\frac{A}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{A}{4}-\sin\frac{A}{4}\right).$$

Deci:

$$\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{B}{2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{A}{4}-\sin\frac{A}{4}\right)\sin\frac{B-C}{4}$$

prin urmare (5) devine

$$\Sigma\, a\cos\left(\frac{A}{2}+C\right) = \sqrt{2}\,\Sigma\, a\left(\cos\frac{A}{4}-\sin\frac{A}{4}\right)\sin\frac{B-C}{4}\,.$$

Impărţind ambii membri cu

$$\Sigma\, a\left(\cos\frac{A}{4}-\sin\frac{A}{4}\right)\sin\frac{B-C}{4}$$

se găseşte identitatea propusă.

PROBLEME PROPUSE

4987. Pe colţurile unui patrat şi la mijlocul laturilor lui se scrie câte o cifră. Parcurgând laturile acelui patrat în acelaşi sens, cifrele scrise dau patru patrate perfecte, de câte trei cifre. Se cere dispoziţiunea acelor cifre.

I. IONESCU.

4988. Dacă $R(n)$ reprezintă suma resturilor împărţirii numărului întreg n prin toţi întregii care îl preced, atunci să se arate că avem:

$$R(2^\alpha) = R(2^\alpha - 1).$$

MAIOR I. LINTEŞ.

4989. Să se arate că suma:

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (10^n - 1)\, 10^n$$

are ca valoare numărul format din cifra 3, scrisă consecutiv de $2n$ ori, urmată de n zerori.

CPT. COMANDOR GR. ZAPAN.

4990. Să se construiască un triunghiu dreptunghic cunoscând poziţia vârfului unghiului drept şi ştiind că vârfurile unghiurilor ascuţite se mişcă pe două drepte perpendiculare date, iar ipotenuza trece printr'un punct dat.

G-L GH. BUICLIU.

4991. Se consideră două triunghiuri înscrise în acelaşi cerc. Să se demonstreze că triunghiurile determinate de dreptele lui SIMSON, ale vârfurilor unuia din triunghiuri în raport cu cellalt, formează două triunghiuri asemenea şi proporţionale cu triunghiurile considerate. Caz particular.

ŞERBAN A. GHEORGHIU.

4992. Se consideră trei plane paralele P_1, P_2, P_3, punctele A, B, C situate în fiecare din aceste plane, o dreaptă D în spaţiu care înţeapă cele trei plane în α, β, γ şi un punct M pe dreapta D. Să se demonstreze că planele duse prin α, β, γ paralele la planele MBC, MCA, MAB se taie într'un punct din planul ABC.

V. THÉBAULT.

4993. a, b, c fiind laturile unui triunghiu, să se arate că avem:

$$\frac{15}{4} \leqq \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{a+c} + \frac{p+c}{a+b} \leqq \frac{9}{2}$$

$2p$ fiind perimetrul triunghiului.

N. CIORĂNESCU.

4994. Cercurile lui EULER ale triunghiurilor ABC, BCD, CDA, DAB trec printr'un acelaş punct.

AD. GHEORGHIU.

4995. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x_1 - \frac{a}{1!} = 0$$

$$x_2 - \frac{a}{1!}x_1 + \frac{a(a+1)}{2!} = 0$$

. . . . . .

$$x_n - \frac{a}{1!}x_{n-1} + \frac{a(a+1)}{2!}x_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-2)}{(n-1)!}x_1 + (-1)^n\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!} = 0.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4996. Să se demonstreze identităţile:

$$\frac{\operatorname{tg} 3a}{\operatorname{tg} a} = \operatorname{tg}(60^0 - a) \cdot \operatorname{tg}(60^0 + a)$$

$$\frac{4 \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} 4a} = (1 - \operatorname{tg}^2 a)(1 - \operatorname{tg}^2 2a).$$

ALEX. V. NICULESCU.

4997. Fie un punct variabil pe o curbă Γ dată şi fie A, B, C, D patru puncte date în planul curbei. Paralelele duse prin C şi D respectiv la AM, BM se taie în P. Să se găsească locul lui P. Cazuri particulare: *a)* Curba Γ este un cerc.

In ce cazuri locul lui P este tot un cerc?

b) Curba Γ este o dreaptă.

In ce cazuri locul lui P este tot o dreaptă şi ce particularitate prezintă acea dreaptă.

ULPIU FLORESCU.

4998. 1°. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \frac{1 + x \log x}{1 + x}$$

şi să se calculeze cu două zecimale exacte valoarea lui x pentru care y este minimum. Să se deducă apoi că ecuaţia

$$1 + x \log x = 0$$

n'are rădăcini reale. Se va stabili acest rezultat şi direct.

2°. Să se determine numerile α, β, γ aşa ca ecuaţia

$$y - \alpha - \beta(x - 1) - \gamma(x - 1)^2 = 0$$

să aibă rădăcina triplă 1.

3°. Funcţia y satisface o ecuaţie diferenţială de ordinul întâiu cu coeficienţii funcţii raţionale de x. Să se formeze această ecuaţie şi să se integreze. Să se determine curba integrală care trece prin origină.

TH. ANGHELUŢĂ.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

Pag.

V. Thébault . . . . . Asupra unor pătrate curioase 293

2. Geometria

D. Barbilian. . . . . Consideraţii invariant teoretice asupra patrulaterului 57, 113, 176
Ad. Gheorghiu . . . . Relaţiuni într'un patrulater 621
C. Ionescu-Bujor. . . . Asupra unor perechi de triunghiuri omologice 409
N. N. Mihăileanu. . . . Propoziţii de geometria triunghiului 524
G-l G. I. Popescu . . . O soluţie geometrică problemei 4709 570
M. C. Postelnicescu . . Asupra punctelor lui FEUERBACH 297

3. Algebra

Th. Angheluţă . . . . . Discuţia realităţii rădăcinilor ecuaţiilor de gradul 3 şi 4 cu coeficienţi reali 515
M. Ghermănescu . . . .Convergenţa seriilor cu termenii pozitivi . . . 457

4. Geometria analitică şi infinitezimală

Locot. M. I. Focşeneanu . O reţea de conice 460
Ad. Gheorghiu. . . . . O configuraţie de cercuri 69
A. Myller. . . . . Suprafaţa de revoluţie aplicată pe alta asemenea ei 18
A. Myller. . . . . O clasă însemnată de suprafeţe 342
Gh. D. Simionescu. . . O problemă asupra conicelor 528

5. Analiza

Gh. Mihoc . . . . . Formula mediei pentru polinoame 573, 626

6. Istoria Matematicilor

		Pag.
Fl. Câmpan	Privire istorică asupra rezolvării ecuaţiei cubice	403
P. V. Cazanacli	Aritmetica lui GH. ASACHI	64, 120, 235, 344, 398, 453, 510, 564, 618
I. Ionescu	Cărţi vechi de matematică	173
V. Marian	Primele aritmetici în Bucovina	239, 289
V. Marian	Architecturae militaris tyrocinium a lui E. VOLS	449, 508
G. Ţiţeica	Din viaţa şi activitatea lui DESCARTES	170

7. Diverse

G-l Gh. Buicliu	Matematica la expoziţia internaţională din Paris	348
Preduţa Bungeţeanu	Al doilea congres interbalcanic al matematicienilor	123
G. Călugăreanu	O vizită a profesorului PAUL MONTEL şi o săptămână matematică la Cluj	561
I. Ionescu	Consideraţiuni practice la alcătuirea şi rezolvarea problemelor de matematici	19
I. Ionescu	† GH. EM. FILIPESCU	281, 337, 393
***	O sărbătorire a D-lui A. G. IOACHIMESCU	229

8. Necrologuri

C. Ionescu-Bujor	† N. BOTEA	225
D. Stan	† GH. EM. FILIPESCU	169
***	† REGINA MARIA	617

B. CHESTIUNI IN LEGĂTURĂ CU REDACŢIA ŞI SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ“

1. Diverse

***	Lista membrilor societăţii *«Gazeta Matematică»*	5
***	Membrii decedaţi	17

2. Premii şi concursuri

Delegaţia Societăţii	Concursul *«Gazeta Matematică»* din 1938	24
D. Stan, D. Stoica	Premii, donaţii şi alte dispoziţii ale fondurilor Societăţii *«Gazeta Matematică»*	27
Al. Bunescu, Col. Gh. Liteanu, Ing. D. Stoica	Raportul comisiunii pentru acordarea premiului „General SC. PANAITESCU“ pe anul 1936-1937	77
***	Programa analitică hotărîtă pentru concursul *Gazeta Matematică* din anul 1938	125
P. Sergescu, D. Stan, Gh. Zapan	Raport pentru premiul „V. CONTA“ pe anul 1937	127

		Pag.
Al. Bunescu, M. Niculescu, G. Ţiţeica	Raport pentru premiul „H. CAPRIEL"	188
Delegaţia Societăţii . .	Concursul *«Gazeta Matematică»*	299
Al. A. Roşu, G. D. Simionescu, D. A. Stan	Premiul „Inginer A. ROŞU"	411
G. Ţiţeica.	Rezultatul concursului *«Gazeta Matematică»* .	505
***	Regulamentul premiului „Inginer H. Capriel" .	634

C. NOTE MATEMATICE

1. Aritmetica şi teoria numerelor

3[1])	*G-l Gh. Buicliu* . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	29
16.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Asupra problemei 4191	189
33.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Asupra problemei 4820	358
38.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	413
45.	*G-l Gh. Buicliu* .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	533
49.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	581
15.	*G. G. Constantinescu.*	Asupra problemei 4760	132
17.	*Maior I. Linteş* . .	Asupra problemei 353 din revista *«Ştiinţă şi Progres»*	189
23.	*Maior I. Linteş.* . .	Asupra problemei No. 609 din *«Boletin Matematico»*	244
41.	*A. Moessner*	Un sistem diofantian	465
48.	*A. Moessner*	Două probleme diofantiene	578
32.	*V. Thébault*	Curiozităţi aritmetice	357

2. Geometria

9.	*M. Adam.*	Asupra problemei 4567	86
24.	*A. Dobrescu*	Asupra problemei 3974	244
20.	*U. M. Florescu.* . .	O problemă de geometrie în spaţiu	190
5.	*M. Ghermănescu* . .	O teoremă de geometrie elementară	79
50.	*V. Ghiţescu*	Asupra ariei patrulaterului strâmb	583
13.	*C. Ionescu-Bujor* . .	Asupra punctelor izotomice	129
6.	*N. N. Mihăileanu.* .	Soluţia geometrică a problemei 4721	81
14.	*N. N. Mihăileanu.* .	Asupra problemei 3914	130
25.	*N. N. Mihăileanu.* .	Asupra problemei 3977 *«G. M.»*	245
28.	*N. N. Mihăileanu.* .	Asupra notei 20, *G. M.* XLIII	301
36.	*N. N. Mihăileanu.* .	Notă asupra parabolei înscrise într'un triunghiu	361
55.	*N. N. Mihăileanu.* .	O propoziţie asupra conicelor	636
56.	*N. N. Mihăileanu.* .	O propoziţie asupra conicelor	637
12.	*V. Thébault*	Asupra patrulaterului complet	128
47.	*V. Thébault*	O demonstraţie a teoremei lui PITAGORA . .	578

1) Numărul din această coloană indică numărul de ordine al notei în Vol. XLIII.

3. Algebra

		Pag.
34. *Cpt. M. I. Focşeneanu*	Problema 3766	359
46. *Cpt. M. I. Focşeneanu*	O formă a restului diviziunii de polinoame	535
18. *M. Ghermănescu*	Asupra unei sume	190
54. *Maior I. Linteş*	Asupra exerciţiului Nr. 33 (XLIII)	636
42. *Al. V. Niculescu*	O demonstraţie a formulei lui TAYLOR pentru polinoame	466
7. *G. D. Simionescu.*	Calculul unor sume	83
8. *S-Lt. S. M. Ţilenschi.*	In legătură cu problema 4624	84
53. *Gh. Vasiliu*	Completare la rezolvarea problemei 4802	635

4. Trigonometria

10. *M. Adam*	Asupra problemei 4658	87

5. Analitica

30. *E. Arghiriade*	Asupra centrului de curbură la conice	302
35. *E. Arghiriade*	Asupra unei teoreme de geometrie infinitezimală	360
52. *N. N. Mihăileanu.*	Notă asupra teoremei lui PTOLOMEU	585

6. Analiza

19. *M. Ghermănescu*	Asupra problemei 4437	190
21. *M. Ghermănescu*	Asupra ecuaţiei lui RICCATI	194
26. *Tib. Popoviciu*	Asupra unei metode de cuadratură aproximativă	246

7. Balistică

31. *Maior I. Linteş.*	Viteza maximă a unui proiectil	303
40. *Maior I. Linteş.*	Atmosfera standard	417
43. *Maior I. Linteş.*	Exponentul funcţiei balistice	468

8. Istoria Matematicelor

1. *I. Ionescu*	Aritmetica lui AMPÈRE	28
4, 11, 37. *****	Acum o sută de ani în lumea matematică [1])	79, 127, 412

9. Diverse

29. *E. Arghiriade*	Asupra coardelor unei curbe plane văzute dintr'un punct fix sub un unghiu constant	302
27. *G-l Gh. Buicliu*	Asupra problemei 2035	301
44. *I. Ionescu*	Dublul semn $\pm$	532
2. *Col. G. I. Liteanu.*	Asupra problemelor 1248 şi 3605	28
39. *Col. G. I. Liteanu.*	Asupra problemei 2947 şi a numărului special	416
51. *N. N. Mihăileanu.*	O chestiune de prioritate	584
22. *P. Sergescu*	Redacţionale	243

1) Note trimise de Seminarul matematic din Iaşi de sub conducerea D-lui Prof. *A. Myller.*

D. CHESTIUNI DE EXAMEN

Pag.

Concursul «*Gazeta Matematică*» din anul 1938 469
Şcoala Politechnică „Regele Carol II". Concurs de admitere în anul I . . 249
Şcoala Pregătitoare de ofiţeri (secţia geniu). Examenul de admitere . . . 132

E. BIBLIOGRAFII

1. Lucrări recenzate [1])

C. I. Budeanu . . . . J. B. TOURRIOL. Eléctricité 422
U. Florescu . . . . . P. APPEL. Traité de Mécanique rationelle . . . 137
C. Ionescu-Bujor . . . J. LEMAIRE. Exercices de géométrie moderne . 419
C. Ionescu-Bujor . . . AD. MINEUR. Géométrie vectorielle 135
G. Ţiţeica . . . . . W. F. OSGOOD. Fonctions of a complex variable 90
G. Ţiţeica . . . . . W. F. OSGOOD. Fonctions of real variables . . 89

2. Lucrări nerecensate

N. Abramescu . . . . . Lecţiuni elementare de algebră superioară . . 89
N. Abramescu . . . . . Algebra financiară 89
N. Abramescu . . . . . Lecţiuni de geometrie analitică 196
I. T. Andreian . . . . Nouvelles recherches sur l'équation numérique $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 421
Em. Antonovici . . . . Despre mecanica clasică şi Teoria relativităţii . 422
P. Appell . . . . . Analyse Mathématique 639
C. Budeanu . . . . . Quelques considérations sur les espaces superieurs 254
Ax. Creangă . . . . . Din trecutul matematicei 304
I. Curea . . . . . Determinarea polului ceresc pe cale astrofotografică 586
J. L. Destouches . . . . Essai sur la forme génerale des théories physiques 586
R. Estèves & H. Mitault . Trigonométrie et Compléments d'Algèbre . . . 196
Th. I. Gâlcă . . . . . Cum trebuesc înfăptuite silozurile în România . 639
I. Ionescu . . . . . Culegere de probleme de Aritmetică 34
P. Montel . . . . . Lecţiuni despre funcţiunile aproape periodice . 586
I. Gonzales Perera . . . Concepto de angulo 135
Gh. Popescu-Botoşani . Primul motor de aviaţie românească 254
Tib. Popoviciu . . . . . Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame 586
W. Sierpinski . . . . . Lecţiuni despre mulţimile analitice 586
E. Stern . . . . . Nouvelle méthode pour construire et dénombrer certains carrés magiques d'ordre $4m$ avec application aux parcours magiques 34

---

1) S'au scris recensorii în ordine alfabetică, iar la fiecare recensor lucrările recensate sunt înscrise tot în ordinea alfabetică.

3. Extrase, suplimente şi teze

		Pag.
E. Abason	Articol asupra triunghiului echilateral	89
Th. Angheluţă	Sur l'intégrale de M. DENJOY	34
Th. Angheluţă	Sur une équation fonctionelle qui définit les polynomes à plusieurs variables	422
Th. Angheluţă	Sur une propriété qui caractérise la transformation conforme	34, 422
Th. Angheluţă	Une démonstration nouvelle du théorème: Une fonction dont la dérivée est nulle dans un intervale à la même valeur dans cet intervale	538
F. Campan	Aplicaţiuni ale curburii lui BACALOGLU	422
G. G. Constantinescu	Sur la flexion des pièces droites	135
A. Costăchel	Problème du tracé elliptique des routes	538
A. Gardedieu	Asupra figurii de echilibru a unei mase fluide eterogene în rotaţie	34
A. Gloden	Formules générales pour des chaînes trigrades	135
C. Ionescu-Bujor	Sur deux classes de courbes	135
Lt. C-dor I. Linteş	Călăuza unui anteproiect de gură de foc	304
Lt. C-dor I. Linteş	Calculul şi construcţia traiectoriilor bombelor de avion	476
Lt. C-dor I. Linteş	Comparaţie între bombardamentul cu avionul şi cu tunul	89
Lt. C-dor I. Linteş	Dificultăţile de fabricare ale unui material de artilerie	196
Lt. C-dor I. Linteş	Observaţiuni asupra tragerilor care se execută pentru determinarea preciziunii unei guri de foc	89
Lt. C-dor I. Linteş	Sintetizarea progreselor aviaţiei	254
A. Moessner	Algunas Identidades Numericas	363
A. Moessner	General formulae of constructing and solving certain simultaneous equations	363
A. Moessner	Numerische Identitäten	363
A. Moessner	Simultane Identitäten	586
A. Moessner	Zahlentheoretische Untersuchungen und Resultate	586
A. Moessner	Die Gleichung $\sum_{1}^{n} A_i^n = \sum_{1}^{n} B_i^n$, $n = 1.2...8$ und verwandte Formen	586
A. Moessner	Gewisse Fragen der Zahlentheorie	586
A. Moessner	Verschiedene Diophantische Probleme und zahlentheoretische Theoreme	586
A. Moessner	Einige Diophantische Probleme und zahlentheoretische Resultate	586
P. Sergescu	La vie contemporaine des mathématiques	254
P. Sergescu	Le développement des sciences mathématiques en Roumanie	255
P. Sergescu	Remarques pratiques sur l'intégration de certaines équations differentieles lineaires	255

Pag.

Lt. A. Stan . . . . . Asupra variaţiei vitezei 363
Lt. A. Ştefănescu . . . . Despre pompe 34
V. Thébault . . . . . Asupra sferelor ROBERTS 33
V. Thébault . . . . . La sphère de LONGCHAMPS 135
V. Thébault . . . . . Sur une application du dernier théorème de FERMAT 135
V. Thébault . . . . . Sur une nouvelle sphère associé au tétraèdre . 135
V. Vâlcovici . . . . . Asupra unei configuraţii de statică vectorială . 538
Th. Vescan . . . . . Considérations sur le problème des deux corps dans le cas des masses variables 135
Th. Vescan . . . . . Probleme de capacitate 135

4. Reviste, periodice

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina 33, 88, 133, 134, 253, 418, 475, 538
Anuario 88
Arta şi Tehnica grafică 195
Boletin Matematico 88, 134, 253, 304, 363, 476, 538, 638
Buletin del Seminario Matematico 195
Buletinul „I. R. E." 33, 254, 363, 538, 639
Buletinul Institutului Român pentru betoane, construcţii şi drumuri 89, 253, 585
Buletinul Societăţii Politechnice din România 254, 418
Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine 88, 639
Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliqués de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" 419
Bulletin of the American Mathematical Society 134, 195, 304, 363, 476, 538, 639
Bulletin of the Mathematical Society 254
Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara . . 254, 304, 638
Contribucion al Estudio de las Ciencias Fisicas Matematicas . . . 89, 304
Deutsche Mathematik 89, 134, 304, 419
Gazeta Matematică. Supliment cu exerciţii 134, 195, 304, 420, 586
Journal de Mathématiques élémentaires 134, 195, 254, 304, 363, 421, 476, 538, 585, 639
Mathematica 421
Mathesis 33, 134, 195, 254, 363, 421, 476, 585
Numerus 89
Pitagora 135, 196, 254, 363, 421, 476, 639
Revista Artileriei 476
Revista Matematică din Timişoara 33, 89, 135, 196, 254, 304, 363, 421, 476, 538, 586
Revista Ştiinţifică *«V. Adamachi»* 196, 254, 421, 586, 639
Saneamento urbano en la Republica Argentina 538
Société Mathématique de France. Comptes rendus des sciences 34
Sphinx 89, 135, 196, 254, 304, 363, 421, 476, 538, 586, 639
Ştiinţă şi Progres 135, 304, 421, 586
The Mathematical Gazette 135, 196, 254, 363, 538, 639
Universidad nacional de la Plata 135, 196

F. CERERI *)

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
1	24 (XXI)	?
4	24 „	?
5	24 „	?
7	59 „	?
8	59 „	?
10	91 „	?
11	144 „	?
12	145 „	?
13	145 „	219 (XXI) ?
14	183 „	?
15	219 „	?
16	254 „	?
17	294 „	264 (XXXVIII) ?
20	420 „	?
23	17 (XXII)	?
24	75 „	?
26	161 „	?
27	187 „	?
28	213 „	?
29	231 „	?
30	258 „	?
31	277 „	?
32	277 „	259 (XXIII) 39, 186 (XXIV)?
33	308 „	?
34	40 (XXIII)	?
35	40 „	?
36	65 „	?
37	86 „	211 (XXIII) ?
38	112 „	?
39	137 „	?
40	157 „	?
41	185 „	?
42	211 „	?
43	235 „	?
44	259 „	?
45	275 „	?
46	13 (XXIV)	?
49	57 „	?
50	70 „	?
51	88 „	?
52	103 „	?
55	168 „	?
56	168 „	?
58	16 (XXV)	?
59	36 „	?
60	58 „	?
61	58 „	?
62	71 „	?
63	71 „	?
64	122 (XXV)	?
65	122 „	?
66	155 „	?
67	175 „	?
68	199 „	?
70	223 „	?
71	251 „	?
73	45 (XXVI)	?
74	45 „	?
75	94 „	?
77	198 „	?
78	227 „	?
80	263 „	?
81	27 (XXVII)	?
82	27 „	160 (XXVII)?
83	160 „	?
84	197 „	?
85	197 „	?
86	240 „	?
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
91	26 (XXVIII)	?
92	57 „	?
93	57 „	?
94	104 „	?
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
99	256 „	?
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
112	419 „	?
113	454 „	?
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 „	?
120	261 „	?
122	306 „	?
123	337 „	?
124	383 „	?

*) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pus după răspuns.

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
126	423 (XXX)	?
128	33 (XXXI)	?
129	55 „	?
130	56 „	?
131	100 „	?
134	184 „	?
142	53 (XXXII)	?
143	102 „	?
144	142 „	?
146	216 „	?
148	296 „	?
149	343 „	?
152	19 (XXXIII)	19(XXXIII)?
153	51 „	?
154	51 „	?
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
162	295 „	?
163	341 „	?
166	457 „	?
179	385 (XXXVI)	?
181	24 (XXXV)	?
186	216 „	?
193	466 „	?
196	57 (XXXVI)	?
201	221 „	?
207	414 „	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 (XXXVII)	?
219	425 „	?
220	448 „	?
223	94 (XXXVIII)	?
227	57 (XXXIX)	?
235	222 „	?
237	360 „	?
238	409 „	?
239	458 „	?
243	212 (XL)	?
244	266 „	?
245	309 „	?
247	499 „	?
248	553 „	?
250	148 (XLI)	?
251	189 „	?
252	241 „	?
253	292 „	?
254	343 „	?
255	384 „	?
256	485 „	?
257	533 „	?
259	629 „	?
262	251 (XLII)	?
263	307 „	?
264	368 „	?
265	422 „	?
266	530 „	?
267	588 „	?
268	639 „	?
269	34 (XLIII)	?
270	90 „	?
271	138 „	?
272	198 „	364
273	255 „	?
274	304 „	?
275	423 „	?
276	477 „	?
277	539 „	?
278	586 „	?
279	639 „	?

G. DIVERSE

Pag.

1. Sporirea Bibliotecii „*Gazeta Matematică*“ 35, 90, 140, 196, 255, 305, 364, 424, 477, 540, 587, 640
2. Reuniunea matematică internaţională dela Paris 34
3. Congresul internaţional al Recreaţiunilor Matematice 34
4. Un original găsit de D-l I. POPA 34
5. Comitetul Societăţii române de ştiinţe secţia matematică 139
6. Şedinţele „ „ „ „ „ „ 139, 424
7. Şedinţele Societăţii «*Gazeta Matematică*» 364, 423, 587
8. Programul „Săptămânei Matematice“ la Universitatea din Cluj 539
9. Şedinţele „Cercul Matematic“, Cluj 539

H. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

a) Repartizarea problemelor propuse după materii

Aritmetica şi teoria numerelor . . . . . 4855, 6, 7, 67, 8, 9, 70, 80, 1, 2, 91, 2, 3, 4, 903, 4, 5, 16, 7, 8, 27, 8, 39, 40, 1, 2, 51, 2, 3, 64, 5, 76, 87, 8, 9.
Geometria . . . . . 4858, 9, 60, 5, 71, 2, 3, 9, 83, 4, 95, 6, 7, 906, 7, 19, 20, 1, 2, 3, 6, 9, 30, 1, 2, 3, 43, 4, 8, 9, 54, 5, 6, 7, 8, 63, 6, 7, 8, 80, 1, 90, 1, 2, 3, 4.
Algebra . . . . . 4861, 2, 74, 5, 6, 87, 8, 98, 908, 9, 11, 3, 24, 34, 5, 6, 8, 45, 50, 9, 70, 3, 95.
Trigonometria . . . . . 4829, 63, 4, 77, 85, 6, 99, 900, 10, 46, 7, 60, 9, 75, 82, 3, 4, 5, 96.
Geometria analitică şi diferenţială . . . . . 4866, 78, 89, 90, 901, 12, 61, 2, 72, 4, 86, 97.
Analiza şi Calculul Integral . . . . . .4902, 14, 25, 98.
Mecanica . . . . . .4915, 37, 71.

b) Repartizarea problemelor propuse pe autori

N. Abramescu 4865, 912
N. N. Aldea 4884
I. Alexiu 4977
M. F. Amărăşteanu 4875
A. Angelescu 4866
Th. Angheluţă . . 4911, 25, 50, 98
D. Barbilian 4890
G-l Gh. Buicliu . 4857, 81, 909, 19, 42, 69, 90
Ad. Buşilă 4959
G. Călugăreanu 4888
N. Ciorănescu . . . 4973, 85, 93
Th. Gh. Cocea . 4858, 96, 932, 55, 66
P. P. Cojocaru 4874
C. Coşniţă 4896
I. Curchi 4876
P. Dobrescu 4877
Gh. I. Dumitrescu . . 4923, 46, 67
U. Florescu 4880, 984, 97
Cpt. M. I. Focşăneanu . . 4901, 62
G-l Al. Gheorghieş 4980
Ad. Gheorghiu 4921, 49, 72, 86, 94
Gh. Th. Gheorghiu . 4864, 982, 95
Ş. A. Gheorghiu 4991
M. Ghermănescu 4898, 914, 36, 52, 70
V. Ghiţescu 4906, 61
S.-Lt. M. Grumăzescu . . . 4873
D. V. Ionescu 4889, 926, 48
H. P. Ionescu 4935
I. Ionescu .4855, 67, 79, 91, 903, 15, 27, 39, 51, 63, 75, 87
C. Ionescu-Bujor . 4862, 85, 902, 29, 43, 57, 74, 83
L-t C. Ionescu-Ţiu . 4894, 937, 60
Maior I. Linteş 4904, 24, 41, 65, 88
Col. G. I. Liteanu 4856, 86
M. Mănescu 4913, 38
D. Matei 4934
I. V. Mătieş 4893
N. N. Mihăileanu . 4863, 83, 900, 7, 20, 46
A. Moessner 4905
S-Lt. I. Nicolau-Dobridor . . 4878
Al. V. Niculescu 4895, 930, 54, 96
Al. N. Popescu-Zorica . . . 4979
M. C. Postelnicescu 4859
C. Săndulache 4870
I. C. Schileru-Dili 4928, 58
P. Sergescu . . . 4861, 82, 916, 76
Gh. D. Simionescu . 4887, 910, 22, 47, 71
D. V. Stoica 4978
V. Thébault . . 4860, 9, 92, 918, 44, 64, 81, 92
O. N. Ţino 4933, 56
I. Ţiţeica 4872
Gh. Vasiliu 4829, 99, 908
S-Lt. M. C. I. Vlad 4868
Lt. I. Gr. Zamfirescu . .4871, 931
Căp. C-dor Gr. Zapan . 4917, 40, 53, 68, 89

c) Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
485	104 (V) 198 (XVI)	NR
585 *)	172 (VI) 238 (XVI)	
676	148 (VII)	
766	124 (VIII) 319 (XVI) 372 (XXX)	NR
887	172 (IX) 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	
1000 **)	220 „ 438 (XVI)	NR
1008	244 (X) 462 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1058 ***)	100 „	NR
1092	196 „	
1146	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1178	172 „	197
1180	172 „	
1188	228 „	
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	NR
1271	192 „	NR
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1310	352 „ 372 (XXXI)	NR
1342	64 (XIV)	
1367	128 „	NR
1379	160 „	
1384	191 „	NR
1398	224 „	
1399	224 „ 200 (XVI)	NR
1412	256 (XIV)	NR
1424	288 „	
1450	352 „	NR
1497	128 (XV)	
1533	224 (XV)	
1553	288 „	NR
1563	320 „	477
1577	352 „	
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	NR
1656	239 „	
1676	279 „	
1679	280 „	NR
1690	320 „	
1702	360 „ 399 „	
1711	399 „ 372 (XXXI)	NR
1735	464 (XVI)	
1753	80 (XVII)	
1764	120 „	NR
1778	199 „	36
1790	240 „	
1823	400 „	
1831	439 „	
1835	440 „	
1840	466 „	
1876	119 (XVIII)	
1882	120 „	640
1898	199 „	
1906	200 „	NR
1911	239 „	
1914	239 „ 280 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1934	280 „ 320 „	
1944	319 „	
1945	320 „ 360 „	
1948	358 „	
1958	359 „	
1959	360 „	NR

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere, au fost publicate sau rectificate de mai multe ori în volumul şi la pagina respectivă.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru celelalte probleme redacţia posedă soluţiuni care nu au fost publicate.

*) Soluţia problemei 585 s'a publicat la pag. 88. Vol. VII. Se mai aşteaptă discuţia la punctele cerute în nota de la finele acelei soluţii.

**) A se vedea lămuriri la pag. 291, Vol. XXXI.

***) O soluţie s'a dat în articolul dela pag. 619, Vol. XLI. A se vedea şi nota dela pag. 248 Vol. XLII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
1969	399 (XVIII)	
1976	431 „	
1987	462 „	NR
2004	40 (XIX)	NR
2016	79 „	
2017	80 „	NR
2018	80 „	
2024	118 „	
2025	119 „	
2032	120 „	
2035	159 „	256
2038	159 „	
2048	198 „	
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 „	
2065	239 „	
2070	240 „ 280 „	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2083	280 „	
2091	319 „	
2106	358 „	
2108	359 „	
2110	359 „	
2112	360 „	
2116	398 „	
2118	399 „	
2129	438 „	
2130*)	460 „	
2133	439 „	
2144	461 „	
2145	462 „	
2147	462 „	
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2194	197 „	
2197	198 „	
2217	239 „	
2222	240 „	
2227	279 „	
2235	280 „	
2240	318 „	
2247	320 „	
2248	320 „	
2249	320 „	
2250	320 „	
2263	359 „	
2264	360 „	
2265	360 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2266	360 (XX)	
2274	398 „	
2281	400 „	
2284	439 „	
2289	439 „	141
2290	439 „	
2295	461 „	
2298	462 „	
2301	462 „	
2302	462 „	
2311	40 (XXI)	
2318	79 „ 160 „	365
2330	118 „	
2332	119 „	
2337	120 „	
2338	122 „ 422 (XXXI)	NR
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2353	159 „	
2357	199 „	
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2381	278 „	
2394	318 „	
2397	319 „	142
2405	320 „ 423 (XXXI)	NR
2408	359 (XXI)	38
2422	399 „	
2423	399 „	
2430	439 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2439	440 „	NR
2456	31 (XXII)	
2461	32 „	
2462	62 „	
2466	63 „	
2477	95 „	NR
2479	144 „	
2500	144 „	
2529	262 „	
2537	287 „	
2539	288 „	
2545	312 „	
2552	47 (XXIII)	

*) Inlocuește problema 2130 propusă la pag. 430, Vol. XIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2553	47 (XXIII)	
2560	72 „	
2566	120 „	
2569	120 „	
2573	144 „	
2575	168 „	
2577	168 „	NR
2578	168 „	
2585	215 „	
2586	216 „	
2587	216 „	NR
2591	240 „	
2593	264 „	
2599	288 „	
2602	318 (XXXI)	
2607	31 (XXIV)	NR
2631	112 „	
2638	127 „	NR
2645	143 „	
2647	143 „	
2655	191 „	NR
2660	191 „	
2661	192 „	
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	NR
2675	63 „	
2682	64 „	
2684	80 „	NR
2688	80 „	
2689	80 „	
2692	108 „	
2694	108 „	
2713	143 „	NR
2717	143 „	NR
2727	168 „	
2731	191 „	
2735	192 „	NR
2752	264 „	
2758	56 (XXVI)	
2769	79 „	NR
2778	104 „	
2789	135 „	
2803	160 „	
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2820	216 „	
2822	216 „	
2827	247 „	
2828	248 „	
2850	335 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2851	335 (XXVI)	
2865	70 (XXVII)	NR
2886	104 „	NR
2895	143 „	305
2906	184 „	
2909	221 „	NR
2912	222 „	NR
2920	262 „	
2922	263 „	
2926	264 „	NR
2936	343 „	NR
2947 *)	376 „	NR
2953	416 „	
2955	416 „	
2959	448 „	
2960	448 „	
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2993	119 „	
2996	120 „	
2999	120 „	
3000	120 „	
3003	159 „	
3005	159 „	
3013	199 „	
3019	200 „	
3041	319 „	
3052	359 „	
3054	360 „	
3059	360 „	425
3069	400 „	NR
3070	400 „	
3071	439 „	
3073	439 „	
3075	439 „	
3081	479 „ / 454 (XXXI)	NR
3085	480 (XXVIII)	
3086	480 „	
3090	480 „	306
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3096	40 „	
3108	80 „	
3118	120 „	
3127	159 „	NR
3134 **)	199 „	
3150	240 „	

*) Vezi rectificarea pag. 448, Vol. XLIII.

**) A se vedea soluția parțială dela pag. 254 și nota dela pag. 300, Vol. XLII. Se așteaptă completarea soluției.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
3160	280 (XXIX)	
3161	318 „	NR
3167	320 „	
3173	358 „	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3208	480 „	NR
3210	480 „	
3220	40 (XXX)	
3227	80 „	
3228	80 „	
3230	80 „	
3232	119 „	
3236	119 „	
3239	120 „	
3245	160 „	
3248	160 „	426
3249	160 „	
3251 *)	198 „	
3253	199 „	
3255	199 „	NR
3260	200 „	
3267	239 „	
3277	280 „	
3279	280 „	257
3287	320 „	
3288	320 „	
3291	358 „	
3296	359 „	
3298	359 „	NR
3300	360 „	
3304	399 „	NR
3308	400 „	
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3319	440 „	642
3320	440 „	
3332	119 (XXXI)	
3340	40 „	
3341	79 „	
3343	79 „	643
3350	80 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
3360	120 (XXXI)	
3365	159 „	
3389	240 „	
3396	280 „	
3404	318 „	
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	NR
3429	400 „	
3430	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	
3448	479 „	
3456	119 (XXXIII)	
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3467**)	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	
3474	119 „	
3477	119 „	
3488	159 „	
3489	159 „	309
3493	160 „	
3495	199 „	
3497	199 „	
3499	199 „	
3504	200 „	
3506	239 „	
3509	239 „	
3512	240 „	
3513	240 „	
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	NR
3524	280 „	200
3533	320 „	NR
3534	320 „	
3535	359 „	
3536 ***)	438 „	
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3546	399 „	
3547	399 „	
3551	39 (XXXIII)	
3554	400 (XXXII)	
3557	438 „	588

*) Un început de soluție s'a dat la pag. 314, Vol. XXX. Se așteaptă soluția completă.

**) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXII.

***) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3562	440 (XXXII)	
3565	479 „	
3572	480 „	NR
3573	480 „	NR
3584	79 (XXXIII)	
3588	80 „	
3589	80 „	
3597	120 „	
3600	120 „	
3607 *)	159 „	
3608	159 „	NR
3610	160 „	
3620	199 „	
3622 **)	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	NR
3630	240 „	
3635	279 „	NR
3639	280 „	
3644	319 „	
3647	320 „	NR
3650	320 „	647
3653	359 „	
3657	359 „	NR
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	
3664	399 „	
3665	399 „	NR
3675	439 „	
3677	440 „	
3681	478 „	NR
3682	478 „	
3689	480 „	
3692	39 (XXXIV)	479
3693	39 „	
3699	40 „	NR
3700	40 „	NR
3702	79 „	
3703	79 „	481
3705	79 „	
3706	79 „	
3713	119 „	
3714	119 „	
3720	120 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3733	119 (XXXV)	NR
3736	200 (XXXIV)	NR
3749	240 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3755	279 (XXXIV)	591
3762	319 „	
3763	319 „	
3764	319 „	
3765	320 „	
3766	320 „	144
3768	320 „	
3772	359 „	
3775	360 „	
3776	360 „	
3780	360 „	
3784	399 „	
3787	400 „	
3790	400 „	
3792	439 „	
3793	439 „	NR
3802	479 „	NR
3804	479 „	
3807	480 „	
3808 ***)	480 „	
3810	480 „	
3817	40 (XXXV)	
3819	40 „	
3820	40 „	
3823	79 „	
3824	79 „	
3829	80 „	NR
3832	119 „	146
3836	120 „	NR
3837	120 „	
3839	120 „	594
3840	120 „	
3844	159 „	NR
3845	159 „	
3849	160 „	
3853	199 „	NR
3863	239 „	
3864	239 „	NR
3867	240 „	
3873	279 „	
3874	38 (XXXVIII)	
3876	279 (XXXV)	
3880	280 „	
3883	319 „	
3896	360 „	NR
3902	398 „	
3909	400 „	NR
3911 ****)	439 „	
3913	439 „	NR
3915	439 „	

*) Vezi erata pag. 240, Vol. XXXIII.
**) Vezi erata pag. 280, Vol. XXXIII.
***) A se vedea completarea enunțului la pag. 288, Vol. XL.
****) Începutul soluției acestei probleme a fost dat la pag. 468, Vol. XXXVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3916	439 (XXXV)	NR
3920	440 „	NR
3924	479 „	
3926*)	480 „	309
3933	39 (XXXVI)	NR
3934	39 „	
3939	40 „	
3944	79 „	NR
3945	79 „	
3950	80 „	
3961	159 „	
3965	159 „	
3975	200 „	
3976	200 „	
3983	238 „	NR
3985	239 „	40
3988	240 „	
3999	280 „	
4000	280 „	
4005	319 „	
4010	320 „	NR
4013	359 „	NR
4022	398 „	
4028	400 „	
4029	400 „	
4030	400 „	NR
4034	439 „	NR
4035	440 „	
4038	440 „	649
4041	38 (XXXVIII)	
4044	479 (XXXVI)	148
4045	479 „ / 142 (XL)	NR
4053**)	39 (XXXVII)	NR
4055	39 „	
4056	79 „	
4059	40 „	NR
4060	40 „	
4062	79 „	NR
4067	80 „	
4068	80 „	NR
4070	80 „	NR
4074	119 „	
4075	120 „	
4080	120 „	
4083	159 „	
4084	159 „	
4085	159 „	NR
4088	160 „	651
4093	199 „	
4096	200 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4097	200 (XXXVII)	483
4098	200 „	
4102	239 „	NR
4103***)	239 „	
4104	239 „	
4105	240 „	
4107	240 „	
4111	279 „	NR
4112	279 „	
4118	280 „	
4121	318 „	
4125	319 „	
4126	319 „	
4127	320 „	
4132	359 „	NR
4135	359 „	
4148	400 „	NR
4150	400 „	NR
4151	438 „	NR
4155	439 „	
4162	478 „	427
4163	478 „	NR
4166	479 „	595
4167	479 „	NR
4169	480 „	NR
4172	39 (XXXVIII)	
4173	39 „	310
4175	39 „	
4177	40 „	
4181	78 „	
4184	79 „	
4185	79 „	
4192	118 „	
4194	119 „	
4196	119 „	312
4199	120 „	
4203	159 „	NR
4206	160 „	NR
4210	160 „	NR
4214	198 „	
4215	199 „	
4225	239 „	
4226	240 „	
4230	240 „	NR
4232	279 „	
4234	279 „	
4236	280 „	NR
4238	280 „	369
4240	280 „	NR
4243	319 „	

*) Vezi rectificarea dela pag. 40, Vol. XXXVI.
**) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.
***) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4244	319 (XXXVIII)	
4245	319 „	
4247	320 „	
4248	320 „	485
4249	320 „	NR
4250	383 (XXXIX)	
4251	359 (XXXVIII)	
4252	359 „	NR
4256	359 „	NR
4257	359 „	
4270	400 „	
4274	439 „	
4275	439 „	NR
4277	440 „	NR
4279	118 (XXXIX)	
4280	440 (XXXVIII)	NR
4281	479 „	NR
4283	479 „	NR
4285 *)	479 „	
4287	480 „	
4289	480 „	NR
4290	383 (XXXIX)	NR
4297	40 „	
4298	40 „	
4299	40 „	
4301	78 „	202
4302	78 „	
4303	78 „	NR
4307	79 „	
4308	80 „	
4315	120 „	NR
4316	120 „	
4319	120 „	NR
4320	120 „	NR
4326	159 „	
4329	160 „	
4333	198 „	NR
4335	198 „	
4337	200 „	NR
4339	200 „	
4340	200 „	NR
4342	239 „	NR
4350	240 „	
4352	286 „	NR
4355	287 „	40
4356	287 „	NR
4357	288 „	NR
4358	288 „	NR
4360	334 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4362	334 (XXXIX)	NR
4363	335 „	NR
4365	335 „	207
4368	336 „	
4369	336 „	
4370	336 „	
4373	383 „	
4376	384 „	
4377	384 „	
4378	384 „	540
4379	384 „	314 **)
4380	384 „	NR
4384	431 „	NR
4385	431 „	596
4389	432 „	NR
4393	478 „	NR
4395***)	479 „	NR
4396	479 „	NR
4398	480 „	
4399	480 „	NR
4400	480 „	
4402	480 „	
4404	526 „	NR
4405	526 „	
4406	526 „	
4407	527 „	
4410	527 „	
4411	528 „	
4412	528 „	NR
4416	46 (XL)	NR
4417	46 „	151
4420	47 „	
4426	48 „	NR
4432	95 „	
4435	96 „	
4437	96 „	92
4438	96 „	207
4441	143 „	
4442	143 „	
4445	143 „	NR
4446	143 „	
4447	144 „	259
4449	144 „	NR
4450	144 „	
4452	190 „	NR
4453	190 „	
4458	191 „	
4461	192 „	316
4464	238 „	NR

*) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIX.

**) I s'a mai publicat o soluție la pag. 495, Vol. XLI.

***) Vezi erata pag. 48, Vol. XL.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4465 . . .	238 (XL)	210
4466 . . .	239 „	211
4468 . . .	239 „	NR
4470 . . .	240 „	
4473 . . .	240 „	NR
4474 . . .	240 „	NR
4478*) . .	285 „	
4479 . . .	285 „	NR
4480 . . .	286 „	NR
4481 . . .	286 „	NR
4482 . . .	287 „	261
4484 . . .	287 „	
4486**) . .	288 „	NR
4487 . . .	334 „	NR
4489 . . .	334 „	NR
4490 . . .	335 „	NR
4491 . . .	335 „	211
4492 . . .	335 „	NR
4494 . . .	336 „	
4495 . . .	336 „	653
4496 . . .	336 „	
4498 . . .	336 „	
4503 . . .	383 „	213
4507 . . .	384 „	
4509 . . .	384 „	
4511 . . .	430 „	NR
4513 . . .	430 „	NR
4514 . . .	431 „	319
4515 . . .	431 „	
4516 . . .	431 „	NR
4520 . . .	432 „	
4522 . . .	432 „	94
4524 . . .	478 „	372
4525 . . .	478 „	
4526 . . .	478 „	
4527 . . .	479 „	
4529 . . .	479 „	
4530 . . .	480 „	373
4533 . . .	480 „	NR
4534 . . .	480 „	NR
4540 . . .	527 „	
4547 . . .	573 „	NR
4548 . . .	573 „	
4550 . . .	574 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4551 . . .	574 (XL)	42
4553***) .	574 „	
4556 . . .	575 „	
4557 . . .	575 „	
4558 . . .	576 „	NR
4559 . . .	116 (XLI)	
4560****) .	116 „	
4561 . . .	116 „	NR
4564*****).	117 „	
4566 . . .	118 „	
4568 . . .	118 „	
4570 . . .	118 „	655
4571 . . .	119 „	
4573 . . .	119 „	
4574 . . .	119 „	487
4575 . . .	119 „	96
4576 . . .	119 „	
4577 . . .	120 „	597
4578 . . .	120 „	
4581 . . .	166 „	
4586 . . .	262 „	262
4587 . . .	262 „	NR
4588 . . .	168 „	
4589 . . .	168 „	
4590 . . .	168 „	
4592 . . .	215 „	NR
4593 . . .	215 „	
4594 . . .	215 „	152
4595 . . .	215 „	
4596 . . .	215 „	NR
4597 . . .	216 „	264
4598 ******)	216 „	NR
4599 . . .	216 „	430
4601 . . .	216 „	NR
4602 . . .	216 „	NR
4603 . . .	262 „	NR
4605 . . .	263 „	NR
4607*******)	263 „	
4611 . . .	264 „	432
4612********)	264 „	153
4613 . . .	264 „	
4614 . . .	264 „	
4615 . . .	310 „	NR
4618 . . .	311 „	

*) Vezi erata pag. 384, Vol. XL.

**) Vezi erata pag. 120, Vol. XLI.

***) I s'a dat o soluție la pag. 352, Vol. XLI. A se vedea nota de la pag. 302. Vol. XLII. Se așteaptă completarea soluției.

****) Vezi erata pag. 160, Vol. XLI.

*****) Vezi o soluție la pag. 412, Vol. XLI.

******) Vezi erata pag. 264, Vol. XLI.

*******) „ „ „ 312, „ „

********) Vezi erata pag. 224, Vol. XLIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4619	311 (XLI)	43
4620	311 „	
4621	311 „	
4622	312 „	
4625	312 „	
4626	312 „	598
4628	359 „	NR
4630	359 „	NR
4631	359 „	
4633	359 „	
4634	360 „	
4636	360 „	NR
4637	360 „	
4638	360 „	
4639	406 „	
4640	406 „	
4641	407 „	NR
4642	407 „	
4644	407 „	
4647	408 „	NR
4648 *)	408 „	
4649	408 „	
4650	408 „	NR
4652	453 „	
4654	454 „	
4655	454 „	
4657	454 „	NR
4660	455 „	
4661 **)	455 „	153
4663	502 „	97
4664	503 „	
4666	503 „	
4667 ***)	503 „	NR
4670	504 „	NR
4671	504 „	
4672	504 „	NR
4673	504 „	
4674	504 „	
4675	550 „	NR
4676	550 „	
4677	550 „	45
4678	550 „	
4680	550 „	NR
4681	551 „	
4682	551 „	600
4683	551 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4685 ****)	552 (XLI)	NR
4686	552 „	NR
4687	598 „	490
4688	598 „	
4689	598 „	541
4690	598 „	NR
4691	599 „	98
4693	599 „	NR
4695	600 „	
4696	600 „	
4697	600 „	
4698	600 „	NR
4702	646 „	101
4703	647 „	
4704	647 „	
4705	647 „	
4706	647 „	
4707	648 „	321
4708 *****)	54 (XLII)	
4709	648 (XLI)	215
4710	648 „	NR
4715	55 (XLII)	103
4717	55 „	
4720	56 „	
4722	56 „	
4723	110 „	
4724	110 „	
4726	110 „	
4728	111 „	103
4729	111 „	
4730	111 „	
4731 ******)	112 „	
4733	112 „	322
4734	112 „	NR
4736	166 „	433
4738	166 „	
4740	167 „	
4741	167 „	
4742	167 „	NR
4743	168 „	157
4745	168 „	
4746	168 „	375
4749	223 „	NR
4751	223 „	46
4753	223 „	
4754	224 „	379

*) Vezi erata pag. 456, Vol. XLI.
**) Vezi erata pag. 224, Vol. XLIII.
***) Vezi erata pag. 552, Vol. XLI.
****) I s'a rectificat numărul de ordine la pag. 600, Vol. XLI.
*****) I s'a rectificat enunțul de la pag. 648, Vol. XLI.
******) Vezi erata pag. 56, Vol. XLIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost · Propusă [1])	Rezolvată [2])
4755 . . .	224 (XLII)	
4757 . . .	224 „	47
4758 . . .	224 „	
4761 *) . .	278 „	NR
4762 . . .	278 „	542
4764 . . .	279 „	544
4765 . . .	279 „	
4766 . . .	279 „	
4768 . . .	280 „	
4770 . . .	280 „	NR
4772 . . .	334 „	NR
4773 . . .	335 „	
4774 . . .	335 „	
4775 . . .	335 „	436
4776 . . .	335 „	49
4777 . . .	335 „	
4778 . .	336 „	159
4779 . . .	336 „	
4780 . . .	336 „	
4781 . . .	336 „	NR
4782 . . .	336 „	
4783 . . .	390 „	
4784 . . .	390 „	381
4785 . . .	390 „	
4786 . . .	390 „	386
4787 . . .	390 „	
4789 . . .	391 „	265
4790 . . .	391 „	
4791 . . .	391 „	NR
4792 . . .	392 „	658
4793 . . .	392 „	
4794 . . .	392 „	
4795 **) .	446 „	554*)
4796 ***) .	446 „	50
4797 . . .	446 „	
4798 . . .	446 „	
4799 ****) .	447 „	611 ***)
4800 *****)	447 „	547
4801 . . .	447 „	
4802 . . .	447 „	106
4803 . . .	447 „	
4804 . . .	448 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost': Propusă [1])	Rezolvată [2])
4805 . . .	448 (XLII)	NR
4806 . . .	448 „	
4807 . . .	502 „	NR
4809 . . .	502 „	
4810 . . .	502 „	
4811 . . .	503 „	160
4812 . . .	503 „	NR
4813 . . .	503 „	51
4814 . . .	503 „	
4815 . . .	504 „	
4816 . . .	504 „	107
4817 . . .	504 „	
4818 . . .	504 „	
4820 . . .	558 „	269
4821 . . .	558 „	
4822 . . .	558 „	
4823 . . .	559 „	437
4824 . . .	559 „	384
4825 . . .	559 „	
4826 . . .	559 „	
4827 . . .	560 „	493
4828 . . .	560 „	217
4829 ******)	165 (XLIII)	
4830 . . .	560 (XLII)	493
4831 . . .	614 „	
4832 . . .	614 „	
4833 . . .	614 „	550
4834 . . .	614 „	659
4835 . . .	615 „	495
4836 . . .	615 „	
4837 . . .	615 „	
4838*******)	615 „	NR
4839********)	616 „	NR
4840 . . .	616 „	NR
4841 . . .	616 „	552
4842 . . .	616 „	
4843 . . .	670 „	161
4844 . . .	670 „	
4845 . . .	670 „	
4846 . . .	670 „	
4847 . . .	671 „	
4848 . . .	671 „	

*) I s'a rectificat enunțul la pag. 616, Vol. XLII.

**) Rezolvată la pag. 554, Vol. XLII. Vezi erata dela pag 163 din acest an.

***) Trecută din eroare ca rezolvată în Vol. XLII. Vezi erata pag. 168 din acest an.

****) Rezolvată la pag. 611, Vol. XLII. A se rectifica la pag. 694, Vol. XLII, înlocuind NR prin 611.

*****) Trecută din eroare ca rezolvată în Vol. XLII, unde se va rectifica la pag. 694 înlocuind 611 prin NR.

******) Problema propusă cu acest număr la pag. 530, Vol. XLII, se anulează. Vezi pag. 165 și pag. 280, Vol. XLIII.

*******) Vezi erata pag. 672, Vol. XLII.

********) „ „ „ 672, „ „

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4849	671 (XLII	NR
4850	671 „	439
4851	671 „	
4852	672 „	
4853	672 „	NR
4854	672 „	NR
4855	54 (XLIII)	162
4856	54 „	270
4857	54 „	271
4858	55 „	324
4859	55 „	NR
4860	55 „	
4861	55 „	325
4862	55 „	219
4863	56 „	
4864	56 „	328
4865	56 „	601
4866	56 „	
4867	110 „	329
4868	110 „	385
4869	110 „	555
4870	110 „	
4871	111 „	NR
4872	111 „	
4873	111 „	330
4874	112 „	
4875	112 „	273
4876	112 „	
4877	112 „	441
4878	112 „	555
4879	166 „	NR
4880	166 „	
4881 *)	166 „	
4882	166 „	274
4883	166 „	
4884	166 „	
4885 **)	167 „	
4886	167 „	275
4887	167 „	
4888	167 „	NR
4889	168 „	NR
4890	168 „	NR
4891	222 „	331
4892	222 „	
4893	222 „	496
4894	222 „	NR
4895	223 „	
4896	223 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost Propusă [1]	Rezolvată [2]
4897	223 (XLIII)	
4898	223 „	
4899	223 „	442
4900	224 „	387
4901	224 „	NR
4902	224 „	
4903	278 „	497
4904	278 „	
4905	278 „	NR
4906	278 „	603
4907	279 „	
4908	279 „	
4909	279 „	
4910	279 „	
4911	279 „	
4912	280 „	NR
4913	280 „	NR
4914	280 „	NR
4915	334 „	NR
4916	334 „	605
4917	334 „	
4918	334 „	
4919	334 „	606
4920	334 „	NR
4921	334 „	
4922	335 „	
4923	335 „	
4924	335 „	661
4925	335 „	
4926	336 „	
4927	390 „	NR
4928	390 „	
4929	390 „	NR
4930	390 „	
4931	391 „	
4932	391 „	
4933	391 „	
4934	391 „	
4935	391 „	
4936	392 „	
4937	392 „	NR
4938	392 „	NR
4939 ***)	446 „	
4940	446 „	
4941 ****)	446 „	
4942	446 „	NR
4943	446 „	
4944	447 „	NR

*) Vezi erata pag. 224, Vol. XLIII.
**) „ „ „ 392, Vol. XLIII.
***) „ „ „ 504, Vol. XLIII.
****) „ „ „ 504, Vol. XLIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4945	447 (XLIII)	
4946	447 „	
4947	447 „	
4948	447 „	
4949	448 „	NR
4950	448 „	633
4951	502 „	655
4952	502 „	
4953 *)	614 „	
4954	502 „	NR
4955	503 „	NR
4956	503 „	
4957	503 „	
4958	503 „	
4959	504 „	NR
4960	504 „	
4961	504 „	
4962	504 „	NR
4963	558 „	NR
4964	558 „	
4965	558 „	NR
4966	558 „	NR
4967	559 „	NR
4968	559 „	
4969	559 „	NR
4970	560 „	
4971	560 „	NR
4972	560 (XLIII)	NR
4973	560 „	NR
4974	560 „	NR
4975	614 „	NR
4976	614 „	NR
4977	614 „	NR
4978	614 „	NR
4979	615 „	NR
4980	615 „	NR
4981	615 „	NR
4982	615 „	NR
4983	616 „	NR
4984	616 „	NR
4985	616 „	NR
4986	616 „	NR
4987	670 „	NR
4988	670 „	NR
4989	670 „	NR
4990	670 „	NR
4991	670 „	NR
4992	671 „	NR
4993	671 „	NR
4994	671 „	NR
4995	671 „	NR
4996	672 „	NR
4997	672 „	NR
4998	672 „	NR

I. EXERCIȚII **)

Aritmetica și teoria numerelor . . . . . 13(220), 17(276).

Geometria . . . . . 1(52), 5(108), 11(164), 18(276), 22(332), 31(445), 35(610).

Algebra . . . . . 2(53), 3(53), 4(54), 6(108), 7(109), 8(109), 9(163), 10(164), 14(220), 19(277), 30(444), 33(501), 36(611), 37(612), 40(666).

Trigonometria . . . . . 12(165), 15(221), 20(277), 21(277), 23(332), 24(333), 25(333), 27(388), 28(388), 29(389), 32(500), 38(613), 39(613), 41(666), 42(667), 43(668).

Analitica . . . . . 16(222), 26(333, 34(558).

---

*) I s'a modificat enunțul dela pag. 502, Vol. XLIII.

**) Numerele din paranteză indică pagina la care a fost propus exercițiul al cărui număr precede paranteza.

J. TABLOUL NUMELOR

Aaron F., 639.
Abason E., 6, 89, 419, 573.
Abel, 561.
Abramescu N., 5, 6, 27, 56, 81, 89, 196, 280, 342, 539, 563, 601.
Acikgheozian N., 594.
Adam I. M., 53, 86, 88, 108, 164, 199, 306, 313, 333, 388, 389, 417, 667.
Adrian N. G., 273, 274.
Agrigoroaei A., 373.
Ahmes Rhind d., 352.
Alaci V., 5, 6, 40, 143, 304, 638.
Alasia C., 640.
Albeaţă E., 591.
Albert A. A., 538.
Aldea D., 369.
Aldea N. N., 6, 167, 310, 312, 427, 481, 595, 649, 653.
Aldea V. V., 299.
Alembert D'., 542, 562.
Alexandrescu C. M., 220, 275, 388, 442, 663.
Alexandrescu Gh. P., 220, 273.
Alexiu Gh., 369.
Alexiu Iul., 364, 437, 439, 614.
Alinescu C., 257.
Almăjan P., 481.
Altschiller - Court N., 33, 134.
Amărăşteanu F. M., 48, 53, 97, 112, 152, 157, 160, 162, 206, 211, 243, 263, 268, 271, 273, 315, 328, 373, 386, 387, 430, 435, 442, 541, 601, 611, 657.
Ampère André-Marie, 28, 423.
Amfilochie din Hotin, 34.
Anastasiu M. M., 51, 106, 220, 272, 300, 386.
Anastasiu C. V., 141, 369, 386.
Andreian T. I., 421.
Andriescu M. R., 382.
Andriescu V., 269.
Andrievici N., 442.
Andrievici S., 239, 240, 289.
Andronachi V., 551.
Andronescu Pl., 256.
Andronik Al., 587.
Andronik Maria, 587.
Angelescu A., 6, 56, 506, 507, 640, 642.
Angelescu Aurelian, 481.
Angheluţă Th., 5, 6, 34, 145, 257, 261, 279, 328, 336, 342, 421, 422, 448, 460, 507, 523, 538, 539, 563, 659, 663, 672.
Anicolaesi V. C., 100.
Antipa Gr., 639.
Antomari X., 506.
Antonescu M., 299.
Antonescu N., 481.
Antoni P. C., 140, 256.
Antoniu C., 6.
Antoniu S. I., 5, 6, 309, 505.
Antonovici Em., 422.
Apostol G. N., 273, 274, 386.
Apostol V. R., 47, 48, 50, 99, 160, 161, 276, 300, 324, 328, 373, 382, 438, 552, 557, 598, 601, 602, 636, 657, 659.
Appel P, 137, 186, 506, 639.
Appeltauer, 587.
Appolonius, 476, 525.
Aprihăneanu I., 141.
Arapu I., 91.
Archimede, 343, 352, 353, 355, 406, 407.
Arghiriade Em., 6, 302, 361, 505.
Arhipescu M. C., 443.
Arhizescu M., 331.
Aristippus, 450.
Aristotel, 364.
Armeanca I., 6.
Arnold A., 141.
Arşavschi Al., 93, 321, 375, 593, 654.
Artaza E., 196, 538.
Arvanitis C. A., 427.
Asachi Gh., 64, 120, 121, 235, 344, 347, 398, 400, 403, 453, 510, 564, 565, 566, 568, 587, 618, 621.
Atanasiu I., 479.
Atanasiu C. V., 271, 273, 386.
Aubert, 145, 228, 385, 419.
Augustin R., 141.
Avram N. C., S-lt., 93, 310, 312.
Avramescu A., 33.
Avramescu C., 6.
Azambuja d'., 356.

Babini J., 195.
Bacaloglu, 422.
Bachet, 175.
Bâcicov B., 481.
Bâcicov V., 481.
Baciu T., 481.
Bäcklund, 424.
Bădescu E. A. S-lt., 313, 650.
Bădescu F. Al. S-lt., 281, 287, 394, 396.
Bădescu Fl. C., 161, 300.
Bădescu A. L., 7, 287.
Bădescu R., 7, 539, 563.
Bădulescu V., 369.
Baidaff Ig. B., 7, 134, 363, 476, 538, 638.
Baiulescu I., 283.
Bal S. L., 48, 103, 104, 106, 268, 323, 382.
Balaban N., 476.
Bălăceanu Angela, 316.
Bălăceanu A. B. I., 316.
Bălăceanu G. D-ra, 596.
Bălan E., 306.
Banach, 421.
Bancea N. N., 443.
Banciu I., 7, 527.
Bănulescu M. Căp., 78.
Bărbieru V. V., 161, 274.
Barbilian D., 5, 7, 64, 75, 120, 139, 168, 188, 424.
Bardey E., 540.
Barisien N. E., 141.
Bârlea G. V., 386.
Bârsănescu V., 427.
Basacov Gh., 388.
Baumgartner I., 657.
Bazac I. Al., 105.
Bazacov *) Gh., 555, 557, 608.
Beeckman I., 171.
Béghin, 23.
Begu St., 657.
Beiu-Paladi G. E., 48, 300, 387, 443, 657.

*) Acelaşi cu *Basacov*.

Belian R., 141, 257.
Berdan C., 210.
Béreux, 354.
Berlinblum H., 141.
Bernouilli, 375, 419, 478, 647.
Berra S. E., 88, 89, 253, 418.
Bertrand, 422, 560.
Beşleagă N. Fl., 300.
Biernachi M., 539, 561, 562, 573.
Billy G., 349.
Bivolaru M. L., 48, 100, 323, 435, 436, 541.
Blaga E., 373, 657.
Blaha N., 309.
Blanc M. G., 35, 140.
Bleiweiss P., 143, 427.
Bleynie M., 425.
Blum L. I., 91.
Blumen M., 306, 427.
Blumenfeld M. D., 306.
Bodea E., 141, 256.
Bodnărescu M. H., 107, 272, 325, 381, 604, 636, 659.
Boerescu Gh., 481.
Bogdan Gr. I., 49, 100, 161, 373, 541, 551, 657, 659.
Bogza G. V., 100.
Bohnenblust F. H., 476.
Boian D. Em, 161, 386, 551.
Boian C. I., 314, 316, 481, 595.
Boian L., 271.
Boiangiu I. Gh., 312, 313, 657.
Boldescu P., 553, 606, 639.
Bolgiu O., 226.
Bolyai I., 176, 182, 184.
Bombelli, 409.
Bool, 134.
Borel E., 305, 349, 355, 627.
Borneanu G., 7.
Boroş I, 657.
Borza A. N., 312.
Bosgan I., 91.
Bosinceanu D. G., 331.
Boşoldea Gr. Gr., 331, 443.
Botea E., 364.
Botea G. N., 5, 6, 7, 225, 226, 227, 228, 304, 525, 597, 600.
Botez St. M., 7.
Botez D. R., 161.
Botez Tr., 609.
Botezatu C. F., 106, 161, 551.
Bovgan Gh., 271.
Brassat R., 481.
Brătan Gh. M, 272, 300.
Brătescu-Danubiu M., 306.
Brătianu Vintilă, 396.
Bratu Gh., 7, 342, 421, 539, 563.
Brelot M., 421.
Bremant, 562.
Brener A, 7, 38, 369.
Brianchon, 126, 361.
Bricard R., 349, 354.
Brock F., 141.
Broglie L. de, 561.
Broşteanu E., 141.
Brukner V., 7.
Brüll L., 143.
Bucur A., 369.
Bucur N. V., 315, 373, 541, 657.
Bucurenciu I. V., 48, 105.
Bucurescu I. Lt., 7.
Budeanu I. C., 7, 140, 197, 254, 256, 419, 423.
Buffon, 350.
Buhl A. M., 506.
Buiciiu Gh. G-l, 5, 6, 7, 33, 54, 89, 148, 166, 189, 200, 210, 220, 257, 271, 273, 279, 301, 319, 321, 334, 357, 358, 359, 364, 373, 381, 416, 433, 435, 446, 460, 463, 479, 481, 483, 534, 541, 560, 582, 605, 606, 610, 649, 670.
Bujoiu E. I., 91.
Bujoreanu N., 7.
Bulgăreanu C., 141, 369.
Bumbulici P., 481, 483.
Bunescu D. A., 5, 7, 78, 188.
Bungescu I., 8.
Bungeţeanu Preduţa, 124, 139, 312, 313, 341, 364.
Buradescu Tr., 8.
Burbea T., 220.
Burghelea S. C., 272, 274, 275, 300.
Burghelea Şt., 272.
Burichovici A., 306.
Buricliovici A., 481.
Burlacu E, 481.
Bursan C., 657.
Buşilă Ad., 8, 433, 486, 493, 495, 504.
Buşilă D. C., 8, 197, 2,29 396.
Buşilă I., 8.
Buzincu I. I., 100, 157, 260, 315, 321, 324, 373, 380, 432, 541, 598, 657.
Buznea D. D., 273, 275, 300, 386, 442, 507.

Căldăraru L., 257, 259.
Călin I. C. D., 373.
Călin M. Gh., 306, 427, 643.
Călinescu A., 99, 152, 268, 272, 328, 375, 430, 481, 601, 602, 657.
Călinescu P. D-ra, 598.
Călugăreanu G., 167, 342, 540, 564.
Cambureanu V. D., 8.
Cambureanu V. V., 8.
Câmpan Fl., 364, 409, 422.
Camus J., 356.
Cândeiu G. Gh., 161.
Cantor M., 364.
Capriel H., 188.
Capriel I., 8.
Caracostea Gh., 394.
Caracudovici Margareta, 93, 315.
Carafoli E., 8.
Caraman E., 8, 479.
Caraman D. V., 49.
Caranfil G. N., 197.
Caratheodory C., 134.
Cardan, 110, 403, 404, 409, 662.
Cardara Gh. Gh., 107, 382, 636.
Cardara-Dimitriu Gh., 386, 556, 557.
Cârdei D. Gh., 300, 665.
Carnot, 41, 103, 228.
Carol II, 123, 617.
Carol VI., 450.
Cartianu Gh., 8.
Cartianu P., 255.
Casimir E. E., 91.
Cassian Gh. Col., 8.
Castelnuovo C., 628.
Castelnuovo G., 627.
Cassini, 350.
Castriş V. Lt., 357.
Catalan E., 412.
Catz S., 418.
Cauchy, 90, 457, 562, 563.
Cavallaro G. V., 476.
Caylay, 185.

Cazacu N. C., 8.
Cazanacli V. P., 69, 123, 239, 347, 403, 457, 514, 570, 621.
Ceauşescu E. V., 373, 430.
Ceauşescu F. V., 541.
Ceauşescu I. V., 312, 315, 596, 657.
Ceauşoglu V., 141, 369.
Cerclearu Gr. D., 373, 430, 657.
Cerchez Gr., 232.
Cerchez M., 662.
Cernat Gh., 369.
Cernat V., 369.
Cernuschi F., 195.
Cesare A. E. de, 33, 88.
Cesaro, 458.
Cetăţeanu N., 300.
Cetăţeanu St., 51, 161, 268, 271, 272, 300, 381, 386, 547, 551, 636.
Ceva, 100, 125.
Charles I., 174.
Charpentier M. D-ra, 539, 561, 562.
Chasles, 135, 412.
Chiriac I. C., 373, 387, 430, 496, 596, 657.
Chiriac N., 479.
Chiricescu V., 8.
Chiricuţă A., 8.
Chirilă M. M., 373.
Chiriţă Gh., 161.
Chiriţă M. M., 315, 430, 433.
Chiţu P. M., 310.
Chiţuleasa C. I., 300.
Chiţulescu I. I., 5, 8, 505, 506, 507.
Christina, 171.
Cioc I. D., 103, 107, 161, 220, 273, 274, 300, 330, 382, 430, 439, 442, 552, 602.
Cioc M , 8.
Ciocianu C., 369.
Ciorănescu I. N., 5, 8, 139, 143, 419, 424, 427, 432, 485, 560, 561, 563, 616, 671.
Ciucă I., 657.
Ciupag St. H., 272, 274, 551.
Ciurescu I. R., 48, 435, 544, 659.
Civita L., 134.
Clairaut, 92, 137, 138.
Claudian V., 375, 638.
Clio, 225.
Cnisky V. C., 649.
Cocea Gh. Th., 41, 42, 46, 55, 160, 207, 223, 314, 324, 391, 503, 559.
Cojocaru I. P., 105.
Cojocaru P. P., 49, 100, 112, 152, 157, 260, 315, 322, 372, 382, 432, 436, 657, 659.
Cojocaru V. P., 541.
Colev E , 141, 197.
Coman V., 158
Comberousse Ch. de, 41, 158, 571.
Comloşan Cornelia, 268.
Constantin V. P., 300, 387, 552, 604.
Constantinescu C. A., 595.
Constantinescu Gh. ing., 9.
Constantinescu Gh. Prof., 206, 363, 538, 639.
Constantinescu Gh. Gh., 92, 105, 107, 132, 135, 141, 151, 161, 210, 218, 257, 259, 261, 269, 304, 322, 363, 419, 424, 427, 436, 481, 483, 552, 642, 648.
Constantinescu I., 256.
Constantinescu T., 9.
Constantinescu V., 161.
Constantinescu Z., 9.
Conta V., 127.
Copeland H. A., 134.
Corâciu I. M., 272.
Coradi, 350.
Corbu R. D., 197.
Cornăţeanu I. A., 161, 268, 271, 272, 274, 300, 328, 331, 386, 442, 507, 552, 554, 556, 602, 604.
Cornăţeanu I., 220, 657.
Cornăţeann O., 663.
Corona, 422.
Corozel Tr., 369.
Coşereanu I., 9, 309.
Coşniţă C., 40, 130, 223, 245, 309, 427, 479, 552, 584, 593, 595, 643, 651.
Costache N., 369.
Costăchel A., 538.
Costăchescu V. C. Lt., 77.
Costescu C., 315, 373.
Costescu Gh. I., 300.
Costinescu D., 9.
Costinescu O., 557.
Cotescu C., 657.
Cotescu I. C., 541.
Cotescu S. C., 315.
Cotigher S. I., 430, 657.
Cotulbea I. C., 161.
Coulomb, 395, 418, 422.
Courché, 354.
Cozma V., 312.
Crăciun I. I., 272, 274, 437, 552.
Crăciun S., 268.
Crăciunescu I. Marcel, 299.
Crăciunescu I. Mioara, 387, 442, 557, 604.
Craiu N. I., 427.
Cramer, 544.
Cramlet M. C., 476.
Creangă Axente, 304.
Crelle 79.
Crihana Gr., 369.
Crişan A. I., 105, 275.
Cristescu S., 338.
Cristescu V., 27, 329, 332, 371, 587, 654, 658.
Crivăţ I. Vl., 310, 481, 483, 595.
Csecke V., 42, 373, 541, 596.
Cuir F., 305.
Curcă C., 443.
Curchi I., 112, 312.
Curea I., 586.
Cuşută H., 141, 369.

Dalban C. Gh., 300.
Dàllyai P. D., 509.
Damaschin G., 35, 197.
Dâmboianu I. Gh., 446.
Dan C., 595.
Dan M., 316, 657.
Dănciulescu Gr. V., 483.
Darboux G., 139, 177, 180, 186, 538.
Darmois G., 134, 349.
Dăscălescu Hr., 9.
Davidescu M., 141, 257.
Dawison A. M., 91.
Deac I., 483, 649.
Deaux R , 33, 155.
Dechevens, 349.
Deciulescu Gh., 103, 107, 220, 325, 382, 386, 442.
Deciulescu D. Gh. Şt. 300.
Deleanu D., 369.
Deleens J., 363.

Delens J., 33, 254, 476.
Demetrescu Gh., 88.
Denjoy A., 34.
Denton Al., 173.
Denton Ed., 173.
Desargues, 44, 63, 118, 120, 382, 553, 554.
Descartes, 170, 171, 172, 173, 175, 409.
Destouches L. J., 539, 561, 562, 586, 638.
Deutsch M. A, 49, 105, 159, 160, 268.
Diaconescu D. I., 48, 274, 275, 328, 331, 387, 437, 442, 552, 555, 609, 659.
Diaconescu G. I, 220.
Diaconescu M., 386, 442.
Diaconescu I. M., 105, 272, 273, 331.
Diaconescu T. M., 300.
Diaconescu T., 306, 643.
Diaconescu V. T., 427.
Dieulefait E. C., 475.
Dimitriu A., 369.
Dimitriu I. C., 100, 106, 541, 659.
Dimitriu Gigea D-ra, 100.
Diophante, 175, 406.
Dirichlet, 195, 363, 413, 539.
Dobbs J. W., 363.
Dobner St., 509.
Dobrescu A., 211, 245.
Dobrescu D. P., 49, 93, 97, 99, 112, 152, 268, 316, 373, 379, 381, 384, 437, 441, 544, 597, 598, 636.
Dobrzycki S., 421.
Dogvan V. Gh., 161.
Donciu N., 481, 595.
Donescu A., 394.
Drăghiceanu M., 365.
Dragomirescu-Buzne Ed. Cpt., 78, 255.
Drăgulinescu M. N., 272.
Drăguţ G. V., 481, 483.
Drâmbă N. C., 424, 427.
Dresch W. F., 476.
Dressel G. F., 639.
Drosescu Gh. I., 9.
Dudeney, 349.
Duffin R., 134.
Duhamel, 457, 458, 459, 460, 660.
Duhem P., 139.
Dumitraşcu N. R., 595.
Dumitrescu C., 586.
Dumitrescu O. C., 299.
Dumitrescu A. D., 9.
Dumitrescu Eug., 481.
Dumitrescu Gh., 141, 369.
Dumitrescu I. Gh., 5, 9, 265, 269, 306, 309, 335, 447, 481, 505 *), 559.
Dumitrescu M. Gh., 274.
Dumitrescu C. I. Ing., 9.
Dumitrescu Th., 139.
Dumitriu C., 48.
Dumitriu I., 363.
Dumont E., 305.
Dunlop N. D., 35.
Duperrex Ed., 282.
Duporcq E., 556.
Dupuis J., 368.
Durrieu M., 33, 88.
Dutchevici M. I., 446.

Eckstein V., 45, 97, 99, 102, 153, 160, 321, 491, 598.
Eiffel, 353.
Einstein, 353.
Elefterescu Maria, 593.
Elias Fr., 197.
Emden, 349.
Emmanuel D., 229.
Enache D. I., 100, 271, 541, 657.
Enescu D. G., 272.
Enneper, 351.
Eratosthene, 352.
Esclangon E., 356.
Estève R., 196.
Euclide, 28, 407, 539.
Euler, 42, 52, 54, 56, 96, 103, 111, 134, 210, 298, 383, 409, 413, 602, 603, 610, 623, 625, 651, 652, 653, 671.
Evans C. G., 134.
Evolceanu V., 369.
Evrard L., 421.

Fabius Dorina, 312.
Fântâneanu I., 226.
Felix C. G-l., 9.
Fermat, 135, 175, 601.
Fernel, 353.
Feroo Scipione del, 408.
Feuerbach, 297, 298, 321, 538, 638.
Fibonacci, 142, 143, 146, 148, 210, 407, 439, 469, 440, 541, 542.
Filip C. B., 161.
Filipescu D., 657.
Filipescu Em., 281.
Filipescu Em. Gh., 9, 139, 169, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 418, 419, 424.
Finsler, 181.
Fistié G., 33.
Fitz-Patrick, 386.
Floareş I. Ad., 443, 609.
Florea I. Ad. 161.
Florea C. Al., 427.
Florescu A., 369.
Florescu B. I., 148.
Florescu H., 315.
Florescu M. M., 306, 442.
Florescu M. U., 5, 6, 9, 138, 166, 193, 387, 616, 672.
Florescu L. V., 47, 48, 50, 98, 103, 104, 107, 157, 159, 160, 161, 218, 219, 220, 243, 263, 264, 268, 269, 271, 273, 275, 300, 324, 331, 373, 381, 382, 385, 386, 411, 412, 424, 430, 437, 439, 442, 496, 506, 549, 552, 556, 597, 598, 602, 635, 657, 658.
Florescu L. Zoe, 386.
Floreşteanu D. Al., 299, 507, 537.
Florian M. A., 331.
Florian Z., 364.
Florido, 408, 409.
Foca I., 427, 479.
Focşăneanu I. M. Căp., 5, 9, 94, 95, 144, 146, 208, 210, 224, 302, 360, 465, 504, 537, 558.
Föppl A., 506.
Fourier, 90.
Franke, 383.

*) Din eroare a fost publicat Demterescu G.

Frederic II, 407.
Fredholm, 639.
Frejier, 81, 556, 637.
Frigură V., 35.
Froda Al., 139, 424.
Fubini, 181, 182, 183, 185, 186.
Fundăţeanu C. I., 9.
F. J., 587, 658.
F. G. M., 45, 52, 96, 100, 488, 589.

Gabrielescu R., 9.
Gabrovschi F. E., 430.
Gaiu Em., 427.
Gâlcă I. T., 9, 639.
Gâlea Şt. C., 324.
Galileu, 171, 355, 357.
Galopin-Schaub Ch., 90.
Gardedieu A., 34.
Gaspar L. F., 133, 538.
Gataianţu B., 643.
Gauss 18, 28, 63, 382, 383, 538, 660.
Gavrilescu N. C., 48, 106, 157, 161, 218, 220, 243, 315, 373, 381, 430, 544, 547, 552, 657.
Gavrilescu N., 546.
Geier H. A. 312.
Georgeacopol V., 369.
Georgescu Corn., 369, 445.
Georgescu I. C., 257.
Georgescu D., 141.
Georgescu D. E., 427.
Georgescu I. N., 10.
Georgescu N. N., 10.
Georgescu R., 476.
Georgescu V., 427.
Georgescu-Roegen N., 10, 306.
Georgescu-Val N. I., 10, 255.
Gereanu C. Ana 331, 387, 442, 557, 604.
Gergonne, 246.
Germani G. D., 139, 140, 229, 419.
Germay H. R., 195, 363.
Ghelber M., 426.
Gheorghieş Al. G-l, 615.
Gheorghiu C. Ad., 5, 6, 10, 40, 77, 98, 102, 103, 335, 448, 481, 542, 560, 595, 602, 603, 616, 626, 642, 670.
Gheorghiu A. Al., 271, 273, 386.
Gheorghiu Th. Gh., 5, 10, 27, 56, 139, 143, 144, 328, 329, 332, 369, 371, 372, 419, 424, 426, 427, 432, 481, 483, 505, 587, 595, 596, 597, 598, 600, 616, 638, 642, 643, 653, 655, 671.
Gheorghiu S. I., 10, 197.
Gheorghiu A. M., 10.
Gheorghiu A. Ş., 10, 670.
Gheorghiu V., 638.
Ghermănescu M., 5, 10, 80, 139, 141, 143, 148, 190, 195, 202, 206, 223, 226, 280, 309, 321, 322, 324, 373, 375, 379, 380, 392, 460, 502, 560, 561, 562, 638.
Ghermani D., 424.
Ghika Al., 139, 424.
Ghimuş D. A. Maior, 10.
Ghiocel V. V., 313.
Ghiolu Şt., 257.
Ghişoiu C., 657.
Ghişoiu I. P., 10, 144, 257, 427, 481, 483, 595.
Ghiţescu V., 10, 278, 504, 584, 603, 604, 613.
Gibbins M. N., 538.
Gillis P., 539, 561, 563.
Giurumescu C., 427.
Glivenko, 195.
Gloden A., 135, 195, 304, 538, 586, 655.
Glogojan M., 300.
Göbl F., 34.
Godbid W., 173.
Goilav Gr., 306.
Goldberg F. 271.
Goldberg I., 161, 272, 274, 275, 324, 328, 386, 387, 443, 555, 556, 602
Goldstine H. H., 134
Golousin, 562.
Goltmann, 508.
Gonzales D. A., 195.
Gonzales O. M. 638.
Gooden, 450.
Goormaghtigh R., 33, 135, 195, 254, 302, 360, 361, 421, 476, 585.
Gorovei A. S., 141, 481.
Goth L. M., 106, 268.
Gottschalk O., 88.
Goursat E., 139, 186, 563.
Grabovschi F., 657.
Grătianu I. R., 161.
Green, 422, 476.
Griess J., 516.
Grigore M. I., 161.
Grigorescu C., 10.
Grigorescu E., 369.
Grigorescu A. V., 312, 316, 540.
Grigoriu N. A., 324, 386.
Groma, 352.
Gropper S., 427.
Grossu I. M., 481, 593.
Grubovschi E., 427.
Gruia I. L., 272, 273.
Grumăzescu M. S.-Lt., 106, 107, 111, 157, 159, 160, 161, 218, 263, 269, 272, 273, 328, 330, 373, 386, 388, 430, 433, 439, 442, 500, 657, 659, 662.
Grünbaum M., 524.
Grünberg S., 141.
Grunstein M., 427.
Gulielmo III, 587.
Gundelfinger, 59, 61, 62.
Guţu I. Al., 10.
Gutzu V., 10.
Gviazdamorschi E. R. 161, 271, 274, 300, 386, 443, 552, 609.
Gyllström, 349, 354.

Hadamard J., 418.
Hahn L., 141.
Haim N., 141.
Halmas R. P., 476.
Halperin H. Al., 310, 595.
Hamburger A., 257.
Hamilton J. N., 79.
Hamy M., 137.
Hâncu I. M., 272.
Hänert, 303.
Hanganu D. M., 10.
Haret C. Sp., 233, 282.
Hartl H. 640.
Hartular G., 427.
Hatzidakis, 123.
Hell M., 450.
Henri II, 353.
Herman V., 103, 268, 269, 322, 381, 606.
Hermite, 133, 561.
Heron, 352.
Heytmanek C., 481, 483.
Hilbert, 186.

Hildebrandt H. T., 476.
Hilt G., 639.
Hilton H., 80.
Hlavaty V., 139.
Hoberman S., 134.
Hollcroft R. T., 134.
Hortopan Gh. Gr., 271, 272, 300, 388.
Hospital L'., 306.
Hristescu I. I., 299.
Hugeni Christiani, 587.
Hugenium Constantinum, 587.
Huguet, 477.
Huianu I., 161.
Hulubei T., 427, 643.
Hurezeanu E. C., 161.
Hurlock B., 173.
Hurmuzescu Dr., 365,
Hyers H. D., 476.

Iacob Caius, 539, 563.
Iacob St. E., 220, 306, 427.
Iacob H., 140.
Ianculescu C., 140.
Ianculescu S. O., 154, 155, 157, 163, 201, 309, 372, 373, 427, 643.
Ianculescu T. R., 11.
Ianoşi N., 449, 450, 509.
Iensen, 134.
Ignat A., 369.
Iliescu Gh., 5, 11, 364.
Iliescu Gr. R., 161.
Iliescu Tr., 300.
Inculeţ I., 123.
Ingraham H. M., 134, 476.
Ioachim Gr., 427.
Ioachim L. H., 48, 100, 435.
Ioachimescu Gh. A., 11, 27, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 338, 419.
Ioachimescu A. Gh., 11.
Ioan A. I., 52, 300, 506
Ioanovici A., 11.
Ionescu D. Al., 271.
Ionescu Angelo, 427.
Ionescu V. D., 5, 11, 168, 336, 342, 447, 539, 563, 643, 645.
Ionescu B. N. Gh., 161, 220, 271, 272, 274, 275, 386, 437, 442, 551, 636, 663.
Ionescu P. H., 5, 6, 11, 45, 46, 310, 391, 427, 481, 505, 595, 649.
Ionescu Ion, 5, 11, 23, 27, 28, 34, 36, 38, 54, 90, 91, 97, 110, 138, 139, 140, 161, 162, 166, 176, 196, 222, 229, 255, 256, 278, 289, 304, 305, 329, 330, 331, 334, 342, 365, 386, 390, 398, 418, 419, 424, 425, 440, 446, 477, 490, 497, 500, 502, 506, 507, 532, 539, 540, 558, 586, 587, 614, 640, 665, 670.
Ionescu D. I., 141, 369.
Ionescu I. L., 306.
Ionescu N. N., 444.
Ionescu I. P., 306.
Ionescu Şt., 552.
Ionescu D. Şt., 161, 220, 273, 300, 386, 506.
Ionescu V., 197, 594.
Ionescu-Brezuica C. I., 427.
Ionescu-Bujor C., 5, 6, 11, 41, 42, 43, 45, 49, 50, 55, 96, 97, 129, 135, 137, 152, 153, 167, 207, 211, 212, 217, 219, 220, 224, 228, 331, 390, 410, 411, 420, 427, 446, 503, 505, 560, 598, 601, 616, 658, 659,
Ionescu Fulger M. C. 161, 442.
Ionescu-Ţiu D. C. Lt., 5, 6, 11, 107, 148, 159, 160, 222, 274, 324, 392, 424, 439, 441. 504, 587, 612, 649.
Ionescu-Zane D. Gh., 11.
Ionică E., 35.
Iorceanu Sp., 304, 477.
Iorga N., 395.
Istinie-Brezuica C. I., 257, 306, 643.
Istrati C. Lt.-C-dor, 11.
Istrati Gh., 257.
Ivănescu C., 312, 313, 483, 485, 501, 525, 540, 651, 653.
Ivtcher D., 35.

Jacobi, 79, 647.
Jacobi R., 140.
Janet P., 506.
Jareghie V. I., 161, 268, 269, 274, 300, 331, 381, 382, 387, 442.
Jijie A., 11.
Jiletcovici Al., 161.
Jipa C. A., 48, 100, 300, 507.
Joachimsthal, 420.
Joe S., 387.
Juga G., 342.
Julia G., 506.

Kaschanin, 124.
Katz P., 143.
Katz S., 306.
Kaufmann N., 11.
Kaufmann S., 148, 479.
Kelvin Lord, 227.
Kersey J., 173, 174.
Kirilov Gh., 230.
Kiwowicz I., 141.
Klein F., 176, 177, 178, 179, 180, 182, 188.
Klein M. I., 450.
Knall Al., 373.
Knopp, 89.
Kraitchik, 304, 349, 586, 639.
Krasner M., 421.
Krichenhofen L., 306.
Kubota, 419.
Kummer, 139.
Kurepa G., 421.
Kurokawa, 349.

La Menza F., 133, 253.
Ladislau D., 481.
Lagrange, 79, 266, 273, 561.
Laguerre, 419, 420.
Lainé E., 506.
Laissant A. C., 587.
Lalescu Tr., 283, 330, 602, 605, 606.
Lamé G., 201, 412.
Lamoth P., 11.
Laplace, 54, 89, 475, 640.
Lazăr A. 271.
Lăzărescu D., 141.
Lăzărescu M. I., 141, 369.
Lazu C., 11.
Leahu I. D., 373.
Lebădă D., 373, 541.
Lebădă I., 41.

Leber Margareta, 312.
Leemans J., 363.
Legendre, 392, 412, 563.
Lehmer H. D., 476.
Leibnitz, 228.
Lemaire J., 419, 420.
Lemeunier Cl., 354.
Lemoine E., 44, 101, 102, 245, 246, 555.
Lencement R., 356.
Leonida D., 11.
Lepetit Th., 425.
Leray, 562.
Lernovici S., 657.
Leuco I., 48, 157.
Levine J., 476.
Leyssenne P., 305.
Lhuilier, 656.
Libois P., 135, 137.
Lie S., 177.
Linteş I. Cpt. C-dor, 5, 6, 11, 89, 190, 196, 200, 202, 211, 213, 214, 244, 254, 257, 264, 265, 278, 303, 304, 335, 365, 418, 446, 469, 476, 477, 497, 558, 636, 661, 663, 670.
Liouville J., 127, 128, 412.
Lipschitz, 246, 247, 248.
Liteanu D., 257.
Liteanu I. Gh. G-l, 5, 12, 29, 54, 78, 167, 255, 270, 275, 417, 442, 485, 541, 643, 650, 653.
Litinski V. I., 433, 598.
Livada F. Gr., 12.
Lobatschewsky, 176, 182, 184.
Longchamps G. de, 135, 215, 526, 555.
Loria G., 18, 135, 585.
Lowan N. A., 476.
Luca L. N., 369.
Luigi G. S.-Lt., 255.
Lungu V., 369,
Lupan A., 35.
Lupescu Gh. C., 310, 595.
Lupu C. Gr., 300.
Lupulescu I. A, 331.
Lurquin H. R., 195.
Lyod S., 349.
Lyot, 356.

Macedonescu M., 369.
Macovei G., 35.
Mădan I., 272.
Maghiar S., 423.
Măinescu Z. I., 272, 386.
Makarie N. Gr., 385.
Malaxa Elena, 12.
Malaxa N., 12, 562.
Malcoci C., 12.
Malla N., 158.
Mamut T. P., 48, 100, 435, 541.
Mănac M., 315, 657.
Manafu V., 12, 427.
Mănescu Gh. I., 299.
Mănescu M., 148, 151, 280, 312, 392, 484.
Manicatide Al, 36.
Manoil Şt., 369.
Manoilescu M., 12.
Manolescu I. N., 426.
Manoliu Al., 141, 369.
Manu I. G., 424.
Many D., 283, 394.
Mărăcine B., 12.
Marcelin A., 355.
Marconi G., 134.
Marcovici E., 48, 50, 97, 157, 161, 243, 268, 273, 386, 430, 598, 601, 636, 657.
Mărculescu O., 275, 363, 663.
Mărculescu I. Th., 481.
Mareş Gr., 427.
Mareş T., 12.
Margulius M., 40, 145, 312, 313, 483, 484, 593, 595, 649, 650, 653.
Maria Regina, 617.
Marian V., 243, 293, 423, 452, 510, 539.
Marinescu P., 446.
Mariotte, 200.
Marquez O., 313.
Martac V. R., 48, 50.
Marteş V. Gr., 218, 261, 325, 373, 430, 486, 541, 549, 598, 657, 658, 666.
Martin H. M., 134.
Massau J., 136.
Matac R., 106.
Mateescu Cr., 5, 12, 139, 229, 234, 419.
Mateescu I. Şt., 35.
Matei D. D., 48, 157, 160, 161, 165, 220, 268, 271, 333, 391, 430, 437, 483, 657, 658.
Matei D. V., 161, 388.
Mateici D., 551.
Mătieş V. I., 202, 222, 481, 496, 586.
Mathieu M., 28.
Mavrodin D. D., 54, 93, 105, 107, 109, 157, 159, 160, 206, 217, 218, 312, 313, 316, 323, 331, 372, 373, 374, 375, 379, 386, 430, 484, 486, 494, 540, 551, 596, 597, 653, 654, 660, 661.
Maxwel A E., 422.
Mayer O., 257.
Mazilu C. P., 312, 372, 430, 486, 596.
Mazuel D-na, 349, 354.
Mazurkiewicz St., 421.
Mc Kinsey C. J., 134.
Mc Lachlan W. N., 363.
Mc Shane I. E., 134.
Melas P., 141, 479.
Menelaus, 72, 125, 313, 382, 487, 590, 593.
Merbl A. I., 430.
Mereuţă E., 484, 649.
Mereuţă V., 12.
Merriman M. G., 476.
Mersenne, 170.
Metea S. V., 300.
Meurice L., 254.
Meytelon, 210.
Michel Ch., 419, 461, 462, 463, 465.
Mihai Viteazul, 170.
Mihăileanu N. N., 5, 6, 12, 40. 47, 51, 56, 131, 135, 166, 224, 246, 254, 262, 279, 301, 310, 313, 314, 334, 362, 365, 387, 388, 421, 427, 476, 483, 495, 505, 528, 538, 555, 557, 584, 585, 586, 591, 593, 594, 637, 638, 639, 642, 649, 651.
Mihăilescu D. C., 272, 325.
Mihăilescu D. D., 273, 300.
Mihăilescu Gh., 151.
Mihăilescu St. N., 427, 643.
Mihăilescu P. T., 12.
Mihăilescu-Popa I., 161.
Mihalcea St. D., 316, 373.
Mihalcea I. Em., 481, 483.
Mihalcea N. N., 107, 268, 382, 657.
Mihalcea I. Oct., 161, 220, 271, 272, 325.
Mihalopol C., 12.

Mihoc Gh., 419, 577, 633.
Mikloşi C., 91, 140.
Milea G. E., 481, 595.
Milick Fl., 354.
Milu I., 427, 657.
Milu I. N., 48, 386, 387, 442, 541, 551, 552, 601, 659.
Minding, 412.
Mincu M., 271.
Minea V. A., 299.
Mineur Ad., 135, 136, 137, 363, 421, 476, 585.
Mingea N. M., 386.
Miquel, 40, 125, 128, 129, 527, 638.
Mircea M. E., 12.
Mirea N. St., 17.
Mirescu P., 12.
Mironescu M. C., 357.
Mironescu I. D., 300.
Mironescu Tr. D., 161, 274, 442.
Mises R. von, 476.
Mitault H., 196.
Mitescu C., 12, 141, 369.
Mititelu C. Cl., 12.
Mititelu C. I., 12, 479.
Miu M. I., 642.
Mocănescu C. I., 481.
Močnik Fr., 289, 290.
Modâlcă Em., 220, 271, 273, 275, 328, 386, 387, 437, 442, 551, 555, 598, 657, 659.
Moessner A., 134, 278, 363, 364, 466, 580, 586.
Moetjens Adrianum, 587.
Moisovici M. St., 157, 430, 657.
Monge, 63, 64.
Montel P., 349, 421, 539, 561, 563, 564, 586, 587.
Montessus de Ballore R. de, 507.
Morant J., 135.
Morley, 363, 424.
Morţun E., 642,
Morţun V., 231.
Mosnat E., 419, 506.
Motaş Camil, 442, 497, 555.
Moţet-Grigoraş A., 35.
Moţoc D. M., 310, 595.
Moţoc R., 275, 388.
Mrazec L., 232.
Müller-Hillerbrand D., 91, 140.
Murăroiu I., 146.
Mureşeanu Gh., 268.
Myller A., 19, 344, 406.

Nadolu T. A., 220, 272, 274, 325.
Naforniţă I. C., 40.
Nagel, 246.
Nakayama T., 538.
Năstase Gr. M., 99, 152, 260, 384, 657.
Navier L., 395.
Neagu V. V., 373.
Neamţu N., 141, 369.
Neamţu P., 13.
Nedelcu V. N., 161, 273, 274, 331, 369, 386, 443, 609.
Nedelea Fl. I., 299.
Negoescu St., 141.
Negoiţă V. P., 77, 107, 161, 275, 386, 442, 552, 609.
Negrea A. L. M., 48, 51, 93, 94, 97, 106, 152, 159, 160, 268, 269, 313, 321, 322, 323, 369, 373, 430, 433, 439, 442, 481, 484, 486, 540, 594, 598, 601, 649, 653, 657, 659.
Negulescu A. Vl., 369.
Negură St., 13.
Neicu V., 369.
Nestor G. D., 13, 427.
Neuberg J., 322, 385.
Neugebauer O., 404, 405.
Newton, 63, 128, 129, 355, 357.
Nichifor A. G., 13.
Nicolau A., 13.
Nicolau C., 141, 369.
Nicolau H. C., 13.
Nicolau V. D., 300.
Nicolau Gh., 427.
Nicolau T. M., 13, 302, 647.
Nicolau P., 638.
Nicolau-Dobridor C. I., 112, 427, 555, 643.
Niculae C., 481.
Niculescu V. Al., 5, 13, 47, 49, 103. 106, 223, 309, 382, 383, 390, 468, 502, 505, 550, 552, 672.
Niculescu Cr., 13, 254, 418, 419.
Niculescu V. Gh. Lt.-C-dor, 5, 13, 153, 316, 365.
Niculescu St. I., 430.
Niculescu Gh. Mircea, 100, 435.
Niculescu Miron, 5, 13, 139, 188, 424.
Niculescu I. R., 13.
Niculescu St., 141, 257, 369.
Niewenglowski B., 516.
Noguerra R., 134, 253, 476.
Novac A., 427.
Novacu V., 145, 427, 643.
Novoa G. L., 134.

Oanţă Fl., 272, 274, 325.
Obrechkopff N., 80.
Obreja D., 387, 442, 557.
Ocagne M. d', 134, 302.
Ohm, 422.
Okada I., 134.
Oldenburger R., 134.
Olteanu E. St., 594, 649, 650, 653.
Onicescu O., 13, 139, 419, 421, 424, 539, 561, 562.
Oprescu Gh., 310.
Orănescu O., 5, 13, 141, 369, 435.
Orăşanu D. C., 5, 13.
Orăşanu Gr., 14.
Osgood F. W., 89, 90.
Otetelişianu M., 229.

Pacioli L., 408.
Padurel V., 275.
Pădureţ A. V., 161, 220, 272, 274, 300, 324, 325, 439, 657.
Painlevé P., 378.
Pamfil M., 481.
Pană Al., 103, 269, 381.
Panaite Gh., 481.
Panaite N. Th., 312, 481, 595, 651.
Panaitescu Sc., 14, 286.
Pangrati A. E., 231, 232.
Pănoiu Em., 484.
Panta A., 313.
Pantazi Al., 5, 14, 139, 142, 257, 561, 562.
Pantelimon C., 272, 274, 381.
Pantelimon P. C., 161, 331.
Pantelimon V. C., 268, 382, 437, 442, 496, 598, 659.
Pantoleon I., 141, 369.
Paparizu I. G., 161, 272.
Paparizu I., 300.

Papelier G., 96, 101, 145, 419, 507.
Pappus, 63.
Paraipan N. C., 161, 271, 386.
Paraschiv N., 481.
Parepeanu C. I., 46, 48, 101, 105, 160, 268, 312, 381, 382, 487, 595, 653, 657, 659.
Partenie C., 369.
Pârvan V., 225.
Pârvu A., 5, 14.
Pârvulescu P., 273.
Pârvulescu Al. V., 274, 442.
Pascal, 81, 95, 126, 131, 384.
Pascaru C. C., 274, 437.
Pascaru I. C., 274.
Pascaru I. I., 48, 386, 551.
Pasere E. A., 300.
Paşoi V. M., 161.
Passinger Th., 173.
Pasteur, 348.
Pastor Rey J., 195.
Patraulea N., 312.
Patriciu G. T., 17.
Patriciu V., 197.
Păun Gh., 481.
Pavel D., 91, 140, 141, 197.
Peano, 127, 539, 562.
Pedley S., 477.
Peptu P. C., 442.
Perera G. J., 135.
Pérès Yvonne, 195.
Petcu T. V., 300.
Petrache I., 77.
Petrescu V. Achile, 161, 268, 269, 272, 300, 381, 382, 386, 437, 495, 551, 636, 663.
Petrescu P. Benone, 48, 107, 268, 552.
Petrescu A. D., 427.
Petrescu I. I., 312, 483, 649, 657.
Petrescu V. M., 220, 271, 273, 274, 300, 552, 609.
Petrică I., 483.
Petrovitch M., 476.
Petter R., 369.
Pfaff, 79.
Philipide M., 14.
Piccard Sophie, 421.
Picone M., 139, 246.
Picquet H. M., 464, 478.
Pintilescu V., 141, 369.
Pirtea T., 369.
Piscador S., 134.
Pitagora, 123, 125, 175, 578.
Pitcher E., 476.
Platon, 364.
Plücker, 556.
Pociovălişteanu A., 357.
Poenaru P., 587.
Poincaré H., 137, 138, 184, 256, 351.
Poisson, 538.
Pompeiu D., 79, 80, 123, 124, 139, 227, 229, 232, 419, 421, 424, 476, 539, 561, 562, 563, 573, 639.
Poncelet, 116, 117, 555, 556.
Pop A. Al., 275.
Pop Gr. I., 300, 481, 595.
Popa C. B., 331, 443.
Popa Gh. I., 34.
Popa D. M., 50, 161, 220, 268, 269, 271, 272, 274, 300, 326, 329, 331, 382, 386, 387, 437, 442, 496, 544, 551, 556, 598, 604, 636, 659.
Popescu Adr., 272.
Popescu I. Al., 369.
Popescu N. Corn., 14, 595, 643.
Popescu S. C., 36.
Popescu Dorin, 306.
Popescu D. Gh., 143.
Popescu I. Gh. Gl., 572.
Popescu I., 17.
Popescu Victor, 14.
Popescu C. Virgil, 277, 481.
Popescu-Bisca Al., 161.
Popescu-Botoşani G., 14, 254.
Popescu-Stăneşti I. M., 483, 653.
Popescu-Zorica N. Al., 46, 48, 137, 160, 161, 220, 263, 268, 325, 328, 373, 382, 387, 430, 439, 442, 551, 557, 615, 636, 657, 659, 660, 663.
Popişca V. M., 300, 604.
Popovici A., 427.
Popovici Călin, 476.
Popovici C. Prof., 421.
Popovici C. C., 427.
Popovici Dan, 427.
Popovici Gabriel, 636.
Popovici M., 427.
Popovici L. R., 161.
Popoviciu S. D., 306.
Popoviciu I. Gavril, 157, 214, 243, 430, 601, 657.
Popoviciu Gr., 157.
Popoviciu Tib., 14, 143, 248, 309, 421, 586.
Popp N., 14, 141, 369.
Popp T., 14.
Portocală M., 14, 173.
Porumbaru M., 357.
Postelnicescu C. M., 41, 47, 49, 55, 97, 101, 104, 105, 108, 299, 300, 312, 324, 372, 373, 382, 383, 384, 493, 507, 602, 657.
Postolache V., 135.
Potopeanu Gh. Col., 14.
Poussin de la Vallée C., 363.
Poyenar P., 639.
Praporgescu N., 14.
Preciado I. T., 271, 272.
Predescu-Ţânţăreni, 636.
Predoiescu I. M., 315, 657.
Predoiescu - Ţânţăreni I., 328.
Predoiescu-Ţânţăreni Tr., 107, 160, 161, 165, 218, 220, 269, 271, 272, 273, 275, 328. 373, 387, 439, 442, 541, 544, 557, 658, 660.
Predoiescu M. T., 107, 160, 161, 313, 322, 331, 382, 430, 433, 598.
Predoleanu E. Lya, 300.
Predoleanu E. N., 299.
Prekenföld Fr., 509.
Prodan Gh. C., 272.
Profiri N., 89.
Protopopescu Gr., 14.
Ptolomeu, 80, 108, 125, 160, 267, 585, 586, 621, 622.
Pungă I. N., 100, 437, 541.
Puşcă I. T., 427.
Puşcaru I., 161.

Raabe L. J., 412, 457, 458, 459, 460, 660.
Racliş R., 14.
Rada D., 657.
Radef A., 427.
Răducănescu S. D., 48, 100.
Rădulescu Gh. Oct., 50, 101, 103, 161, 268, 269, 273, 300, 382, 437, 507, 552, 604.
Raicu Al., 481.
Ramanujan, 476.

Râmniceanu I. Cr., 481, 595.
Rauch B. I., 106.
Reidt F., 540.
Reinhorn A. B., 427.
Reischer L. H., 162, 271, 272, 274, 275, 325, 328, 331, 386, 387, 435, 442, 497, 500, 555, 659, 665.
Revici T., 14.
Ricatti, 194, 195.
Ricci, 476.
Richter A., 477.
Riemann 90, 280.
Rignaux, 357.
Rios S., 195.
Ripianu D., 105, 106, 268, 322, 544, 546, 557.
Rizescu G., 369.
Rizescu I., 305.
Roberts, 33.
Robertson S. M., 538.
Robinson M. R., 476.
Roco M., 17.
Rohr I. A., 161, 272, 331.
Rolle, 662.
Romaşcan G. Georgeta, 300, 325, 507, 551, 557, 659.
Roşca St. G., 40, 649, 651.
Rosciescu F. M., 435.
Roşculeţ Al., 427, 430.
Roşculeţ N. M., 106, 107, 161, 265, 268, 271, 272, 273, 381, 386, 437, 439, 442, 496, 657, 659.
Roşculeţ N. N., 265.
Rosenberg G., 141.
Rosenblatt B. E., 481.
Rosenblatt S. M., 220, 272, 555.
Rosenblatt S. R., 331.
Rosenblatt-Roth M., 271, 663.
Roşu A. Al. 5, 6, 15, 309, 412, 427.
Roşu V., 15.
Rouché E., 41, 158, 571.
Rumici A. Gh., 268, 269, 659.
Russe C., 481.
Russel, 356.
Russu D. C., 427.
Russu I. E., 331, 443.

Şabac Gh. I., 312, 313.
Şabac Gh. T., 315.
Şachter O. D., 430.
Sacter O. A., 542.
Sacter O. D., 321, 657.
Sacter O., 99, 102 210, 381, 554, 635, 656.
Sager N. I., 93, 312.
Şaichin O. A., 161, 162, 271, 272, 274, 275, 324, 325, 328, 331, 386, 387, 442, 494, 547, 550, 552, 556, 602, 660, 665.
Saichin D. A., 329.
Sainte-Laguë A., 349, 354, 639.
Sălăgeanu A., 15.
Saligny M., 15.
Salmon, 529.
Sâmbotin Gh., 594.
Sândulache C., 97, 110, 157, 375, 657.
Sannia, 89.
Săpunaru S. Gh., 15.
Sarian M., 5, 15.
Săruleşteanu I., 161.
Săvescu M., 306.
Savin C. I., 222, 481, 483, 613, 668.
Savin I. I., 437, 442.
Sburlan D. 369.
Schächter O., 427.
Schaeffer C. A., 134.
Schileru D., 306.
Schileru Gr., 35.
Schileru-Dili C. I., 15, 390, 503.
Schiopulescu I., 481.
Schläfli, 476.
Schouder, 562.
Schwartz, 538, 575.
Secu V. Ad., 161, 272, 386, 442.
Segal I., 331.
Segal J., 107, 275, 442, 552, 557, 604, 657, 659.
Segârceenu N., 226.
Segre, 186.
Şeptilici M. R., 357.
Şerban D., 481.
Şerban-Ulmeni D., 427.
Şerbănescu N. St., 275, 388, 443.
Şerbănescu Gh. V., 15.
Şeremet M. Gh., 312.
Sergescu B., 15.
Sergescu P., 5, 15, 34, 55, 127, 139, 166, 243, 254, 255, 269, 274, 325, 334, 342, 358, 540, 563, 564, 586, 587, 605, 606, 614, 639.
Servus H., 365.
Sevastre D., 427.
Severin R., 355.
Sewel E. W., 476.
Sewell F. W., 134.
Shankland, 195.
Sfinţescu I. C., 15.
Sghultz G., 88.
Sierpinsky W., 139, 421, 586.
Silaş G., 220, 312, 325, 327.
Silberman S. T., 271, 272.
Simionescu T. C., 481.
Simionescu D. Gh., 5, 6, 15, 43, 83, 157, 167, 190, 215, 279, 316, 318, 335, 412, 427, 447, 487, 531, 544, 547, 560, 570.
Simionov A., 301.
Simonoff M., 304.
Simson T., 40, 128, 362, 384, 670.
Singh A., 135.
Skin, 422.
Smântânescu A., 15.
Sobczyk A., 476.
Sokolnikoff S. E., 639.
Sokolnikoff S. I., 639.
Solacolu C. S., 197.
Solomon I. I., 271, 272, 275, 386, 387, 441, 442, 551, 555, 659, 663.
Sommer J., 506.
Sommervogel C., 449.
Souto B. J., 538.
Spacu P., 427.
Spathy R., 427.
Staehlin P., 35.
Staicu I. N., 272, 275, 302, 388.
Stamate I. I., 220, 386, 387.
Stamatescu I. G., 15.
Stamatescu I., 15.
Stan I. A. 310, 312, 363, 364, 427.
Stan I. C. 489.
Stan A. D., 5, 15, 27, 89, 127, 169, 412, 418, 419.
Stănculescu I., 162, 271, 437, 552.
Stănculescu M., 48, 387, 435, 442.
Stănculescu V., 48, 100, 435.
Stănescu M. Em., 315.
Stănescu St. V., 272.

Stark V., 35.
Ştefan C. T., 107, 274, 381, 497, 542, 557, 663.
Ştefănescu A., 34, 78.
Ştefănescu D. N., 27, 46, 48, 50, 96, 97, 105, 106, 107, 157, 162, 196, 218, 219, 220, 268, 269, 271, 272, 273, 300, 316, 322, 324, 328, 333, 383, 386, 430, 495, 506, 541, 552, 557, 596, 598, 602, 604, 657, 659.
Ştefănescu V. P., 48.
Ştefănescu Saba S., 141, 419.
Ştefănescu-Radu I., 255.
Ştefanov P. Şt., 388, 443.
Steiner, 96, 177, 180, 245, 317, 318, 362, 412, 524, 525, 527, 584.
Stern E., 34.
Stevin, 175.
Stewart, 125.
Stieltjes J. Ph., 89, 134, 639.
Stirbu Gh., 312, 313.
Stiubei P., 140.
Stoenescu D. M., 106, 272, 273, 275, 300, 388, 442, 659.
Stöger, 449.
Stoian S. I., 49.
Stoica A., 427, 643.
Stoica D. Al., 42, 312, 324, 343, 487, 596, 597.
Stoica V. D., 16, 27, 78, 614.
Stoicescu C., 587.
Stoicescu P., 427.
Stoicescu T. T., 16, 101, 164, 221, 276, 316, 332, 372, 541, 587, 596, 643, 658.
Stoilov S., 539, 561, 562.
Stokes, 422.
Störmer C., 349.
Stratilescu Gr., 229, 230 234.
Stratilescu Gr. I., 419.
Streder G. I., 48, 50, 162, 268, 272, 274, 300, 325, 328, 331, 373, 387, 437, 442, 551, 602, 604, 657, 659.
Sturm Ch., 364, 412, 554.
Sudan G., 139.
Suffrin, 477.

Tănăsescu Ar. G-l., 16.
Tănăsescu A. T., 16.
Tănăsescu V. Venera, 162, 220, 271, 272, 275, 325, 328, 329, 386, 387, 439, 441, 555.
Tanasiciuc C., 105.
Tânjală Gh. Em., 48.
Tăraş V., 427.
Tarasiuc E., 93, 94.
Tarasiuc I. S., 94, 211.
Tarry, 364.
Tartaglia, 403, 408, 409.
Tătaru N. N., 162, 273, 300, 443.
Tauber A., 306.
Taylor, 466, 468.
Taylor E. A., 476.
Tchacaloff L. 421, 573, 576.
Teodor D. I., 338.
Teodoreanu V., 16.
Teodorescu C. C., 16, 89, 140, 229, 254, 395, 586.
Teodorescu N., 139, 426, 539, 561, 562.
Teodorescu V. N., 16.
Teodoriu L., 141, 257, 573.
Teodoru H., 16, 419.
Terradas, 134.
Thébault V., 33, 50, 55, 110, 129, 135, 151, 189, 222, 254, 293, 295, 296, 334, 358, 372, 373, 386, 421, 447, 555, 558, 578, 585. 615, 638, 671.
Theodorescu N. Dorin*), 50, 51, 103, 105, 106, 268, 271, 273, 275, 300, 369, 382, 426, 437, 439, 507, 555, 556, 602. 657, 659.
Theodorescu N., 419.
Theodoriu L.**), 425.
Thierin H. G., 16, 256, 301, 477, 505.
Third A., 129.
Ţighiliu R., 657.
Ţilenschi M. S., 86, 481.
Tilică C. St., 48, 157, 159, 218, 220, 271, 272, 275, 300, 324, 325, 328, 329, 331, 430, 435, 439, 442, 551, 555, 636, 656, 659.
Timotin A., 257.
Ţino N. O., 5, 6, 16, 148, 151, 152, 161, 310, 312, 313, 314, 391, 421, 503, 588, 591, 593.
Ţiţeica Gabriela, 16.
Ţiţeica Gh., 5, 16, 27, 90, 96, 123, 139, 173, 188, 196, 226, 297, 338, 419, 424, 507.
Ţiţeica I. I., 26, 41, 50, 102, 103, 104, 111, 268, 273, 297, 312, 313, 317, 321, 372, 381, 382, 556, 557, 596, 597, 598, 610, 657, 660.
Tocilescu Al., 369.
Toma N. N., 300, 441, 557.
Tomescu T. H., 105.
Tomescu St. I., 16.
Toni C. M., 162, 220.
Toricelli, 491.
Tourriol B. J., 422.
Trejo A. C., 89.
Triandaf Al., 141.
Triandafil A., 369.
Trifescu Gr., 369.
Trjitzinsky J. W., 538.
Trufaş I. 369, 479.
Trufinescu N. C., 312.
Tucker, 44.
Tudoran M. Lydja, 386.
Tudoran R., 141.
Tudoran M. Sonia, 269, 381.
Ţuhai N., 369.
Tulea C. G., 257.
Tunaru R. T., 427, 643.
Turcu D. G., 329.
Turcu R. S., 162, 220, 272, 273, 300, 328, 331, 382, 387, 442, 497, 552, 602, 659.
Turtoiu F., 220, 272, 442.

Ulescu A., 16.
Ungheanu M., 481.
Urziceanu St., 141, 369.

Văduva Fl. M., 300.
Vahlen Th., 89, 134, 304, 419.
Vâlceanu I., 481.
Vâlceanu I. J., 309, 593, 594.

*) Tot una cu Teodorescu N. Dorin.
**) Tot una cu Teodoriu L.

Vâlcovici V., 16, 139, 538.
Valeiras A., 418.
Valiron G., 639.
Vallauri G, 34.
Van Aubel, 591.
Van der Lyn G., 585.
Van Kampen R. F., 134.
Van Vleck, 539, 563.
Vardala I., 16.
Varignon, 136.
Varlam M. P., 313, 653.
Vârlan V. V., 427.
Vartic C., 369.
Vartic G. N., 100, 436.
Vasilache I., 16.
Vasilescu A. Alexandra, 44, 45, 97, 433, 542, 597, 601, 656, 658.
Vasilescu C. Gr., 16, 140, 229.
Vasilescu C. I., 16.
Vasilescu A. M., 106, 300.
Vasilescu-Karpen N., 419, 424.
Vasilescu-Ştabu A. M., 44, 45, 48, 97, 98, 100, 106, 161, 162, 218, 220, 268, 271, 272, 273, 275, 324, 326, 331, 381, 382, 384, 386, 387, 430, 433, 437, 497, 542, 544, 551, 555, 556, 596, 601, 602, 604, 657, 659.
Vasiliu C. D., 300.
Vasiliu G. D., 17.
Vasiliu Gh., 5, 17, 92, 93, 106, 107, 165, 223, 259, 260, 279, 436, 437, 442, 443, 621, 636.
Vasiliu C. I., 40, 143, 306, 427, 642.
Vasiliu M., 17.
Vasiloschi F., 657.
Vasu V., 649.
Vătămanu M. G, 91.
Vaugham E. H., 134.
Vedia Y. Duranona A., 89.
Velan A., 369.
Velea M., 427, 595.
Velicescu N. N., 276, 313, 481, 595.
Velicescu Gh. T., 310, 481, 595.
Vellan A., 141.
Vergulescu M., 369.
Verhelst E., 425.
Verronet Al., 137, 138.
Vescan T., 127, 135, 255, 305, 364, 421, 638.
Viciu A. A., 17.
Vieta, 175.
Viète, 409.
Vignaux C. J., 89, 418, 538.
Vijelie Gh. E., 273, 386.
Villars G., 422.
Villat H., 353.
Vinci Leonardo de, 355.
Vişa E., 33, 157, 254, 639.
Vissarion C. I. V., 153, 157, 483.
Vitruvius, 450.
Viviani, 418.
Vlad I. C. M., 110, 162, 268, 272, 274, 275, 325, 385, 544, 551, 556, 659, 662, 666.
Vlădescu A., 369.
Vlădescu I., 427.
Vladimirescu G., 197.
Vogel D., 369.
Vols E., 449, 450, 451, 452, 508, 509.
Volterra V., 349, 353, 421.
Vonica I., 481.
Vrânceanu G., 421.
Vuibert H., 134, 195, 254, 304, 363, 419, 421, 476, 508, 639.
Vulich B., 421.
Vuzitas G. A., 197.

Wall S. H., 476.
Walis, 661.
Walsh L. J., 134.
Warenberg W., 141.
Weber, 423.
Weber H., 516.
Weierstrass J., 90, 177, 180, 187.
Weisberg I. G., 331.
Weiss L., 306.
Weitzenböck R., 89.
Whiteman A., 134.
Williams R. A., 538.
Wilson, 257.
Wintner A., 134.
Woinaroski R., 5, 17.

Yvon M. 507.

Zahareanu N., 141.
Zaharia O. I., 427, 481.
Zaharia O. N., 481, 594.
Zamfirescu C. Gr., 17.
Zamfirescu Gh., 481.
Zamfirescu G. I., 111, 310, 391, 653.
Zancu C. A., 442.
Zane D. N., 312, 430.
Zapan Gh., 17, 127, 257, 440.
Zapan Gr. Cpt. C-dor, 5, 6, 17, 257, 301, 334, 364, 446, 502, 559, 614, 655, 670.
Ziff M., 312.
Zlatcu St. C., 17.
Zolotovici I. Ch., 300.

K. UVRAJE CITATE *)

1. Cărţi şi Lucrări

Pag.

N. Abramescu . . . . . Lecţiuni de Algebră superioară 27
A. M. Ampère . . . . . Précis élémentaire d'arithmétique 28
S. Andrievici . . . . . Aritmetica 239, 289
A. Angelescu . . . . . Lecţiuni de calcul diferenţial 506, 507

*) In acest capitol nu sunt trecute uvrajele citate în *Bibliografii* şi la *Diverse*: Sporirea bibliotecii *Gazeta Matematică*.

		Pag.
Th. Angheluță	Exerciții și probleme	328, 507
X. Antomari	Cours de géométrie descriptive	506
P. Appel	Traité de mécanique rationelle	506
P. Appel-Goursat	Théorie des fonctions algebriques	186
Gh. Asachi	Algebra	64
Gh. Asachi	Aritmetica	64, 120, 235, 344, 398, 453, 510, 564, 618, 621
Gh. Asachi	Geometria	64
Aubert-Papelier	Exercices d'Algèbre	145
C-pt. Bănulescu și *Dragomirescu-Buzne*	Construcții de guri de foc	78
E. Borel	Les principes de la théorie des probabilités	627
M. A. Buhl	Nouveaux éléments d'analyse	506
M. Cantor	Geschichte der Matematik	364
Cardan	Ars magna de rebus algebraicis	409
G. Castelnuovo	Calcolo delle probabilite	627
I. Chițulescu	Chaosul	506, 507
V. Coman și *N. Malla*	Formular de matematici	158
V. Cristescu	Culegere de probleme de Trigonometrie	27, 87, 88, 329, 332, 333, 371, 388, 389, 390, 587, 594, 654, 658, 667
Descartes	Discours de la methode	170
E. Duporcq	Premiers principes de géométrie moderne	556
J. Dupuis	Table de logaritmi	368
Euclid	Elemente	407, 539
Fibonacci L.	Practica geometriae	407
Fitz-Patrik	Exercices d'Arithmetique	386
A. Föppl	Résistance des matériaux et éléments de la théorie mathématique de l'élasticité	506
F. G. M.	Exercices de géométrie	45, 52, 96, 100, 488
F. I.	Compléments de Trigonométrie	658
Gauss	Disquisitiones aritmethicae	28
M. Ghermănescu	Curs de Analiză matematică	194, 458
M. Grünbaum	Contribuții la geometria triunghiului	524
Hänert	Geschutz und Schuss	303
A. G. Ioachimescu	Culegere de probleme de algebră	27, 53
I. Ionescu	Beton Armat	506, 507
I. Ionescu	Culegere de probleme de Aritmetică.	27, 330, 386, 440, 506, 507, 665
Sp. Iorceanu	Manualul construcțiunei și întreținerei drumurilor.	304
P. Janet	Leçons d'Electrotechnique générales	506
G. Iulia	Exercices d'analyse	506
J. Kersey	The Elements of that Mathematical Art. commonly called Algebra	173
F. Klein	Gesammelte Mathematische Abhandlungen	177

Pag.

E. Lainé . . . . . Précis d'analyse mathématique 506
T. Lalescu . . . . . La géométrie du triangle 330, 602
Maior I. Linteş . . . . Teoria şi calculul frânelor de gură 303
G. Loria . . . . . Spezielle ebene Kurven 18
P. Marinescu, Gh. I. Dâmboianu, I. M. Dutchevici . . . . . Aritmetica şi comptabilitatea 446
Ch. H. Michel . . . . Compléments de géométrie . . . 461, 462, 463, 465
R. de Montessus de Ballore . . . . . Probabilités et statistiques 507
E. Mosnat . . . . . Problèmes de géométrie analytique 506
A. Myller . . . . . Geometria Analitică pentru clasa VIII-a . . . 406
B. Niewenglowscki . . Cours de géomérie analytique 516
G. Papelier . . . . . Exercices de géométrie moderne . . . 96, 101, 507
V. Pârvan . . . . . Parentalia 225
M. Picone . . . . . Lezioni di analizi infinitezimale 246
M. H. Picquet . . . . Géométrie Analytique 464, 478
P. Poyenar . . . . . Vocabulaire français-valaque 639
E. Rouché & Comberousse Traité de géométrie 41, 158, 571
Salmon . . . . . Sections coniques 529
J. Sommer . . . . . Introduction à la théorie des nombres algébriques. 506
C. Sommervogel . . . Bibliothèque de la compagnie de Jesus 449
L. Teodoriu . . . . . Teză de doctorat 573
G. Ţiţeica . . . . . Culegere de probleme de geometrie . . 27, 96, 226, 297, 384
G. Ţiţeica . . . . . Culegere de probleme de gemetrie analitică . . 226
T. Vescan . . . . . Monografie despre axiomatica numerelor întregi. 127
Vitruvius . . . . . Architectura 450
E. Vols . . . . . Architecturae militaris Tyrocinum . . 449, 450, 508
E. Vols . . . . . Institutionum Matematicarum libri tres 450
H. Weber . . . . . Traité d'algèbre supérieure 516
M. Yvon . . . . . Exercices méthodiques de Mathématiques générales 507
* * * . . . . . Biblia 539
* * * . . . . . Tablă de reducţie a piaştrilor şi paralelor în valută austriacă şi viceversa 90
* * * . . . . . Vocabularul matematic 341, 640

2. Periodice

Acta eruditorum 450
Acta Matematica 573
Anales scientifiques de l'Université de Iassy 573
Boletin Matematico 244, 313
Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi 227

Pag.

Buletinul Şedinţelor Societăţii Române de Ştiinţe 61
Buletinul Societăţii Politechnice 281, 338, 393, 394, 395
Buletin de la Société des amis d'André-Marie Ampère 28
Buletin de la Société des Sciences de Cluj 573
Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Bucarest 79
Bulletin de Mathématique et de Phisique de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" 318, 335, 573
Bulletin de Mathématiques pures et appliquées 227
Bulletin Mathématiques de la Socéité Roumaine des Sciences . . . 177, 227
Comptes rendus des séances de l'Académie de Sciences de Paris 177, 227, 412, 573
Comptes rendus du congrès de l'association française pour l'avancement des sciences 227
Comptes rendus du congrès international des mathématiciens 185
Curierul Matematic 210, 226, 228, 359, 537
Foaia Matematică 226, 228
Gazeta Matematică . 5, 9, 17, 19, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 34, 40, 49, 56, 75, 81, 82, 84, 86, 87, 98, 102, 125, 127, 130, 132, 142, 143, 145, 146, 148, 153, 154, 155, 163, 164, 165, 168, 169, 173, 176, 188, 189, 194, 198, 202, 210, 211, 226, 228, 230, 233, 234, 245, 257, 264, 280, 282, 297, 299, 301, 302, 309, 313, 314, 318, 322, 335, 339, 340, 341, 354, 357, 358, 359, 368, 372, 374, 385, 386, 409, 410, 411, 413, 416, 423, 435, 440, 450, 460, 469, 498, 505, 524, 525, 527, 533, 535, 539, 542, 555, 570, 584, 587, 605, 621, 640, 642, 653.
Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii 6, 25, 190, 441, 488, 547
Gazeta Matematică. Volum jubilar 507
Giornale dell'Instituto italiano degli attuari 627
Journal de l'Ecole Royale Polytechnique Paris 127, 462
Journal de Mathématiques élémentaires 101
Journal de Mathématiques pures et appliquées 128, 412
Journal für die reine und angewandte Mathematik 78, 412
Journal für Mathematik 177
Mathematica 227, 573
Mathesis 51, 129, 189, 227, 293, 295, 360, 385, 526, 528
Memoriile Academiei de Ştiinţe din Berlin 79
Memoriile Academiei din Berlin 413
Nach. Gessel. zu Göttingen 404
Nouvelles Annales de Mathématiques 312, 420
Procedings of the Edinburg Mathematical Society 129
Recreaţii Matematice 539
Revista Aeronauticei şi Marinei 77
Revista Artileriei 77
Revista Geniului 26, 78
Revista Matematică din Timişoara . 41, 107, 206, 226, 228, 313, 373, 411, 433, 541, 593

Pag.

Revista Universitară Matematică 228
Soc. Phil. 177, 180
Sphinx 34
Ştiinţă şi Progres 189, 417
The Tohoku Mathematical Journal 579
Transactions of the American Mathematical Society 186

L. ERATA

Pagina şi Volumul sau Problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea de făcut*
Problema 4731	56
Problema 4829	165
Pag. 694 Vol. XLIII	168
Problema 4612 pag. 154, 155, 156, 157	224
Problema 4661 „ 154, 155, 156, 157	224
Problema 4881	224
Pag. 186 Vol. XLIII	280
„ 179 „ „	280
Problema 4829	280
Pag. 330	392
Problema 4885	392
Problema 2947	448
Problema 4939	504
Problema 4941	504
Pagina 423 Vol. XLIII	504
„ 466 „ „	560
„ 482 „ „	560
Problema 4953	614
Pagina 463	616
„ 464	616

M. SUPLIMENTE

Recreaţiuni Matematice Supliment la No. 1 . . . . . 4 pagini
„ „ „ „ „ 4 . . . . . 4 „
„ „ „ „ „ 7 . . . . . 4 „
Dare de seamă asupra mesei comune dela concursul *Gazetei Matematice* din 1938. Supliment la No. 9 . . . . . 9 „
Recreaţiuni Matematice Supliment la No. 10 . . . . . 4 „

N. PUBLICAȚIUNI IN AFARĂ DE „GAZETA MATEMATICĂ“

N. Abramescu.— Lecțiuni elementare de algebră superioară pentru clasa VIII-a științifică. Ediția VI-a . . . . . .

A. G. Ioachimescu. — Culegere de probleme de Algebră Partea I-a. Ediția IV-a. Revăzută și mărită . . . . . .

I. Ionescu. — Culegere de probleme de Aritmetică. Partea I-a Aritmetică rațională . . . . . .

Gazeta Matematică. — Supliment cu exerciții Vol. IV, 9 numere . 246 pagini.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Boldescu P. (4976); *Cetăţeanu St.* (E, N); *Florescu L. Victor* (4797, 943, 60, 68, 83, E, N, P); *Modâlcă S. E.* (4964, 68, 83); *Nedelcu V. N.* (4960); *Roşculeţ N. M.* (4943, 68, 83); *Şaichin O. A.* (4939, 68, R); *Segal Joe* (4968).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică* Ediţia VI . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. **C. D. IONESCU-ŢIU**

C. 51.813